

УДК 519.6: 536.24

НИКИТЕНКО Н.И.¹, СНЕЖКИН Ю.Ф.¹,
СОРОКОВАЯ Н.Н.¹, КОЛЬЧИК Ю.Н.²¹Институт технической теплофизики НАН Украины²Киевский национальный университет строительства и архитектуры

МЕТОД РАСЧЕТА ТЕПЛООБМЕНА ПРИ РАЗЛИЧНЫХ РЕЖИМАХ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОГО СЖИМАЕМОГО ГАЗА

Викладаються метод математичного моделювання динаміки течії та теплообміну при ламінарному, перехідному і турбулентному режимах течії стисливої рідини в каналі і прямокутній ямі, верхня кришка якої рухається щодо її стінок з постійною швидкістю. Виконано зіставлення результатів числового моделювання з відомими експериментальними даними.

Излагаются метод математического моделирования динамики течения и теплообмена при ламинарном, переходном и турбулентном режимах течения сжимаемой жидкости в канале и прямоугольной яме, верхняя крышка которой движется относительно ее стенок с постоянной скоростью. Выполнено сопоставление результатов численного моделирования с известными экспериментальными данными.

The method of mathematical modeling of dynamics of current and heat transfer at laminar, transitive and turbulent modes of current of a compressed liquid in the channel and a rectangular hole which top cover goes be relative its walls with constant speed are stated. Comparison of results of numerical modelling to known experimental data is executed.

B_W – доля узлов, в которых осуществляется торможение скоростей изменения искомых функций W во времени;

c_v – теплоемкость газа;

F – массовая сила;

G – расход жидкости;

h_x, h_y – размер шагов разностной сетки по пространственным координатам x и y ;

I – число шагов разностной сетки вдоль оси x ;

M – число шагов разностной сетки вдоль оси y ;

l – размер шага разностной сетки по времени t ;

L – масштаб длины;

P – давление;

Re – число Рейнольдса;

\dot{S} – тензор скоростей деформации;

t – время;

T – температура;

w_x, w_y – проекции вектора скорости на оси x и y ;

x, y – декартовы координаты;

X – ширина щелевого канала;

Y – длина канала;

δ – символ разности производной;

θ – весовой параметр разностного уравнения;

λ – коэффициент теплопроводности;

μ – динамический коэффициент вязкости;

μ' – динамический коэффициент объемной вязкости;

Π – внутренний источник энергии;

ρ – плотность.

Индексы:

k – крышка;

s – точки на стенках области;

n – начальные значения функций;

w – функция, принимающая значения w_x, w_y, T, ρ .

Введение

Исследование динамики процессов теплообмена и гидродинамики при ламинарном, переходном и турбулентном режимах течения газов представляет актуальную задачу для энергетики, машиностроения и ряда других отраслей совре-

менной техники. В большинстве работ, посвященных исследованию гидродинамики и теплообмена, принимается, что вязкие жидкости и газы являются несжимаемыми. Фактор сжимаемости среды оказывает существенное влияние на динамику течения и теплообмена. Любое возмущение системы, связанное с изменением мас-

совых и поверхностных сил, тепловых потоков на границах области, перемещением границ, приводит к возникновению уже при ламинарном режиме колебаний скорости, плотности, температуры и давления с различными фазами [1]. Амплитуда этих колебаний, которая пропорциональна интенсивности возмущающего фактора и геометрическому масштабу области [1], может быть соизмерима со средними значениями параметров. При прекращении действия возмущающего фактора, указанные колебания затухают и система переходит в стационарное состояние. Существенные трудности моделирования движения сжимаемой жидкости обусловлены возникновением ударных волн при значительных числах Рейнольдса. Интервал чисел Рейнольдса, для которого удастся провести численное моделирование гидродинамики и теплообмена непосредственно на базе полной системы уравнений Навье – Стокса для сжимаемой жидкости обычно ограничивается несколькими сотнями [2,3].

Целью работы является разработка численного метода расчета динамики тепло- обмена вязкого сжимаемого газа при ламинарном, переходном и турбулентном режимах течения и моделирование теплообмена в канале и прямоугольной яме, верхняя крышка которой движется относительно ее стенок с постоянной скоростью. Для расчета переходного и турбулентного режимов течений дополнительно привлекается метод торможения скоростей изменения компонентов вектора скорости, температуры и плотности в некоторых узловых точках области, идея которого сформулирована в [4] и успешно использовалась при численном моделировании тепломассообмена при естественной [4] и вынужденной [5] конвекции несжимаемой жидкости.

Математическая модель и метод расчета

В качестве исходной для моделирования течения и теплообмена сжимаемой жидкости используется система уравнений Навье – Стокса следующего вида:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{w} = 0, \quad (1)$$

$$\rho \frac{d(\mathbf{w})}{dt} = \rho F - \operatorname{grad} \left[P + \left(\frac{2}{3} \mu - \mu' \right) \operatorname{div} \mathbf{w} \right] + 2 \operatorname{div} (\mu \dot{S}) \quad (2)$$

$$\rho c_v \frac{dT}{dt} = \operatorname{div} (\lambda \operatorname{grad} T) + 2 \mu S^2 - p \operatorname{div} \mathbf{w} - \left(\frac{2}{3} \mu - \mu' \right) (\operatorname{div} \mathbf{w})^2 + \Pi. \quad (3)$$

Для декартовых координат x_1, x_2, x_3 , тензор скоростей деформации \dot{S} определяется выражением

$$\dot{S} = \mu \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right).$$

Для замыкания системы уравнений (1) – (3) должны быть заданы: уравнение состояния среды, начальные и граничные условия, геометрия области, физические характеристики среды.

Если число искомым функций равно g , то на внешних границах исследуемой области независимо может быть задано $g-1$ граничное условие. Значение функции, которая не определяется граничными условиями, может быть найдено при помощи одного из уравнения системы (1)–(3), записанного для точек области, близких к граничным.

Для решения уравнений Навье-Стокса используется предложенная в [6] эффективная трехслойная пересчетная разностная схема, в соответствии с которой искомые функции на каждом временном шаге определяются в двух приближениях. При нахождении искомым функций в первом приближении используются разностные уравнения, аппроксимирующие неполную систему уравнений Навье-Стокса без учета вязкости. Во втором приближении применяются разностные уравнения, аппроксимирующие полную систему уравнений Навье-Стокса.

Система уравнений для решения пространственных задач течения и тепломассообмена в декартовых координатах на сетке $x_{mk} = m_k h_k$ ($m_k = 0, 1, \dots, h_k = \text{const}, k = 1, 2, 3$), $t_n = n l$ ($n = 0, 1, \dots, L > 0$)

аппроксимируется следующей системой разностных уравнений:

$$\delta_t \bar{\rho} = - \sum_{s=1}^3 \delta_s (\rho w_s); \quad (4)$$

$$\delta_t \rho^n = - \sum_{s=1}^3 \delta_s (\bar{\rho} \bar{w}_s); \quad (5)$$

$$\delta_t \bar{w}_k = - \sum_{s=1}^3 w_s \delta_s w_k - \frac{1}{\rho} \delta_k P + X_k; \quad (6)$$

$$\begin{aligned} (1 + \theta_{wk}) \delta_t w_k - \theta_w \delta_t w_k^{n-1} = & - \sum_{s=1}^3 w_s \delta_s \bar{w}_k + \\ & + \frac{1}{\rho} \left\{ -\delta_k P + \sum_{s=1}^3 \delta_s (\mu \delta_s \bar{w}_k) + \sum_{s=1}^3 \delta_s (\mu \delta_k \bar{w}_s) - \right. \\ & \left. - \sum_{s=1}^3 \delta_k \left[\left(\frac{2}{3} \mu - \mu' \right) \delta_s w_s \right] + \sum_{\beta=1}^B \rho_\beta X_{\beta k} \right\}; \quad (7) \end{aligned}$$

$$\delta_t \bar{T} = - \sum_{s=1}^3 w_s \delta_s T; \quad (8)$$

$$\begin{aligned} (1 + \theta_T) \delta_t T - \theta_T \delta_t T^{n-1} = & - \sum_{s=1}^3 w_s \delta_s T + \\ & + \frac{1}{c_v \rho} \left\{ \sum_{s=1}^3 \delta_s (\lambda \delta_s T) - p \sum_{s=1}^3 \delta_s w_s + \mu \left[(\delta_1 w_2 + \delta_2 w_1)^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + (\delta_2 w_3 + \delta_3 w_2)^2 + (\delta_3 w_1 + \delta_1 w_3)^2 \right] - \right. \\ & \left. - \left(\frac{2}{3} \mu - \mu' \right) \left(\sum_{s=1}^3 \delta_s w_s \right)^2 + \Pi \right\}. \quad (9) \end{aligned}$$

В разностных уравнениях (4) — (9) сеточные функции $\Psi_{m_1 m_2 m_3}$ и $\bar{\Psi}_{m_1 m_2 m_3}$ ($\Psi = w_k, T, \rho, \rho_\beta, P$) для точки $(x_{m_1}, x_{m_2}, x_{m_3}, t_n)$ записаны для простоты без индексов, т. е. $\Psi = \Psi_{m_1 m_2 m_3}^n, \bar{\Psi} = \bar{\Psi}_{m_1 m_2 m_3}^{n+1}$:

$$\delta_t \Psi = \frac{1}{l} (\Psi_{m_1 m_2 m_3}^{n+1} - \Psi_{m_1 m_2 m_3}^n);$$

$$\delta_t \bar{\Psi} = \frac{1}{l} (\bar{\Psi}_{m_1 m_2 m_3}^{n+1} - \bar{\Psi}_{m_1 m_2 m_3}^n);$$

$$\delta_1 \Psi = \frac{1}{2h_1} (\Psi_{m_1+1, m_2, m_3}^n - \Psi_{m_1-1, m_2, m_3}^n);$$

$$\delta_1 (\mu \delta_1 \Psi) = \frac{1}{2h_1^2} \left[(\mu_{m_1+1, m_2, m_3} + \mu_{m_1 m_2 m_3}) \times \right.$$

$$\times (\Psi_{m_1+1, m_2, m_3}^n - \Psi_{m_1 m_2 m_3}^n) -$$

$$\left. - (\mu_{m_1 m_2 m_3} + \mu_{m_1-1, m_2, m_3}) (\Psi_{m_1 m_2 m_3}^n - \Psi_{m_1-1, m_2, m_3}^n) \right];$$

$$\delta_1 (\mu \delta_2 \Psi) = \frac{1}{8h_1 h_2} \left[(\mu_{m_1+1, m_2+1, m_3} + \mu_{m_1+1, m_2-1, m_3}) \times \right.$$

$$\times (\Psi_{m_1+1, m_2+1, m_3}^n - \Psi_{m_1+1, m_2-1, m_3}^n) -$$

$$\left. - (\mu_{m_1-1, m_2+1, m_3} + \mu_{m_1-1, m_2-1, m_3}) \times \right.$$

$$\left. \times (\Psi_{m_1-1, m_2+1, m_3}^n - \Psi_{m_1-1, m_2-1, m_3}^n) \right];$$

Необходимые условия устойчивости решения разностных уравнений (4)—(9) к решению уравнений (1)—(3), находятся при помощи метода условного задания некоторых искомым функций системы [1], можно представить в виде

$$l \leq \min \left\{ \frac{1}{\sum_{s=1}^3 \frac{w_s}{h_s}}, \frac{1 + 2\theta_\Psi}{2 \sum_{s=1}^3 \frac{b_\Psi}{h_s^2}} \right\}. \quad (10)$$

Здесь b_Ψ принимает следующие значения: для уравнений движения в проекции на ось x_1

$$b_{w_1} = \frac{4\mu}{3\rho} + \frac{\mu'}{\rho}, b_{w_2} = b_{w_3} = \frac{\mu}{\rho};$$

для уравнения энергии $b_T = \frac{\lambda}{c_v \rho}$; для уравнения неразрывности

$b_\rho = 0$. Погрешность аппроксимации разностными уравнениями (4) — (9) уравнений (1) — (3) имеет порядок $O(l + h^2)$.

Поскольку объемная вязкость η' существенно проявляется лишь при очень быстро протекающих процессах в газе (например при взрыве или прохождении газа сквозь скачек уплотнения) ею

обычно пренебрегают. Для простоты в дальнейшем будем полагать $\eta' = 0$.

Для численного решения задач вынужденной конвекции при значительных числах Рейнольдса Re применяется подход [4], в котором не используются понятия турбулентной вязкости, турбулентной теплопроводности и турбулентной диффузии. Он базируется непосредственно на уравнениях Навье–Стокса с константами переноса, которые не зависят от режима течения, и методе торможения скоростей изменения искомым функций w_1, w_2, w_3, T, ρ в некоторых узловых точках области, в которых эти скорости превышают допустимые значения с физической точки зрения.

Необходимость операции торможения скоростей обусловлена следующим обстоятельством. Проблемы возникновения неустойчивости при численном решении уравнений Навье–Стокса и при протекании физического процесса конвекции, когда значения чисел Пекле или Рейнольдса достаточно велики, имеют общие черты. Однако, при возникновении численной неустойчивости значение, например, скорости жидкости стремится к бесконечности, тогда как во всех реальных процессах течения и теплообмена все физические параметры потока (скорость, температура, плотность), как и их временные производные, остаются ограниченными (например, скорость течения не может достигнуть скорости света). Устранение указанного несоответствия в характере развития неустойчивости может быть достигнуто путем наложения на временные производные от функций w_1, w_2, w_3, T, ρ в некоторых узловых точках области, в которых эти скорости превышают допустимые по условиям устойчивости значения, ограничения следующего вида:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = A_W \frac{\partial W}{\partial t} / \left| \frac{\partial W}{\partial t} \right|, \text{ если } \left| \frac{\partial W}{\partial t} \right| > A_W, \\ W = w_1, w_2, w_3, T, \rho. \quad (11)$$

Здесь A_W — положительная величина, которая может быть выбрана исходя из требования минимизации числа узловых точек B_W , в которых на временном слое в момент установления решения

реализуется согласно (11) коррекция скорости $\partial W / \partial t$, $W = w_1, w_2, w_3, T, \rho$.

Процедура торможения скоростей может рассматриваться как отвод избыточной энергии в некоторых точках рассматриваемой области. Эта энергия эквивалентна энергии тех турбулентных пульсаций, масштаб которых меньше масштаба разностной сетки, и поэтому они не могут проявиться при численном решении.

Результаты численного моделирования

В достаточно широком диапазоне чисел Рейнольдса проведено решение двумерных задач гидродинамики и теплообмена вязкого газа в щелевом канале и при течении в прямоугольной яме, когда его верхняя крышка движется относительно других стенок ямы с некоторой заданной скоростью. На стенках областей компоненты скоростей определяются из условия прилипания, температура считается заданной, плотность находится по неявным разностным уравнениям, аппроксимирующим уравнение неразрывности (1). Если ось x двумерной области, заданной в декартовых координатах x, y , лежит на неподвижной стенке, то, поскольку на этой стенке $w_x = w_y = 0$, $\partial w_x / \partial x = 0$ и уравнение неразрывности принимает вид $\partial \rho / \partial t = -\rho \partial w_y / \partial y$, его разностная аппроксимация записывается следующим образом:

$$\rho_{m_x 0}^{n+1} = \rho_{m_x 0}^n / \left(1 + w_{y, m_x 1}^{n+1} \frac{l}{h_y} \right). \quad (12)$$

Для случая, когда стенка движется вдоль оси x с заданной скоростью w_{x0} , плотность $\rho_{m_x 0}^{n+1}$ находится по разностному уравнению

$$\rho_{m_x 0}^{n+1} = \left[\rho_{m_x 0}^n - w_{x0} (\rho_{m_x +1, 0}^n - \rho_{m_x -1, 0}^n) \frac{l}{2h_x} \right] / \left(1 + w_{y, m_x 1}^{n+1} \frac{l}{h_y} \right). \quad (13)$$

Аналогичным образом находятся плотности на других стенках области.

При моделировании течения в яме квадратного сечения $H \times H$ принималось, что в начальный

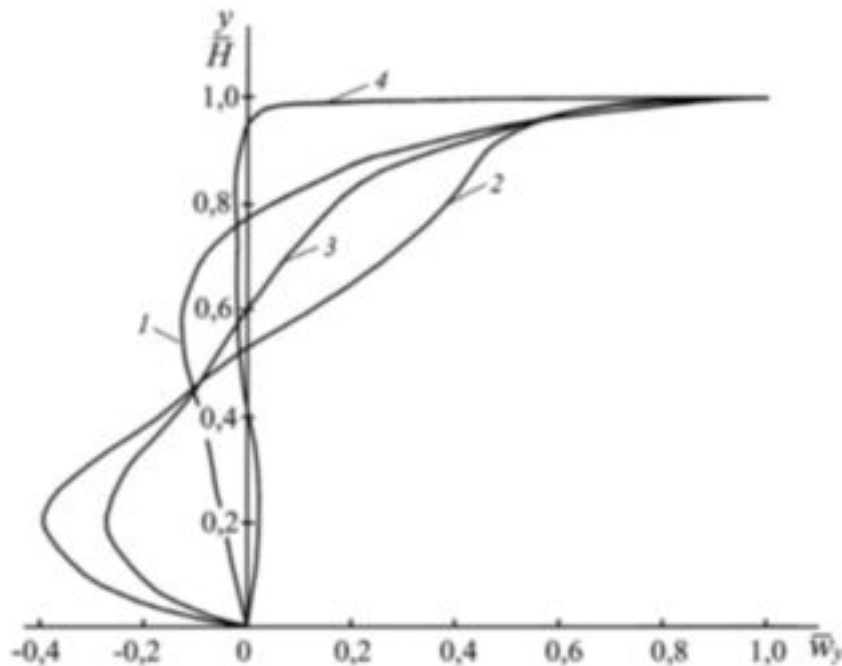


Рис. 1. Распределение относительных продольных скоростей \bar{w}_y вдоль относительной координаты y/H в сечении $x = H/2$ квадратной ямы $H \times H$ при различных числах Рейнольдса: 1 – $Re = 100$; 2 – 500; 3 – 1000; 4 – 10000.

момент времени $t = 0$ газ неподвижен, а температура и плотность постоянны. При $t > 0$ скорости газа на дне ямы и на ее боковых стенах равны нулю, а верхняя крышка движется с продольной скоростью $w_x = 1$, тогда как ее поперечная скорость $w_y = 0$. Температура на всех стенках остается постоянной.

С увеличением числа Re относительное число узловых точек B_W , в которых осуществляется процедура торможения, возрастает. Однако дробление шагов разностной сетки приводит к снижению этого числа. На равномерной сетке $I \times M = 41 \times 41$ при числе $Re < 500$, $B_W \approx 0$. Когда $Re = 10^3$, B_{w_y} для продольной скорости равно 0,0018. При $Re = 10^4$, $B_{w_y} = 0,033$ и при $Re = 10^5$, $B_{w_y} = 0,27$. После наступления стабилизации решения на сетке $I \times M = 101 \times 101$ при $Re = 10^5$, $B_{w_y} = 0,0066$. На рис. 1 приведены профили относительных продольных скоростей $\bar{w}_y = w_y / w_{\text{в}}$ в сечении $x = H/2$ при различных числах Рейнольдса.

Для входного сечения канала $y = 0$ задаются условия

$$W(t, x, 0) = W_0(t, x), \quad W = w_x, w_y, T, \rho. \quad (14)$$

В предположении, что длина канала Y достаточно велика по сравнению с его шириной X и вблизи выходного сечения канала течение и теплообмен стабилизируются, граничные условия при $y = Y$ принимаются в виде

$$\frac{\partial W^s}{\partial x^s} \approx 0, \quad (W = w_x, w_y, T, \rho; s = 1, 2, \dots);$$

$$P(x, Y) = \text{const}. \quad (15)$$

При $s = 1$ и $M = Y/h_y$ разностная аппроксимация (15) записывается следующим образом:

$$W_{m_x, M}^{n+1} = W_{m_x, M-1}^{n+1}. \quad (16)$$

Для повышения точности решения в период установления течения и теплообмена дополнительно использовалось уравнение баланса массы для канала в целом [7]

$$\int_0^Y \rho(t, 0, y) w_x(t, 0, y) dy - \int_0^X \rho(t, x, Y) w_y(t, x, Y) dx +$$

$$+ \int_0^X \rho(t, x, 0) w_y(t, x, 0) dx -$$

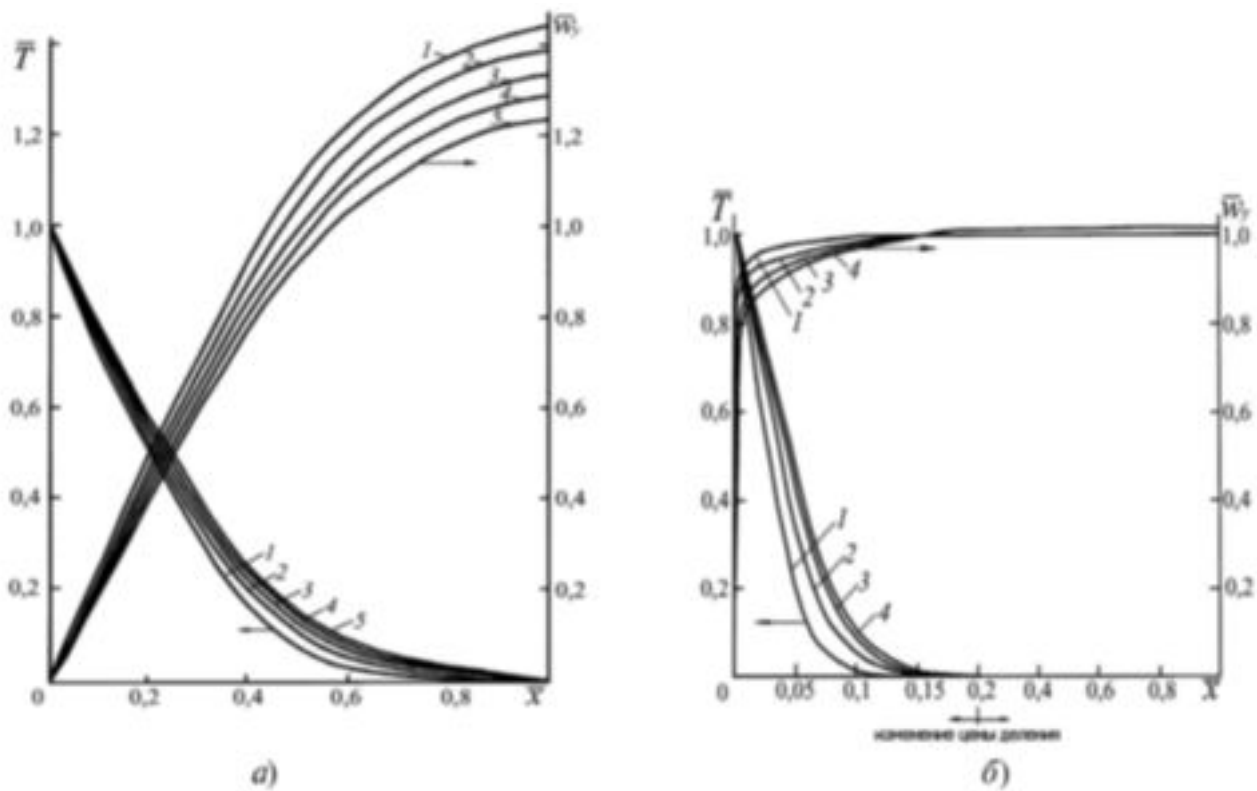


Рис. 2. Профили относительных продольных скоростей \bar{w}_y и температур \bar{T} в выходном сечении $y = Y$ щелевого канала для различных чисел Рейнольдса и моментов времени
а) $Re = 10^3$, 1 – $t = 0,005$ с, 2 – $0,01$ с, 3 – $0,015$ с, 4 – $0,02$ с, 5 – $0,025$ с;
б) $Re = 10^5$, 1 – $t = 0,006$ с, 2 – $0,012$ с, 3 – $0,018$ с, 4 – $0,024$ с.

$$-\int_0^Y \rho(t, X, y) w_x(t, X, y) dy = 0 \quad (17)$$

Первый, второй, третий и четвертый члены левой части уравнения представляют расходы газа через границы области $x = 0, y = Y, y = 0, x = X$.

Найденные согласно (16) значения продольных скоростей w_y рассматриваются как их первое приближение $\bar{W}_{m_x, M}^{n+1}$, $i = 1, 2, \dots, I$. Они используются для нахождения (с использованием, скажем, формулы трапеций) приближенного расхода жидкости \bar{G}_M через сечение $m = M$. Точное значение расхода через это сечение находится по уравнению (17). Окончательные значения скоростей $W_{m_x, M}^{n+1}$ находятся по уравнению

$$W_{m_x, M}^{n+1} = \bar{W}_{m_x, M}^{n+1} \frac{G_M}{\bar{G}_M} \quad (18)$$

Моделирование течения и теплообмена проводилось для щелевого канала, стенки которого

имеют постоянную температуру T_c . Для входного сечения $y = 0$ задаются профили скорости потока, температуры и плотности (или давления), симметричные относительно плоскости $x = X/2$. На рис. 2 представлены зависимости от относительного расстояния от стенки канала $\bar{x} = x/(X/2)$ относительных продольных скоростей $\bar{w}_y = w_y(x, Y, t)/w_{y, \text{ср}}$ и температур $\bar{T} = [T(x, Y, t) - T_{\text{ср}}]/(T_c - T_{\text{ср}})$, где $w_{y, \text{ср}}$ и $T_{\text{ср}}$ – средние значения скорости и температуры во входном сечении, в различные моменты времени соответственно для чисел Рейнольдса 10^3 (а) и 10^5 (б). Изменение профиля скоростей во входном сечении канала при постоянном расходе газа практически не сказывается на профиле скоростей в выходном сечении, если $Y/X > 50$. На рис. 3 представлены для сопоставления зависимости Nu от Re для каналов с непроницаемыми стенками, построенные на базе численного решения по эмпирическим уравнениям для круглой трубы [8] и кольцевого канала [8], а также по приближен-

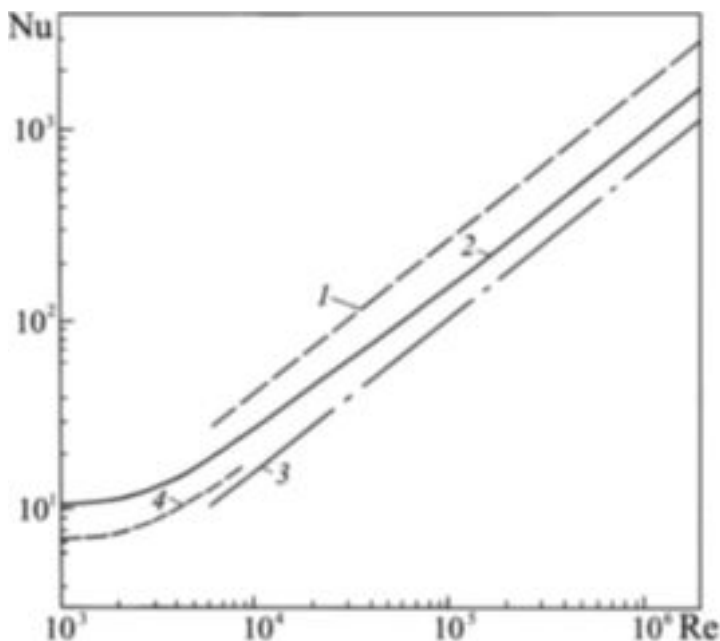


Рис. 3. Зависимость числа Нуссельта Nu от числа Рейнольдса Re для щелевого канала:
 1 – расчет по эмпирической формуле для круглой трубы [8]; 2 – результаты численного решения для плоского щелевого канала; 3 – расчет по эмпирической формуле для кольцевого канала [8]; 4 – расчет на базе приближенного аналитического решения для щелевого канала [9].

ному аналитическому решению для щелевого канала с непроницаемыми стенками при заданном параболическом профиле скорости [9]. Результаты сопоставления расчетных зависимостей числа Nu от числа Re для каналов удовлетворительно согласуются с известными экспериментальными данными.

Выводы

Разработан численный метод расчета гидродинамики и теплообмена в канале с проницаемыми стенками при различных режимах течения жидкости. Сопоставление результатов численных и известных физических экспериментов свидетельствуют о том, что применяемая в работе процедура торможения скоростей изменения иско-

мых функций позволяет непосредственно на базе уравнений Навье-Стокса удовлетворительно описать тепломассоперенос при переходном и турбулентном режимах течения сжимаемой жидкости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Никитенко Н.И. Теория тепломассопереноса. – К.: Наук. думка, 1983.
2. Браиловская И.Ю. Разностный метод численного решения двумерных нестационарных уравнений Навье – Стокса для сжимаемого газа. Сб. “Вычислительные методы и программирование”, Вып. 7, Москва, Изд-во МГУ, 1967. – С. 3–15.
3. Мышенков В.П. Численное решение уравнений Навье – Стокса для задачи обтекания прямоугольника потоком газа // Механика жидкости и газа. – 1972. – № 4. – С. 10–17.
4. Никитенко Н. И., Кольчик Ю. Н., Сорокочкая Ю.Н. Метод канонических элементов для моделирования гидродинамики и тепломассообмена в областях произвольной формы // Инж. - физ. журн. – 2002. – Т. 75, № 6. – С. 74–80.
5. Никитенко Н.И., Снежкин Ю.Ф., Сорокочкая Ю.Н., Кольчик Ю.Н. Численный метод моделирования тепло- и массообмена при различных режимах течения в канале с проницаемыми стенками // Инж.- физ. журн. – 2006. – Т. 79, № 3. – С. 91–101.
6. Никитенко Н.И. Сопряженные и обратные задачи тепломассопереноса. – К.: Наук. думка, 1988.
7. Никитенко Н.И. Сеточный метод расчета течения и теплообмена вязкой несжимаемой жидкости. // Инж. - физ. журн. – 1986. – Т. 50, № 3. – С. 476 – 482.
8. Теория тепломассообмена. Под редакцией А. И. Леонтьева. М.: МГТУ им. Баумана, 1997 –с.
9. Исаченко В. П., Осипова В. А, Сукомел А. С. Теплопередача. М.: Энергоиздат, 1981.

Получено 04.06.2007 г.