УДК 621.01.216

Павленко А.М.[1],
Кошлак А.В.[1], Басок Б.И.[2]

[1]Днепродзержинский государственный технический университет
[2]Институт технической теплофизики НАН Украины

ТЕПЛООБМЕН В КАНАЛАХ СЛОЖНОЙ КОНФИГУРАЦИИ

В статті запропоновано методику розв'язання лінійних диференційних рівнянь другого порядку, що часто зустрічаються у задачах математичної фізики, зокрема в задачах тепломасообміну в каналах складної конфігурації.

В статье предложена методика решения линейных дифференциальных уравнений второго порядка, часто встречающихся в задачах математической физики, в частности в задачах тепломассообмена в каналах сложной конфигурации.

In the article the method of decision of linear differential equalizations of the second order is offered, is frequent meeting in the tasks of mathematical physics, in particular in the tasks of teplomassoobmena in the channels of the complicated configuration.

Θ – безразмерная температура;
W – скорость потока;
Fo – число Фурье;
Bi – число Био;
x, y, z – координаты.

В современных условиях большое внимание в теплоэнергетике уделяется исследованию конвективного теплообмена в каналах сложной конфигурации. Такие конструктивные элементы находят применение при разработке компактных теплообменных систем. Особенный интерес представляют задачи нестационарного теплообмена при течении теплоносителей в каналах сложной формы. В литературных источниках приводятся данные, относящиеся к исследованию стационарных условий теплообмена. При этом большинство решений получено путем интегрирования упрощенных уравнений переноса. Для нестационарных процессов получены решения только для простых форм сечений (круглый, кольцевой и щелевой каналы).

Рассмотрим данную задачу в общем виде. Температурное поле в потоке жидкости описывается уравнением энергии, которое получено из балансового соотношения энергии элемента объема жидкости: изменение полной энергии объема обусловлено притоком тепла через граничную поверхность.

Ниже приведена модель процесса. Считаем, что на стенке канала заданы граничные условия третьего рода, причем внешняя температура постоянна.

$$\frac{\partial\Theta}{\partial \mathrm{Fo}} + W\frac{\partial\Theta}{\partial z} = \frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2} + \gamma^2\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2}\,; \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right|_{x=0} = \eta_1(y,z,\mathrm{Fo});\quad y_\in[0;1];$$
$$z_\in[0;1];\;\; \mathrm{Fo}_\in[0;+\infty]; \tag{2}$$

$$\left.\left(\frac{\partial\Theta}{\partial x} + \mathrm{Bi}\Theta\right)\right|_{x=1} = \eta_2(y,z,\mathrm{Fo});\quad y_\in[0;1];$$
$$z_\in[0;1];\;\; \mathrm{Fo}_\in[0;+\infty]; \tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial\Theta}{\partial y}\right|_{y=0} = \eta_3(x,z,\mathrm{Fo});\quad y_\in[0;1];$$
$$z_\in[0;1];\;\; \mathrm{Fo}_\in[0;+\infty]; \tag{4}$$

$$\left.\left(\gamma\frac{\partial\Theta}{\partial y} + \mathrm{Bi}\Theta\right)\right|_{y=1} = \eta_4(x,z,\mathrm{Fo});\quad x_\in[0;1];$$
$$z_\in[0;1];\;\; \mathrm{Fo}_\in[0;+\infty]; \tag{5}$$

$$\Theta\big|_{z=0} = \eta_5(x,y,\mathrm{Fo});\quad x_{\in}[0;1];$$

$$y_{\in}[0;1];\ \ \mathrm{Fo}_{\in}[0;+\infty]; \tag{6}$$

$$\Theta\big|_{z=1} = \eta_6(x,y,\mathrm{Fo});\quad x_{\in}[0;1];$$

$$y_{\in}[0;1];\ \ \mathrm{Fo}_{\in}[0;+\infty]; \tag{7}$$

$$\Theta\big|_{\mathrm{Fo}=0} = \eta_7(x,y,z);\quad x_{\in}[0;1];\quad y_{\in}[0;1];\ \ z_{\in}[0;1]. \tag{8}$$

Решение граничной задачи (2)-(7) с начальными условиями (8) для уравнения (1) ищем в виде

$$\Theta(x,y,z,\mathrm{Fo}) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\Theta_{m,n,k} \times$$

$$\times\ (\mathrm{Fo})\cos\alpha_m x\cos\beta_n y\sin k\pi z dz; \tag{9}$$

$$\Theta_{m,n,k}(\mathrm{Fo}) = \chi\int_0^1\cos\alpha_m x dx\int_0^1\cos\beta_n y dy\int_0^1\Theta\ \times$$

$$\times\ (x,y,z,\mathrm{Fo})\sin k\pi z dz\ , \tag{10}$$

где α_m – корни трансцендентного уравнения $tg\alpha = \dfrac{\mathrm{Bi}}{\alpha}$, β_n – корни трансцендентного уравнения $\mathrm{tg}\beta = \dfrac{\mathrm{Bi}}{\gamma\beta}$,

$$\chi = \frac{8(\alpha_m^2+\mathrm{Bi}^2)(\beta_n^2+\mathrm{Bi}^2)}{\left(\alpha_m^2+\mathrm{Bi}\,\alpha_m+\mathrm{Bi}^2\right)\left(\beta_m^2\gamma+\mathrm{Bi}\gamma\beta_m+\mathrm{Bi}^2\right)}\ . \tag{11-13}$$

После решения задачи имеем

$$\Theta_{mnk}(\mathrm{Fo}) = \eta_{mnk}^{(7)}e^{-\left(\alpha_m^2+\beta_n^2\gamma^2+Wk\pi\right)\mathrm{Fo}} +$$

$$+\int_0^{\mathrm{Fo}} e^{-\left(\alpha_m^2+\beta_n^2\gamma^2+Wk\pi\right)\left(\mathrm{Fo}-\overline{\mathrm{Fo}}\right)} f(\overline{\mathrm{Fo}})d\overline{\mathrm{Fo}}\,. \tag{14}$$

Найденную функцию $\Theta_{\mathrm{mnk}}(\mathrm{Fo})$ подставим в формулу (9) и получим решение задачи (1)-(8). Это решение можно записать в виде

$$\begin{aligned}\Theta(x,y,z,\mathrm{Fo}) = \chi\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\Big\{&e^{-(\alpha_m^2+\beta_n^2\gamma^2+Wk\pi)\mathrm{Fo}}\int_0^1\cos\alpha_m\varsigma d\varsigma\int_0^1\cos\beta_n\eta d\eta\int_0^1\eta_7(\varsigma,\eta,\xi)\times\\ &\times\sin k\pi\xi d\xi+\int_0^{\mathrm{Fo}}e^{-(\alpha_m^2+\beta_n^2\gamma^2+Wk\pi)\left(\mathrm{Fo}-\overline{\mathrm{Fo}}\right)}\left[\int_0^1\cos\beta_n\,\eta d\eta\int_0^1\left(\eta_2\left(\eta,\varsigma,\overline{\mathrm{Fo}}\right)-\eta_1\left(\eta,\varsigma,\overline{\mathrm{Fo}}\right)\right)\sin k\pi\varsigma d\varsigma+\right.\\ &\gamma^2\int_0^1\cos\alpha_m\xi d\xi\int_0^1\left(\left(\eta_4\left(\varsigma,\xi,\overline{\mathrm{Fo}}\right)-\eta_3\left(\varsigma,\xi,\overline{\mathrm{Fo}}\right)\right)\sin k\pi\varsigma d\varsigma+W\int_0^1\cos\alpha_m\xi d\xi\int_0^1\left(\eta_5\left(\xi,\eta,\overline{\mathrm{Fo}}\right)-\right.\right.\\ &\left.\left.-(-1)^n\eta_6\left(\xi,\eta,\overline{\mathrm{Fo}}\right)\right)\cos\beta_n\eta d\eta\right]d\overline{\mathrm{Fo}}\Big\}\cos\alpha_m x\cos\beta_n y\sin k\pi z.\end{aligned} \tag{15}$$

В качестве примера рассмотрим случай, когда $\eta_1(y,z,\mathrm{Fo})=0;\ \eta_2(y,z,\mathrm{Fo})=0;$

$\eta_3(x,z,\mathrm{Fo})=0;\ \eta_4(x,z,\mathrm{Fo})=0;$

$\eta_5(x,y,\mathrm{Fo})=1;\ \eta_6(x,y,\mathrm{Fo})=1;$

$\eta_7(x,y,z)=1.$

Подставив эти функции в решение (15), получим:

$$\Theta(x,y,z,\mathrm{Fo}) = 2\chi\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\Big\{e^{-(\alpha_m^2+\beta_n^2\gamma^2+W(2k-1)\pi)\mathrm{Fo}}\frac{\sin\alpha_m\sin\beta_n}{\alpha_m\beta_n}\frac{1}{(2k-1)\pi}+$$

$$+W\,\frac{\sin\alpha_m\sin\beta_n}{\alpha_m\beta_n}\left(1-e^{-(\alpha_m^2+\beta_n^2\gamma^2+W(2k-1)\pi)\mathrm{Fo}}\right)\Bigg\}\cos\alpha_m x\cos\beta_n y\sin\left(2k-1\right)\pi z\ .$$

Таким образом, в настоящей работе предлагается алгоритм, позволяющий решать подобные задачи путем сведения уравнений к квадратному алгебраическому уравнению с переменными коэффициентами. Для этого вводится вспомогательная функция $r(x)=e^{\int\alpha(x)dx}$, которая связана с решением $y(x)$ и коэффициентами $p(x)$ и $g(x)$ и может принимать различный вид. При этом необходимо учесть, что $\dfrac{r'(x)}{r(x)}=\alpha(x)$.

Например, если $r(x)=\dfrac{y'(x)}{y(x)}$, тогда

$\alpha(x)=-\dfrac{t^2+pt+q}{t}$ или $t^2+(p+\alpha)t+q=0$, где

$$t=t(x)=\frac{y'(x)}{y(x)}\ . \qquad (16\text{-}17)$$

Уравнение (16) – квадратное алгебраическое уравнение относительно t, решая которое, получим

$t_{1,2}=-\dfrac{1}{2}(p+\alpha)\pm\dfrac{1}{2}\sqrt{(p+\alpha)^2-4g}$ и, учитывая (17),

$$y_{1,2}(x)=e^{-\frac{1}{2}\int\left((p+\alpha)\pm\sqrt{(p+\alpha)^2-4g}\right)dx}\ . \qquad (18)$$

На функцию $\alpha(x)$ необходимо наложить условие $W(x)=Ce^{-\int p(x)dx}=e^{-\int[p(x)+\alpha(x)]dx}\sqrt{(p+\alpha)^2-4g}$ или

$$C=e^{-\int\alpha(x)dx}\sqrt{(p+\alpha)^2-4g}\ , \qquad (19)$$

которое можно записать в виде

$$C^*=e^{-2\int\alpha(x)dx}\left[(p+\alpha)^2-4g\right]\neq 0. \qquad (20)$$

При этом $\alpha(x)$ – произвольная функция, и ее можно выбрать следующим образом:

$$\alpha(x)=\frac{1}{2}\Big(\ln\left\{g(x)f\left[p(x)\right]\right\}\Big)'. \qquad (21)$$

Подставляя функцию (21) в условия (20), придем к дифференциальному уравнению Бернулли:

$$\Big(g(x)f\left[p(x)\right]\Big)'+2p(x)g(x)f\left[p(x)\right]=$$
$$=2\sqrt{\frac{C^*f\left[p(x)\right]+4}{f\left[p(x)\right]}}\Big(g(x)f\left[p(x)\right]\Big)^{3/2}, \qquad (22)$$

решая которое, получим

$$g(x)=\frac{C_2W^2(x)}{f\left[p(x)\right]\left\{\int\sqrt{\dfrac{C^*f\left[p(x)\right]+4}{f\left[p(x)\right]}}W(x)dx+C_1\right\}^2}\cdot \qquad (23)$$

Из курса дифференциальных уравнений известно, что уравнение (1) можно привести к уравнению с постоянными коэффициентами при помощи замены независимой переменной

$$z=\bar{C}\int\sqrt{g(x)}dx\ , \qquad (24)$$

а учитывая (23), $z=\bar{C}\ln\left|C_3\int W(x)dx+C_1\right|$. (25)

Задавая определенные выражения для $\alpha(x)$, мы будем получать конкретные дифференциальные или трансцендентные уравнения.

Выводы

1. Вариантов выбора функции $r(x)$ можно предложить более десяти.
2. Предложенную методику можно успешно использовать при решении уравнения Риккати и систем двух линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка.
3. Незначительно видоизменив предложенную методику, можно найти решения дифференциальных уравнений третьего и четвертого порядков.