

УДК 532.517.4

Долинский А.А., Авраменко А.А., Басок Б.И.

*Институт технической теплофизики НАН Украины*

## ДИСКРЕТНО-ИМПУЛЬСНЫЙ ВВОД И ТРАНСФОРМАЦИЯ ЭНЕРГИИ – НОВЫЙ ПОДХОД К ВОЗДЕЙСТВИЮ НА МНОГОФАКТОРНЫЕ СИСТЕМЫ. ЧАСТЬ II. МЕТОДЫ РЕНОРМАЛИЗАЦИОННОЙ ГРУППЫ. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПРОЦЕССОВ ДИВЭ

Розглянуто основи ренормалізаційних групових методів та їх застосування для дослідження турбулентності. Встановлена можливість реалізації ефекту від'ємної турбулентної в'язкості. Запропоновано методи теорії нестійкості стосовно процесів ДІВЕ. Подано приклади використання принципу ДІВЕ при розв'язку різних задач.

Рассмотрены основы ренормализационных групповых методов и их применение к исследованию турбулентности. Установлена возможность реализации эффекта отрицательной турбулентной вязкости. Предложены методы теории неустойчивости применительно к процессам ДИВЭ. Представлены приложения принципа ДИВЭ к проблемам решения различных задач.

The fundamentals and of renormalization group methods and applications of these methods to turbulence are considered. It is shown possibility of realization of negative turbulent viscosity. The methods of the instability theory are proposed as application to DIIЕ processes. Application of DIIЕ principle to different problems is presented.

$C$  – константа;  
 $d$  – размерность пространства;  
 $E$  – энергетический спектр турбулентности, энергия;  
 $H$  – гамильтониан;  
 $k$  – кинетическая энергия турбулентности;  
 $l$  – масштаб турбулентности;  
 $p$  – обобщенный импульс, давление;  
 $q$  – обобщенная координата;  
 $Re$  – число Рейнольдса;  
 $t$  – время;  
 $u$  – скорость;  
 $\mathbf{v}$  – инфинитезимальный генератор;  
 $u', v'$  – возмущающие (пульсационные) компоненты скоростей;  
 $u^>, u^<$  – низко- и высокомодовая составляющие скорости;  
 $x, y, z$  – декартовы координаты;  
 $\varepsilon$  – скорость диссипации;  
 $\varepsilon^*$  – показатель степенного поведения корреляционной функции случайных сил;  
 $\kappa$  – волновое число;  
 $\vec{\kappa}$  – вектор волнового числа;

$\mu_t$  – динамический коэффициент турбулентной вязкости;  
 $\nu$  – кинематический коэффициент вязкости;  
 $\nu_t$  – кинематический коэффициент турбулентной вязкости;  
 $\rho$  – плотность;  
 $\sigma$  – инкремент возмущений;  
 $\omega$  – частота.

**Индексы:**

$rev$  – граница действия обратного каскадного механизма Ричардсона;  
 $t$  – турбулентные параметры;  
 $\Sigma$  – эффективные параметры;  
 $0$  – начало процедуры ренормализации.

**Сокращения:**

ДИВЭ – дискретно-импульсный ввод энергии;  
 DIA – аппроксимации прямого взаимодействия;  
 DNS – прямое численное моделирование;  
 LES – крупномасштабное моделирование;  
 POD – соответствующая ортогональная декомпозиция;  
 RNG – ренормализационная группа.

### **Ренормализационно-групповые методы**

Как отмечалось в [1], методы ренормализационной группы (ренормгруппы, RNG – renormalization group) были первоначально развиты в квантовой теории поля. Затем эти методы успешно использовались для анализа критических явлений при фазовых переходах второго рода в [2-5].

Истоки ренормгруппового подхода лежат в эвристических построениях Каданоффа. Он выдвинул идею, объясняющую автомодельность (подобие) некоторых термодинамических соотношений при масштабных преобразованиях системы. Согласно этой идее, если система может быть охарактеризована гамильтонианом, то для его определения можно использовать метод ренормализационной группы. В соответствии с этим методом сначала определяется гамильтониан взаимодействия  $H_0$  двух узлов, отделенных расстоянием  $L$ . Затем находится эффективный гамильтониан  $H_1$  блока размером  $2L$ . Далее процесс укрупнения в расчете гамильтониана продолжается и, таким образом, на  $n$ -ом шаге находится гамильтониан  $H_n$  для области размером  $2^n L$ . Если итерационные преобразования ведут к результату

$$H_n = H_{n+1}, \quad (1)$$

где  $H_{n+1} = g(H_n)$ , то  $H_n = H_N$  является фиксированной точкой, которая соответствует критической точке в теории фазовых переходов второго рода. Из (1) следует, что в этой точке необходимость в дальнейшем итерационном масштабировании отпадает, т. е. гамильтониан будет инвариантом при дальнейших масштабных преобразованиях.

Если состояние физической системы представить точкой в многомерном пространстве, координаты которого есть силы взаимодействия, то масштабные преобразования будут перемещать эту точку. Таким образом, действие ренормгруппы должно переместить систему по траектории в соответствии с последовательностью масштабных операций, играющих роль времени. Результирующая фиксированная точка определяется решением уравнения

$$g(H_N) = H_N, \quad (2)$$

т. е. последующие преобразования не перемещают данную точку, она остается неподвижной (фиксированной). Уравнение (2) представляет собой функциональное уравнение ренормализационной группы. На основании этого уравнения можно получить дифференциальное уравнение ренормализационной группы или уравнение Гелл-Мэнн–Лоу [6].

Ренормализационно-групповые методы оказались очень плодотворны при изучении фазовых переходов второго рода, т. е. фазовых переходов, при которых вторые производные химического потенциала претерпевают разрыв. Примерами таких переходов служат ферромагнитные переходы в металлах и сплавах; фазовые переходы, при которых меняются диэлектрические свойства вещества; переход гелия в его сверхтекучую модификацию – гелий II; переход металлов и сплавов в сверхпроводящее состояние. Последний тип переходов особенно интересен для теплофизики в связи с открытием высокотемпературных сверхпроводников. Кроме того, ренормализационно-групповые методы могут быть использованы при исследовании переходов «порядок-беспорядок» [4], которые характерны для нанопроцессов. Метод ренормгруппы позволяет исследовать не только статические системы, но и динамические, т. е. исследовать зависящие от времени явления вблизи критических точек.

### **Ренормгрупповые исследования турбулентности. Эффект отрицательной турбулентной вязкости**

Подобная процедура RNG используется и при изучении процессов турбулентности на основе ренормгруппового подхода. Такой подход очень важен при моделировании процессов ДИВЭ. Отметим, что процессы ДИВЭ носят ярко выраженный турбулентный характер, это позволяет равномерно-дискретно распределять энергию в пространстве, что является одним из основных исходных требований ДИВЭ. При этом на формирование поля турбулентности оказывает влияние большое количество различных факторов: нестационарность (периодическая и монотонная); многофазность потока; силовые поля различной природы (центробежные, магнитные,

гравитационные и т. д.); неизотермичность; сжимаемость; градиенты давления и т. д. Используемые до недавнего времени модели турбулентности учитывали все перечисленные факторы введением эмпирических коэффициентов. Эти модели строились, как правило, эмпирическим путем. Использование ренормгруппового подхода позволило преодолеть указанные трудности и уйти от эмпиричных подходов при построении моделей турбулентности. Изложим кратко основные идеи ренормгруппового подхода к изучению турбулентности.

В работе [7] впервые была использована ренормализационная техника для описания турбулентности, возбуждаемой статистически задаваемой случайной силой. Было показано, что использование метода ренормогруппы в крупномасштабном пределе позволяет найти также и амплитудные числовые коэффициенты, которые являются универсальными константами, т. е. не зависят от характеристик системы в области больших волновых чисел и, в частности, от молекулярной вязкости. В последствии значительный вклад в развитие данного направления в исследовании турбулентности внесли Яхот и Оржег [8].

Для того чтобы рассматривать процессы в пространстве волновых чисел, необходимо и частоты “перевести” в это пространство. Это можно сделать с помощью комплексного преобразования Фурье

$$u_n = \frac{1}{(2\pi)^{d+1}} \int_{\kappa \leq \kappa_c} d^d \kappa \int d\omega U_n(\vec{\kappa}, \omega) \exp(i\vec{\kappa} \cdot \vec{x} - i\omega t),$$

где  $\vec{x}$  – вектор координаты точки,  $\kappa_c$  представляет собой величину ультрафиолетового обрезания в пространстве волновых чисел. Вводится допущение, что моды скорости исчезают при  $\kappa_c > \kappa$ . Это равносильно предположению, что влияние отбрасываемых при этом мелкомасштабных мод сводится к замене коэффициента молекулярной вязкости  $\nu_0$  (индекс “0” в молекулярной вязкости используется, чтобы выделить этот параметр, так как с него начнется процедура перенормировки) на некоторое, зависящее от параметра обрезания, перенормированное значение  $\nu_0 = \nu_0(\kappa_c)$ .

В результате процедуры нормализации полученное следующее уравнение для турбулентной вязкости

$$\nu_t = \left( 3A_d D_0 \frac{\kappa_c^{-\varepsilon^*}}{\varepsilon^*} \right)^{1/3}, \quad (3)$$

где  $D_0$  – коэффициент пропорциональности в законе случайной силы, а

$$A_d = \tilde{A}_d \frac{S_d}{(2\pi)^d}, \quad \tilde{A}_d = \frac{d-1}{2(d+2)} \quad S_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}.$$

Для исключения  $D_0$  и  $\kappa_c$  из (3) существует несколько способов [9]. После исключения получаем выражение для турбулентной вязкости через  $k$  и  $\varepsilon$ .

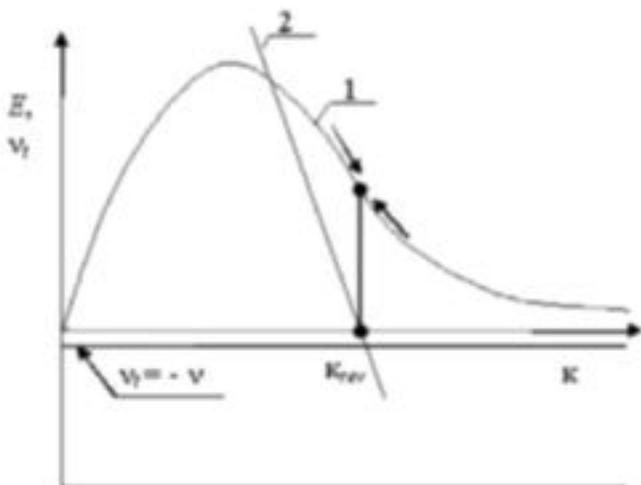
Аналогично может быть получено ренормализационное уравнение, описывающее перенос теплоты или пассивного скаляра. Процедура перенормировки приводит к дифференциальному уравнению для турбулентного числа Прандтля.

Кратко охарактеризуем ренормализационную процедуру уравнений переноса. Упрощенно её можно представить следующим образом:

$$\nu_0 \frac{\partial u}{\partial x} = \nu_0 \frac{\partial (u^< + u^>)}{\partial x} = \left| u^> \rightarrow \nu_0 \rightarrow \nu_{\text{RNG}} \right| = \nu_{\text{RNG}} \frac{\partial u^<}{\partial x}.$$

Для конкретности показана схема для поля скоростей. Однако аналогичные схемы имеют место для полей температуры, кинетической энергии турбулентности, скорости её диссипации и т. д. Приведенная схема показывает, что первоначальное поле (в данном случае поле скоростей) разлагается на быструю и медленную составляющие. Медленную часть можно интерпретировать как осредненную скорость основного течения, а быструю – как турбулентные пульсации. При ренормализации воздействие турбулентных пульсаций на процессы переноса замещается введением перенормированного коэффициента переноса (в данном случае введением ренормализованной вязкости). Таким образом, в результирующих уравнениях остаются RNG-коэффициент переноса и медленная составляющая поля.

Еще один пример приложения принципа ДИВЭ – это сушка в пористых средах. Здесь также могут реализовываться различные режимы течения. До недавнего времени модели турбулентности для пористых сред строились исключительно на эмпирическом уровне. В работах [10, 11] мо-



**Рис. 1. Распределение энергетического спектра (1) и турбулентной вязкости (2) в волновом пространстве.**

дель турбулентности для потоков в пористых средах была получена с использованием ренормгрупповой техники. Причем в работе [10] форхаймеровский нелинейный член гидродинамического сопротивления рассматривался как величина, неподверженная турбулентным возмущениям, а в [11] форхаймеровский член также подвергался ренормализации.

В работе [12] была сделана попытка модифицировать выражение для турбулентной вязкости с учетом ультрафиолетовой части спектра. Результаты этих исследований показали, что существует возможность проявления эффекта отрицательной турбулентной вязкости. В работе [13] такая возможность интерпретируется как реверс механизма передачи энергии Ричардсона, т.е. при отрицательной турбулентной вязкости энергия передается от беспорядочного пульсационного движения к упорядоченному осредненному. Исследования, выполненные в [14], показывают, что существуют два диапазона в волновом пространстве – прямой и обратный перенос энергии турбулентности (рис. 1).

Границей существования этих диапазонов является точка  $\kappa = \kappa_{rev}$ . При  $\kappa > \kappa_{rev}$  превалирует обратный механизм, и энергия передается от меньших вихрей к большим. При этом не исключается возможность одновременной реализации в этом диапазоне и прямого каскада, который сопровождается диссипацией энергии. Однако он явно

не проявляется на фоне обратного каскада. При  $\kappa < \kappa_{rev}$  реализуется лишь прямой перенос энергии. Следовательно, энергия, которая передается от меньших масштабов к большим, доходит до области  $\kappa = \kappa_{rev}$  и затем, минуя зону  $\kappa \in [0, \kappa_{rev}]$ , передается к основному течению. Таким образом, перенос энергии носит нелокальный гистерезисный характер.

Концепция процессов с отрицательным значением коэффициентов турбулентного переноса может быть положена в основу возможности реализации принципа ДИВЭ. Для этого требуется создать необходимые условия для реверса каскадного механизма Ричардсона. Т.е. создать такие условия, при которых энергия, подводимая к системе извне, будет передаваться к высоким гармоникам турбулентных пульсаций, а затем, в соответствии с реализацией обратного механизма Ричардсона, к энергосодержащим когерентным структурам. Это позволит добиться равномерного распределения энергии по всему рабочему объему и использовать ее наилучшим образом.

Кроме рассмотренного выше подхода, существуют и другие виды ренормализационного анализа турбулентности. Например, в работах [15, 16] развит ренормгрупповой подход на основе полевой формулировки.

### **Процессы ДИВЭ как процессы неустойчивости**

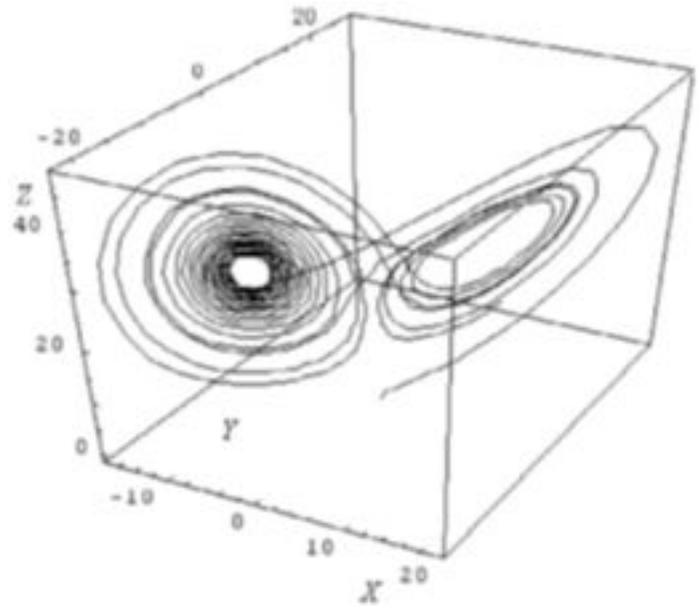
Существенной чертой принципа ДИВЭ является высокая степень нестационарности процессов, что обусловлено дискретно-импульсным характером подвода энергии к системе. Протекания таких процессов с математической точки зрения часто можно охарактеризовать дельта-функцией Дирака или функцией Хевисайда (step function). К таким процессам относятся процессы взрывного образования зародышей вскипающих пузырьков и гидродинамических каверн, их схлопывание, эффекты образования кумулятивных микроструй и др. Данные процессы, учитывая резкие изменения параметров состояния в короткие промежутки времени, можно рассматривать как процессы смены устойчивых состояний существования системы, т.е. использовать для

них концепции теории неустойчивости. При этом методы теории неустойчивости можно рассматривать как предел описания существенно нестационарных процессов ДИВЭ. При таком подходе методы теории неустойчивости позволяют найти характерные точки развития системы, которые не всегда можно установить на основе численного исследования динамики системы, например, начальный критический радиус парового пузырька, радиус начала осцилляций и т. д.

Поведение некоторых элементов ДИВЭ (паровой пузырек, каверна) описывается автономными системами дифференциальных уравнений. Такая система эволюционирует в пространстве состояний (фазовом пространстве) переменных по траектории, которая задается конкретными начальными условиями. Для данной системы существуют различные разновидности устойчивых и неустойчивых аттракторов, таких как: стационарное состояние, предельный цикл, странный (стохастический) аттрактор. Об устойчивости системы можно судить по собственным значениям матрицы взаимодействия (матрица Якоби)  $\beta_k$ . Если  $\Re\{\beta_k\} > 0$ , то стационарное состояние неустойчиво. При пересечении траекторией мнимой оси фазовой плоскости, когда  $\Im\{\beta_k\} \neq 0$ , возникает осциллирующая неустойчивость — происходит бифуркация Хопфа (или бифуркация рождения предельного цикла) — переход от неустойчивого фокуса (стационарного состояния) к предельному циклу.

Если размерность динамической системы превышает два, то для такой системы существует вероятность возникновения еще одного типа неустойчивости (рис. 2) — странного аттрактора [17]. На рис. 3 изображены проекции на плоскости  $X$ – $Y$  и  $Z$ – $X$  траекторий системы Лоренца в пространстве состояний. “Хаотическое” поведение системы, представленное на рис. 3, лишь одно из многих в богатом спектре мод хаоса.

Анализ устойчивости автономных систем позволил изучить особенности поведения парового пузырька. На основе нелинейной модели были исследованы монотонная и осциллирующая неустойчивости парового пузырька как рабочего элемента ДИВЭ. В результате проведенного анализа выявлен характер влияния на неустойчи-

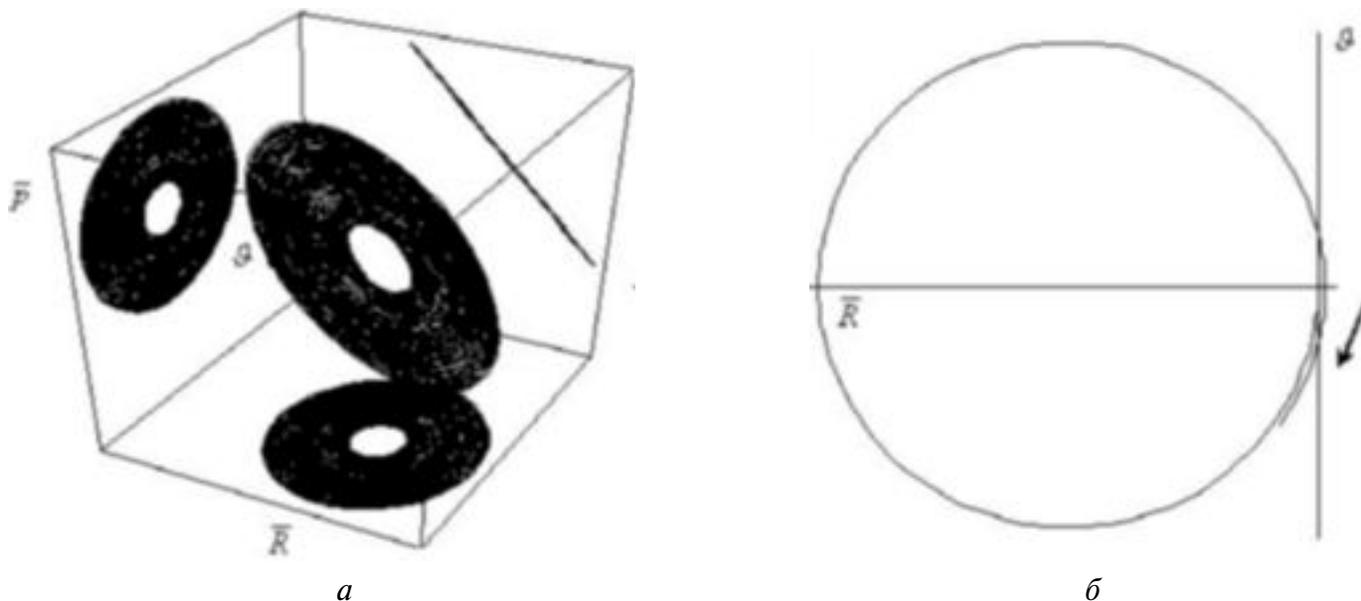


**Рис. 2. Странный аттрактор [17],  $X, Y, Z$  — решение системы Лоренца:  $X$  — амплитуда функции тока,  $Y, Z$  — амплитуды температур.**

вость парового пузырька различных физических параметров. Это позволило глубже понять механизмы, влияющие на различные виды неустойчивости. Были определены области устойчивых и неустойчивых решений системы уравнений, которая описывает динамику пузырька. В частности, в [18] были обнаружены режимы осциллирующей неустойчивости, которым соответствует бифуркация Хопфа (рис. 3).

Если динамика системы описывается системой уравнений в гамильтоновой форме или в автономной форме, то в соответствии с принципом максимума Понтрягина можно найти оптимальное по быстродействию управление, которое позволяет при прочих равных условиях увеличить скорость протекания процесса до максимума [19]. Используя этот принцип, можно оптимизировать протекание процессов ДИВЭ в зависимости от конкретной задачи.

До сих пор рассматривались процессы, динамика которых описывается автономными системами уравнений. Однако в реальных технологиях ДИВЭ для описания процессов необходимо использовать полные уравнения Навье-Стокса и Фурье-Кирхгоффа, причем учитывать при этом многофакторность воздействия различных возмущений, которые могут оказывать сильное влия-



**Рис. 3. Неустойчивый предельный цикл: а – проекции в фазовой плоскости  $\bar{R}$ ,  $\vartheta$ ,  $\bar{p}$ ; б – проекции в плоскости  $\bar{R}$ ,  $\vartheta$ . Безразмерные величины  $\bar{R}$ ,  $\vartheta$ ,  $\bar{p}$  – радиус пузырька, скорость его изменения, давление.**

яние на характер протекания процессов ДИВЭ. Следовательно, в этом случае необходимо использовать иные методы теории неустойчивости. По своей идеологии эти методы, как и методы, используемые при исследовании автономных систем, являются методами возмущений. При этом сложилось два подхода: энергетический метод и метод малых (линейных) возмущений. Энергетический метод представляет собой нелинейный метод, когда учитываются малые квадратичные величины. Он реализуется путем вычисления во времени изменения энергии возмущающего движения. Суть энергетического метода заключается в сравнении генерации турбулентной энергии и ее диссипации. Точка потери устойчивости соответствует ситуации, при которой диссипация турбулентной энергии равна генерации. Этот метод не получил широкого распространения из-за низкой точности и произвольности выбора возмущающих функций.

В случае применения метода малых (линейных) возмущений суммарные поля скоростей, температуры и других исследуемых величин задаются в виде невозмущенного начального поля какой-либо величины, на которое накладывается возмущение. В различных задачах неустойчивости используются различные формы возмущаю-

щих функций. Выбор формы этих функций можно осуществить на основе подалгебры сдвигов алгебры Ли симметрий полной системы невозмущенных уравнений. В случае трехмерного течения данная подалгебра имеет простой вид

$$\mathbf{v} = C_1 \frac{\partial}{\partial t} + C_2 \frac{\partial}{\partial x} + C_3 \frac{\partial}{\partial y} + C_4 \frac{\partial}{\partial z}. \quad (4)$$

Эта подалгебра может генерировать различные формы волноподобных функций. В самом общем случае из (4) можно получить автомодельную переменную вида

$$\eta(t, x, y, z) = \kappa_x x + \kappa_y y + \kappa_z z - \sigma t, \quad (5)$$

где коэффициенты при переменных могут быть комплексными величинами. В зависимости от размерности задачи и того, каким образом задается вид возмущающей амплитуды, форма автомодельной переменной (5) может быть модифицирована.

Обычно форма возмущающей функции задается в виде

$$s_p(t, x, y, z) = A(t, x, y, z)F(\eta),$$

где  $A$  – амплитуда возмущающей функции, а  $F$  – “волновая” составляющая, которая сокращается

в процессе преобразований уравнений для возмущающих величин. Вид амплитуды выбирается в виде функции тех переменных, которые не входят в автомодельную переменную (5). Обычно амплитуда задается как функция одной из координат или времени. Следовательно, все остальные переменные включаются в  $\eta$ . Иногда амплитуда задается константой и это значит, что все четыре аргумента входят в волновую функцию  $F$ . Таким образом функции  $A$  и  $F$  как бы дополняют друг друга, а независимые аргументы могут переходить из одной функции в другую без нарушения автомодельности. Это обусловлено независимостью симметрий сдвига аргументов в подалгебре (4).

При изучении неустойчивости различных процессов ДИВЭ необходим учет различных сопутствующих факторов. Чаще всего следует учитывать неравномерность распределения физических свойств среды в занимаемом объеме. В случае неоднородности плотности среды возмущающие скорости удобно ввести с использованием плотности в качестве весового коэффициента. Такой подход аналогичен подходу Фавра к осреднению турбулентных сжимаемых течений. Это позволяет ввести удовлетворяющую уравнению неразрывности функцию тока для пульсационных составляющих скорости в виде:

$$\rho u' = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \rho v' = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \psi = \varphi(y) \exp[i(kx - \omega t)]. \quad (6)$$

После подстановки выражений (6) в уравнения Навье–Стокса с последующей линеаризацией и обезразмериванием получаем аналог уравнения Орра–Зоммерфельда [20].

На основе описанного подхода исследована неустойчивость гидродинамических процессов, протекающих при реализации некоторых технологий ДИВЭ.

Еще один характерный пример процессов ДИВЭ – это процессы, происходящие в пористых средах, где также важно знать критерии потери устойчивости потока. В работе [21] проведен анализ устойчивости потока в пористой среде с учетом линейного члена Дарси и нелинейного члена Форхаймера. Проведенные расчеты показали, что сильное влияние на устойчивость тече-

ния оказывает форма невозмущенного профиля скорости – чем более заполненный профиль, тем устойчивее поток. Это согласуется с первой теоремой Рэля об устойчивости течения, согласно которой профили скорости, имеющие точку перегиба, неустойчивы [22].

Учет нелинейности слабо влияет на значения критерия устойчивости. Этот факт подтвержден вычислениями, проведенными в работе [23]. То же касается и значений критериев центробежной неустойчивости [24]. Следовательно, при нахождении критериев неустойчивости различной природы можно ограничиваться линейным приближением. Этот вывод особенно актуален для исследования процессов центробежной неустойчивости в роторно-пульсационных аппаратах, принцип работы которых основан на идеологии ДИВЭ.

В последнее время предпринимаются попытки создания альтернативных методов расчета процессов перехода в гидродинамике. Один из таких методов основан на ренормгрупповом подходе. К сожалению, ощутимых результатов упомянутый подход пока не принес из-за математических трудностей.

Еще один подход – это подход, когда производится верификация численных решений полных уравнений. В этом случае возмущения вносятся в численную схему решения, и затем прослеживается поведение этих возмущений. По характеру поведения и направлению распространения возмущений отслеживается время и положение, где исследуемый процесс теряет устойчивость. К прямым численным методам исследования неустойчивости можно отнести также метод прямого численного моделирования (DNS – direct numerical simulation) и метод соответствующей ортогональной декомпозиции (POD – proper orthogonal decomposition), основанный на процедуре Кархунена-Лоеве. Эти методы часто используются при моделировании турбулентных течений и подробнее будут рассмотрены далее. Однако они также позволяют установить особенности переходных режимов. Полезными могут оказаться методы крупномасштабного моделирования (LES – large eddy simulation), по крайней мере при моделировании внезапного перехода к турбулентному течению.

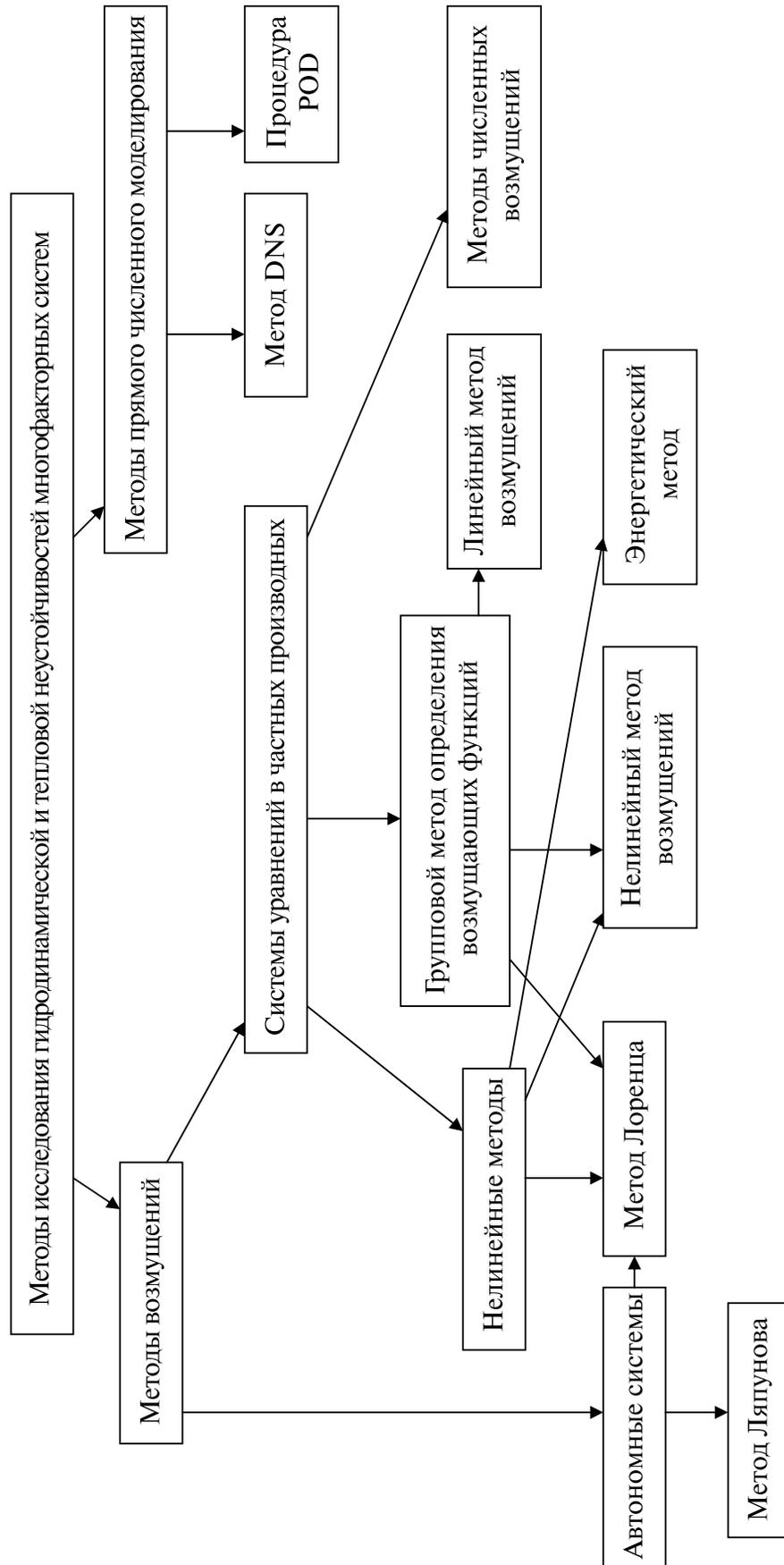


Рис. 5. Методы теории неустойчивости.

В отличие от линейных методов возмущения, которые хорошо описывают только начальную (линейную) стадию перехода, численные методы могут корректно описать все этапы переходного режима течения. Иерархия современных методов теории неустойчивости представлена на рис. 5.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Долинский А.А., Авраменко А.А., Басок Б.И. Дискретно-импульсный ввод и трансформация энергии – новый подход к воздействию на многофакторные системы. Часть I. Классический анализ методам теории групп // Промышленная теплотехника. – 2006. – 28, № 2. – С. 7–13.
2. Wilson K.G. Renormalization group and critical phenomena and the Kondo problem // Phys. Rev. B. – 1971. – 4. – P. 3174–3187.
3. Wilson K.G. The renormalization group: Critical phenomena and the Kondo problem // Rev. Mod. Phys. – 1975. – № 4. – P. 773–840.
4. Вильсон К., Когут Дж. Ренормализационная группа и –разложение. – М.: Мир, 1975. – 256 с.
5. Ма Ш. Современная теория критических явлений. – М.: Мир, 1980. – 312 с.
6. Коллинз Дж. Перенормировка: Введение в теорию перенормировок, ренормализационной группы и операторных разложений. – М.: Мир, 1988. – 367 с.
7. Forster D., Nelson D.R., Stephen M.J. Large-distance and longtime properties of a randomly stirred fluid // Phys. Rev. A. – 1977. – 16, № 2. – P. 732–749.
8. Yakhot V, Orszag S.A. Renormalization group analysis of turbulence. I. Basic theory // J. Sci. Comp. – 1986. – 1. – № 1. – P. 3–51.
9. Авраменко А.А., Басок Б.И., Кузнецов А.В. Групповые методы в теплофизике. – Киев: Наукова думка, 2003. – 484 с.
10. Авраменко А.А. Ренормализационный анализ турбулентности в пористых средах // Промышленная теплотехника. – 2004. – 26. – № 1. – С. 11–21.
11. Avramenko A.A., Kuznetsov A.V. Renormalization Group Model of Macroscopic Turbulence in Porous Media // Transport in Porous Media. – 2006. – 63. – P. 175–193.
12. Авраменко А.А. Ренормгрупповые формулы для турбулентной вязкости и температуропроводности с учетом экспоненциального затухания энергетического спектра в ультрафиолетовом диапазоне // Доповіді НАН України. – 2002. – № 1. – С. 91–95.
13. Старр В. Физика явлений с отрицательной вязкостью. – М.: Мир, 1971. – 260 с.
14. Долинский А.А., Авраменко А.А., Басок Б.И., Тыринов А. И. Ренормгрупповой подход к определению отрицательной турбулентной вязкости // Доповіді НАН України. – 2005. – № 10. – С. 90–93.
15. Теодорович Э.В. Явления турбулентного переноса и метод ренормализационной группы // Прикладная математика и механика. – 1988. – 52. – № 2. – С. 218–224.
16. Canuto V.M., Dubovikov M.S. A new approach to turbulence // Int. J. Modern Phys. – 1997. – 12. – № 18. – P. 3121–3152.
17. Lorenz E.N. Deterministic nonperiodic flow // J. Atmos. Sci. – 1963. – 20. – P. 130–147.
18. Авраменко А.А., Сорокина Т.В. Неустойчивость парового пузыря // Промышленная теплотехника. – 2005. – 27. – №6. – С. 12–15.
19. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1983. – 392 с.
20. Авраменко А.А., Басок Б.И., Сорокина Т.В. Неустойчивость Орра-Зоммерфельда двухфазного потока // Доповіді НАН України. – 2004. – 6. – С. 92–95.
21. Avramenko A.A., Kuznetsov A.V., Basok B.I., Blinov D.G. Investigation of stability of a laminar flow in a parallel-plate channel filled with a fluid saturated porous medium // Phys. Fluids. – 2005. – 17. – P. 094102-1 - 094102-6.
22. Lord Rayleigh. On the stability of certain fluid motion // Proc. London Math. Soc. – 1880. – 11. – P. 57–68.
23. Струминский В.В., Скоблев Б.Ю. Нелинейная нейтральная кривая для течения Пуазейля // Докл. АН СССР. – 1980. – 252. – № 3. – С. 566–570.
24. Авраменко А.А. Теплообмен и гидродинамика около вогнутых поверхностей с вторичными течениями: Автореферат дисс. ... докт. техн. наук. – Киев, 1997. – 34 с.

Получено 22.02.2006 г.