

УДК 532.62

Коханенко М.С.,  
Процьшин Б.Н., Абаржи И.И.

*Институт технической теплофизики НАН Украины*

## К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ТОЛЩИНЫ ПЛЕНКИ ЖИДКОСТИ НА ВРАЩАЮЩЕМСЯ ДИСКЕ

Подано методику розрахунку товщини плівки рідини, яка утворюється в верхній напівплощині вертикально розміщеного диска, який обертається. Встановлено поле швидкостей течії у плівці рідини. Отримано аналітичні залежності товщини плівки від радіальної і кутової координат та параметрів системи. Показано, що зростання радіальної координати і кутової швидкості призводить до збільшення товщини плівки.

Приведена методика расчета толщины пленки жидкости, образующейся в верхней полуплоскости вращающегося вертикально расположенного диска. Установлено поле скоростей течения в пленке жидкости. Получены аналитические зависимости толщины пленки от радиальной и угловой координат и параметров системы. Показано, что рост радиальной координаты и угловой скорости приводит к увеличению толщины пленки.

The calculation procedure for thickness of liquid film formed at the upper semiplane of vertically located rotating disc. The field of current velocities of liquid films is established for the coordinate system rigidly connected with this disc and in the assumption of laminar character of current. Analytical dependences of thickness of a film on radial and angular coordinates and parameters of system are received on this basis. It is shown, that growth of radial coordinate and angular speed leads to increase in thickness of a film.

$C_1$  и  $C_2$  – постоянные интегрирования;  
 $F_r, F_\varphi, F_z$  – радиальная, окружная и осевая компоненты ускорений массовых сил соответственно;

$f(r) = \delta|_{\varphi=0}$  – начальное условие;

$g$  – ускорение свободного падения;

$P$  – давление;

$R$  – радиус диска;

$Re$  – число Рейнольда;

$r$  – радиальная координата;

$r^* = r/R$  – безразмерная радиальная координата;

$t$  – время;

$U$  – радиальная скорость жидкости в пленке;

$\bar{U}$  – средняя результирующая скорость жидкости на плоскости  $(r, \varphi)$  при  $\varphi = 0$ ;

$u_0$  – некоторая характерная скорость;

$V, W$  – окружная и осевая скорости жидкости в пленке соответственно;

$z$  – осевая координата;

$z^* = z/\delta_0$  – безразмерная осевая координата;

$\delta$  – толщина пленки;

$\delta_0$  – средняя толщина пленки;

$\delta_1 = \delta/\delta_0$  – безразмерная толщина пленки;

$\varepsilon = \omega^2 R/g$  – параметр, характеризующий отношение центробежного ускорения и ускорения свободного падения;

$\varphi$  – угловая координата,  $\lambda(r, \varphi) = 2k\delta_1$ ;

$\nu$  – кинематическая вязкость жидкости;

$\rho$  – плотность жидкости;

$\omega$  – угловая скорость;

$\Omega$  – некоторая произвольная функция;

$\Psi$  – общий интеграл уравнения, определяющего толщину пленки;

$\Psi_1$  и  $\Psi_2$  – интегралы характеристической системы уравнений.

Известно, что получение сухих бактериальных препаратов проводится в несколько этапов, одним из которых является концентрирование растворов, содержащих биологическую культуру. При этом режим процесса должен быть щадящим с тем, чтобы, с одной стороны, не нарушить

условия жизнедеятельности данного термолабильного биообъекта, а с другой, - в достаточной степени технологически эффективным. Эти проблемы, как оказалось, наиболее полно и экономично разрешаются в пленочной аппаратуре, в которой достигается интенсивное взаимодейст-

вие между тонкой пленкой жидкости и потоком газа (пара) или твердой стенкой канала. Обзор работ в этом направлении проведен еще в [1]. В проводимых в ИТТФ НАН Украины опытах по концентрированию биологических растворов применялась такая схема (рис. 1). Плоский диск, наполовину погруженный в раствор, вращается с определенной (обычно, порядка 10 об/мин) угловой скоростью. За счет сил сцепления жидкость увлекается вращающимся диском и растекается тонкой пленкой по его поверхности. Непогруженная часть поверхности диска обдувается теплоносителем, что обеспечивает испарение жидкости и, следовательно, повышение концентрации биокультуры в растворе. Оптимальные условия процесса в значительной степени определяются толщиной пленки, которая, очевидно, зависит и от силы тяжести, и от скорости вращения диска, т.е., рассматриваемая задача является трехмерной.

Заметим, далее, что, как показали исследования [2-5], характер течения жидкости в пленке может быть чисто ламинарным, волновым или турбулентным, причем, последние два режима являются нестационарными. По разным оценкам [2-5] ламинарное течение наблюдается при числах Рейнольдса до 5...12. Выше этих значений и вплоть до  $Re \sim 250$  имеет место волновое течение. В интервале  $250 < Re < 500$  обнаружен переходный от волнового к турбулентному режим, и при  $Re > 500$  течение следует рассматривать как турбулентное.

Ограничимся рассмотрением изотермического случая. В цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$ , жестко связанной с вращающимся против часовой стрелки диском (рис.1), уравнения Навье - Стокса для потока жидкости в установившемся режиме в верхней полуплоскости выглядят следующим образом [6]:

$$\left. \begin{aligned}
 &U \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{V}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} + W \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{V^2}{r} = F_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \\
 &\quad + \nu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \frac{U}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right] \\
 &U \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{V}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} + W \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{UV}{r} = F_\varphi - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial P}{\partial \varphi} + \\
 &\quad + \nu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - \frac{V}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right] \\
 &U \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{V}{r} \frac{\partial W}{\partial \varphi} + W \frac{\partial W}{\partial z} = F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial W}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right] \\
 &\quad \frac{1}{r} \frac{\partial(rU)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0
 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где  $F_r = -g \sin \varphi + \omega^2 r - 2 \omega V$ ,  $F_\varphi = -g \cos \varphi + 2 \omega U$ ,  $F_z = \omega^2 r$ . Выражения  $2 \omega V$  и  $2 \omega U$  – компоненты кориолисового ускорения.

Рассмотрим данную задачу в приближении пограничного слоя [6]. Если провести, как обычно, оценку всех слагаемых, входящих в уравнения Навье – Стокса, полагая, что  $U \sim V \sim W \sim u_0$ ,  $r \sim R$ ,  $z \sim \delta$ , то из уравнения непрерывности

следует, что  $W \sim u_0 \delta / R$ . Очевидно,  $\delta \ll R$ . Тогда третье уравнение в (1) переписывается [6] как  $-\rho^{-1} \partial P / \partial z + \omega^2 r = 0$ . Пренебрегая влиянием поверхностных сил на границе раздела газ-жидкость (т.е.  $P = P_0$  при  $z = \delta$ ), находим, что  $P - P_0 = \rho \omega^2 r (z - \delta) = \rho \omega^2 R r^* \delta_0 (z^* - \delta / \delta_0)$  и  $\delta = \delta(r, \varphi)$ . Оценим эту разность. При

$\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$ ,  $R = 0,5 \text{ м}$ ,  $\delta_0 \sim 10^{-4} \text{ м}$  и  $\omega = \pi/3 \text{ с}^{-1}$  (10 об/мин)  $P - P_0 \sim 5 \cdot 10^{-2} \text{ Па}$ . Увеличение  $\omega$  до  $\sqrt{g/R} \sim 4,5 \text{ с}^{-1}$  повышает  $P - P_0$  до 1 Па. В свою очередь, если  $\delta_0$ , например, порядка  $10^{-3} \text{ м}$ , то  $P - P_0 \sim 5 \cdot 10^{-1} \text{ Па}$  при тех же значениях остальных параметров. Порядок величин  $\partial P/\partial r^*$  и  $\partial P/\partial \varphi$  также не превышает 2 Па при  $\omega \sim 4,5 \text{ с}^{-1}$ . Таким образом, перепад давления по толщине пленки невелик, и величины  $\partial P/\partial r^*$  и  $\partial P/\partial \varphi$  в нулевом по  $\delta_0/R$  приближении могут в уравнениях не учитываться. Наконец, нетрудно показать, что все слагаемые в первых двух уравнениях (1) слева одного порядка и, поскольку в переменных  $r^*$  и  $z^*$  вся левая часть умножается на коэффициент  $\delta_0/R \sim 10^{-4}$ , то она может быть опущена. Уравнение же непрерывности (последнее уравнение в (1)) остается без изменений. Тогда, опуская звездочки у переменных, перепишем (1) как (для определения  $U$  и  $V$  в третьем уравнении нет необходимости):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} &= \frac{\delta_0^2}{\nu} \left[ -\omega^2 R r + 2\omega V + g \sin \varphi \right] \\ \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} &= \frac{\delta_0^2}{\nu} \left[ -2\omega U + g \cos \varphi \right] \\ \frac{\delta_0}{R} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial(rU)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right] + \frac{\partial W}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Система граничных условий выбирается в виде:

$$\left. \begin{aligned} U(r, \varphi, 0) = V(r, \varphi, 0) &= 0, \\ \partial U(r, \varphi, \delta_1)/\partial z = \partial V(r, \varphi, \delta_1)/\partial z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2')$$

Решение же (2) и (2') выглядит как

$$V = C_1 R(z) + C_2 Q(z), \quad U = C_1 Q(z) - C_2 R(z), \quad (3)$$

$$R(z) = -1 + \alpha(z) + y\gamma(z) - x\mu(z),$$

$$Q(z) = \beta(z) - y\mu(z) - x\gamma(z), \quad C_1 = -f_2(r, \varphi, \omega)/f_1(\omega),$$

$$C_2 = g \cos \varphi / 2\omega, \quad f_1(\omega) = 4\omega^2 \delta_0^4 \nu^{-2},$$

$$f_2(r, \varphi, \omega) = 2\omega \delta_0^4 \nu^{-2} \left[ \omega^2 R r - g \sin \varphi \right],$$

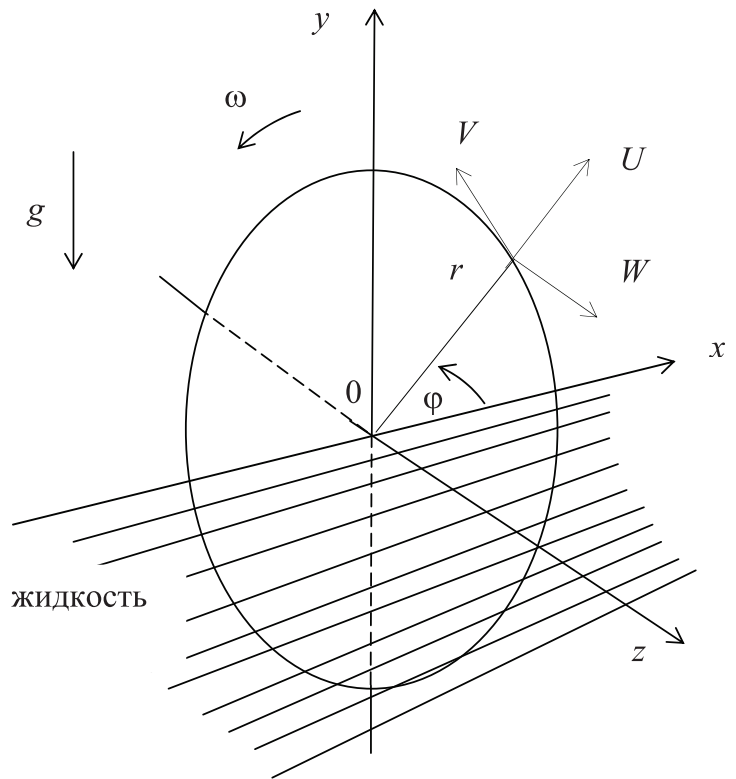


Рис. 1. Схема опыта

$$\alpha(z) = \text{ch } k z \cos k z, \quad \beta(z) = \text{sh } k z \sin k z,$$

$$\gamma(z) = \text{ch } k z \sin k z, \quad \mu(z) = \text{sh } k z \cos k z,$$

$$x = \frac{\alpha_1 \mu_1 + \gamma_1 \beta_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} = \frac{\text{sh } 2 k \delta_1}{\text{ch } 2 k \delta_1 + \cos 2 k \delta_1},$$

$$y = \frac{\alpha_1 \gamma_1 - \mu_1 \beta_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} = \frac{\sin 2 k \delta_1}{\text{ch } 2 k \delta_1 + \cos 2 k \delta_1}, \quad \alpha_1 = \alpha(\delta_1),$$

$$\beta_1 = \beta(\delta_1), \quad \gamma_1 = \gamma(\delta_1), \quad \mu_1 = \mu(\delta_1), \quad k = \sqrt{\omega/\nu} \delta_0,$$

$\delta_1 = \delta/\delta_0$ . Таким образом, уравнения (3) определяют поле скоростей по толщине пленки.

Анализ решений (3) показывает, что, например, при  $r = 1$ ,  $\delta_1 = 1$ ,  $\delta_0 = 10^{-4} \text{ м}$ ,  $\omega = \pi/3 \text{ с}^{-1}$  величина  $U(z)$  отрицательна на всем интервале изменения  $\varphi$  от некоторого  $\varphi_0$  до  $\pi - \varphi_0$ , и наибольшее ее абсолютное значение, не превышающее, как и у  $V(z)$ ,  $5 \cdot 10^{-2} \text{ м/с}$ , достигается при  $\varphi = \pi/2$ . Окружная скорость положительна в первом квадранте, отрицательна во втором и  $V(z) = 0$  при  $\varphi = \pi/2$ . Такое поведение компонен-

тов скорости вполне объяснимо, если учесть значения и направления проекций массовых сил на оси координат (см.(1)) Увеличение  $\omega$ , например, в 20 раз приводит к тому, что и  $U(z)$ , и  $V(z)$  существенно положительны на всем интервале значений  $\varphi$ , так как тогда  $\omega^2 R \sim 200 \text{ м/с}^2 \gg g$ , и при этом абсолютные величины скоростей возрастают тоже примерно на порядок. Предельное же значение угла  $\varphi_0$  находится из выражения  $U(\delta_1, \varphi_0) = 0$ , и  $\varphi_0 \sim 0,065 = 3,7^\circ$ , если  $\omega = \pi/3 \text{ с}^{-1}$  и  $r = 1$ . Заметим также, что при этих углах скорость  $V > U$  более, чем на порядок.

Если, далее, оценивать значение  $Re$  по толщине пленки, то  $Re = u_0 \delta_0 / \nu \sim 5 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-4} / 10^{-6} = 5$ , так как  $u_0 \sim 5 \cdot 10^{-2} \text{ м/с}$  при  $\omega = \pi/3 \text{ с}^{-1}$  и для водных растворов  $\nu = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ . При этих  $Re$  по [2]-[5] течение в пленке ламинарное. Это и оправдывает предпринятый подход к описанию данного процесса. В то же время, если  $\omega \sim 20 \text{ с}^{-1}$ , или  $\delta_0 \sim 10^{-3} \text{ м}$ , то  $Re > 100$ , что уже ставит под сомнение правильность выбранного приближения.

Для определения  $\delta$  необходимо, помимо (1)-(3), еще одно уравнение. Из кинематических соображений ясно, что в установившемся режиме на свободной поверхности пленки

$$W|_{z=\delta} = \frac{d\delta}{dt}|_{z=\delta} = \frac{\partial \delta}{\partial r} \frac{dr}{dt} + \frac{\partial \delta}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{dt} = U|_{z=\delta} \frac{\partial \delta}{\partial r} + \frac{1}{r} V|_{z=\delta} \frac{\partial \delta}{\partial \varphi}, \quad (4)$$

так как  $dr/dt = U$ ,  $d\varphi/dt = V/r$ . Кроме того, из третьего уравнения (2) следует

$$W|_{z=\delta} = -\frac{1}{r} \int_0^\delta \frac{\partial(Ur)}{\partial r} dz - \frac{1}{r} \int_0^\delta \frac{\partial V}{\partial \varphi} dz. \quad (5)$$

Приравнявая (4) и (5), после некоторых преобразований находим, что

$$\frac{\partial}{\partial r} \int_0^{\delta(r,\varphi)} (Ur) dz + \frac{\partial}{\partial \varphi} \int_0^{\delta(r,\varphi)} V dz = 0. \quad (6)$$

Тогда из (4)-(6) следует уравнение для определения  $\delta_1$ :

$$(y-x)\omega R r = r \left[ \frac{C_1}{2k} \frac{\partial(y-x)}{\partial \delta_1} - C_2 \left( -1 + \frac{1}{2k} \frac{\partial(y+x)}{\partial \delta_1} \right) \right] \frac{\partial \delta_1}{\partial r} + \left[ C_1 \left( -1 + \frac{1}{2k} \frac{\partial(y+x)}{\partial \delta_1} \right) + \frac{C_2}{2k} \frac{\partial(y-x)}{\partial \delta_1} \right] \frac{\partial \delta_1}{\partial \varphi}. \quad (7)$$

Здесь функции  $y-x$ ,  $y+x$ ,  $C_1$  и  $C_2$  задаются формулами (3).

Уравнение (7) – существенно нелинейное. Упростим его, замечая, что для скоростей вращения  $\omega < \sqrt{g/R}$  и  $\delta_0 \sim 10^{-4} \text{ м}$  величина  $\lambda(r, \varphi) = 2 k \delta_1 \sim 0,1$ . Поэтому, раскладывая функции  $y-x$  и  $y+x$  в ряд по степеням  $\lambda$  и пренебрегая слагаемыми, пропорциональными  $\lambda^2$ , из (7) имеем:

$$\omega R r \lambda(r, \varphi) = 3r C_1 \frac{\partial \lambda(r, \varphi)}{\partial r} + 3C_2 \frac{\partial \lambda(r, \varphi)}{\partial \varphi}. \quad (8)$$

Можно показать, что (8) соответствует приближению, когда в (1) и (2) пренебрегается кориолисовыми ускорениями. Действительно, тогда

$$U = k^2 C_1 (z^2 - 2z\delta_1), \quad V = k^2 C_2 (z^2 - 2z\delta_1). \quad (9)$$

Подставляя (9) в (6), приходим к (8). В этой связи возникает вопрос о степени соответствия уравнений (3) и (9). Как оказалось, различие между  $U$ , вычисленной по (3) и (9), не существенно в области значений  $\varphi$ , когда  $\varphi_0 < \varphi < \pi - \varphi_0$ . Здесь относительная погрешность не превышает в лучшем случае 10%. В областях же  $0 < \varphi < \varphi_0$  и  $\pi - \varphi_0 < \varphi < \pi$  ошибка велика и может достигать 50%, хотя по порядку величины скорости одинаковы. Значения для  $V$  по (3) и (9) полностью совпадают. Но угол  $\varphi_0$  невелик (см. выше). Это и дает основание использовать для расчета  $\delta$  уравнение (8).

В переменной  $\delta$  характеристическая система уравнений, соответствующая (8), выглядит [7] как

$$\begin{aligned} dr/dt &= 3r C_1, \quad d\varphi/dt = 3C_2, \\ d\delta(r, \varphi)/dt &= \omega R r \delta(r, \varphi). \end{aligned} \quad (10)$$

Тогда интегралы (10)  $\psi_1$  и  $\psi_2$  имеют [7] вид:

$$\psi_1 = (r \cos \varphi)^{-1} + \varepsilon \operatorname{tg} \varphi, \quad \psi_2 = (r \delta^{3/2} (r, \varphi) \cos \varphi)^{-1},$$

$$\varepsilon = \omega^2 R / g. \quad (11)$$

В соответствии с теорией [7] общий интеграл (8)  $\psi$  есть некоторая произвольная функция  $\Omega$ , аргументами которой есть интегралы  $\psi_1$  и  $\psi_2$ :

$$\psi (r, \varphi, \delta(r, \varphi)) = \Omega (\psi_1, \psi_2). \quad (12)$$

Решение же для  $\delta(r, \varphi)$  находится [7] из требования  $\psi (r, \varphi, \delta(r, \varphi)) = 0$ . Вид функции  $\Omega$  определяется [7] с помощью начального условия  $\delta|_{\varphi=0} = f(r)$ . Применяя методику, предложенную в [7], находим, что, если  $\psi (r, \varphi, \delta(r, \varphi))$  определить как

$$\psi (r, \varphi, \delta(r, \varphi)) = \Omega (\psi_1, \psi_2) =$$

$$= \psi_1 \cdot (\psi_2)^{-1} - f \left( (\psi_1)^{-1} \right), \quad (13)$$

то найденная  $\delta(r, \varphi)$  из  $\psi (r, \varphi, \delta(r, \varphi)) = 0$  будет удовлетворять уравнению (8) и начальному условию  $\delta|_{\varphi=0} = f(r)$ . Поэтому

$$\delta(r, \varphi) = (1 - \varepsilon r \sin \varphi)^{-2/3} \cdot f \left( \frac{r \cdot \cos \varphi}{1 - \varepsilon r \sin \varphi} \right). \quad (14)$$

Подстановка (14) в (8) показывает, что (14) есть решение (8). Остается найти функцию  $f(r)$ .

$$\delta(r, \varphi) = \sqrt[3]{\frac{6 v^2 \operatorname{Re}}{\left[ \sqrt{\omega^4 R^2 + g^2} + \frac{g^2}{\omega^2 R} \operatorname{arsh} \frac{\omega^2 R}{g} \right] (1 - \varepsilon r \sin \varphi)^2}} \cdot \operatorname{Re}^{1/3} = \varphi^{1/3} (\omega) \operatorname{Re}^{1/3}. \quad (17)$$

Здесь  $\varphi(\omega)$  – подкоренное выражение в (17). При  $\omega \rightarrow 0$  (17) переходит в  $\delta = \sqrt[3]{3v^2 \operatorname{Re}/g}$  – известное [2] уравнение для толщины вертикально стекающей пленки.

Рис. 2-4 демонстрируют поведение функции (17) в разных условиях. В частности, на рис. 2 приведена зависимость  $\delta(r)$  при  $\omega = \pi/3 \text{ с}^{-1}$ ,

Для определения ее вида необходимо знание поля скоростей жидкости в нижней полуплоскости диска. Однако такая задача может быть решена только численно, поскольку даже в приближении пограничного слоя нелинейными членами в (1) пренебрегать нельзя, так как его толщина заметно больше, чем  $10^{-4}$  м, по меньшей мере, для таких скоростей вращения. Будем поэтому оперировать понятиями о средних значениях толщины пленки (полагая, что  $f(r) = \delta_0$  – постоянная величина) и средней результирующей  $\bar{U}$  скорости жидкости на плоскости  $(r, \varphi)$  при  $\varphi = 0$ , которая определяется, очевидно, как

$$\bar{U} = (\delta_0 R)^{-1} \int_0^R dr \int_0^{\delta_0} \sqrt{(U^*)^2 + (V^*)^2} dz,$$

$$U^* = U|_{\varphi=0}, \quad V^* = V|_{\varphi=0}, \quad (15)$$

где осреднение проводится и по толщине пленки, и по радиальной координате. Подставляя разложенные в ряд по степеням  $k z$  функции  $U^*$  и  $V^*$  в (15) и разрешая затем полученное выражение относительно  $\delta_0$ , получим, что

$$\delta_0 = \sqrt[3]{\frac{6 v^2 \operatorname{Re}}{\sqrt{\omega^4 R^2 + g^2} + \frac{g^2}{\omega^2 R} \operatorname{arsh} \frac{\omega^2 R}{g}}},$$

$$\operatorname{Re} = \bar{U} \delta_0 v^{-1}. \quad (16)$$

Таким образом, уравнение (14) с учетом (16) переписывается как

$\operatorname{Re} = 10$  и значениях  $\varphi$  в  $\pi/10, \pi/4, \pi/2$  и  $2\pi/3$  радиан. Можно видеть, что  $\delta(r)$  с ростом  $r$  возрастает, и наибольшее ее значение достигается при  $r = 1$ . Увеличение  $\varphi$  (рис. 3) также приводит к росту  $\delta$ , но только в первой четверти, и ее максимум достигается при  $\varphi = \pi/2$ , после чего  $\delta$  убывает. Рис. 4 дает представление о поведении  $\delta(\omega)$



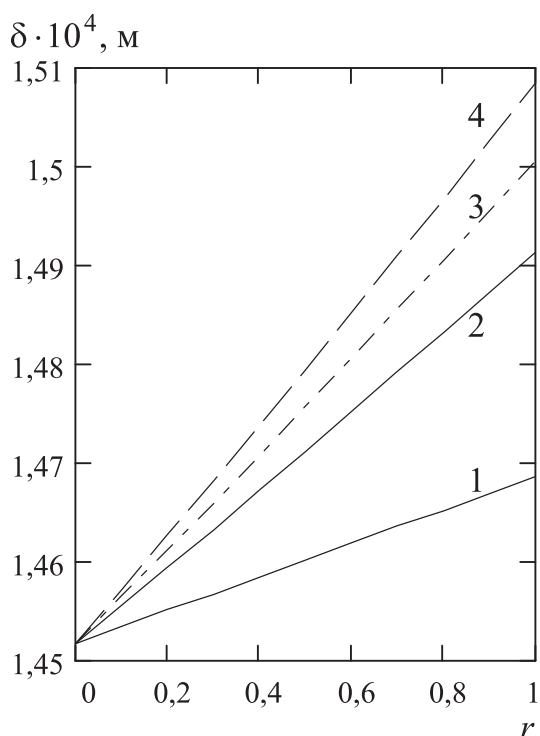


Рис. 2. Поведение  $\delta(r)$  при  $Re = 10$ ,  $\omega = \pi/3 \text{ c}^{-1}$ :  
 1 –  $\varphi = \pi/10$ , 2 –  $\varphi = \pi/4$ , 3 –  $\varphi = \pi/2$ ,  
 4 –  $\varphi = 2\pi/3$ .

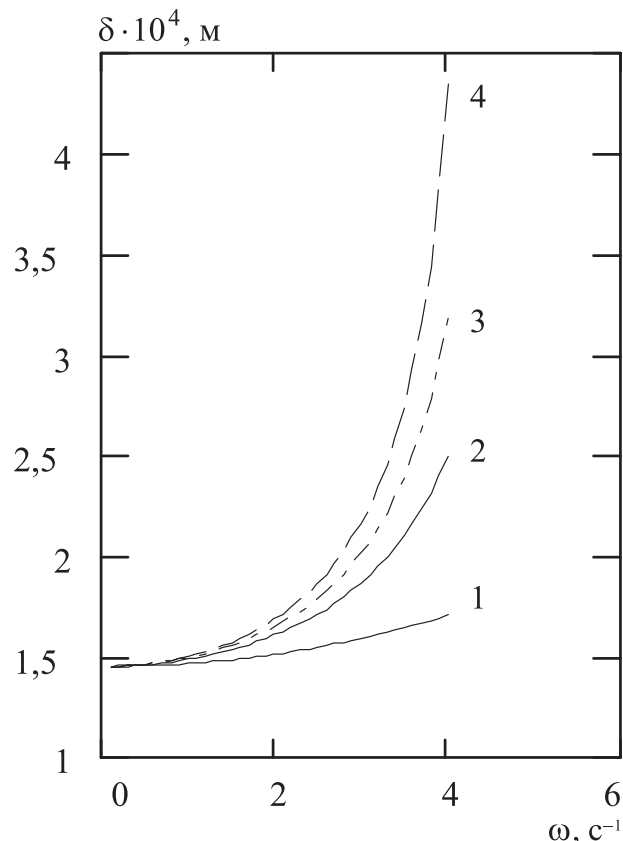


Рис. 4. Изменение  $\delta(\omega)$  при  $r = 1$ ,  $Re = 10$ :  
 1 –  $\varphi = \pi/10$ , 2 –  $\varphi = \pi/4$ , 3 –  $\varphi = \pi/2$ ,  
 4 –  $\varphi = 2\pi/3$ .

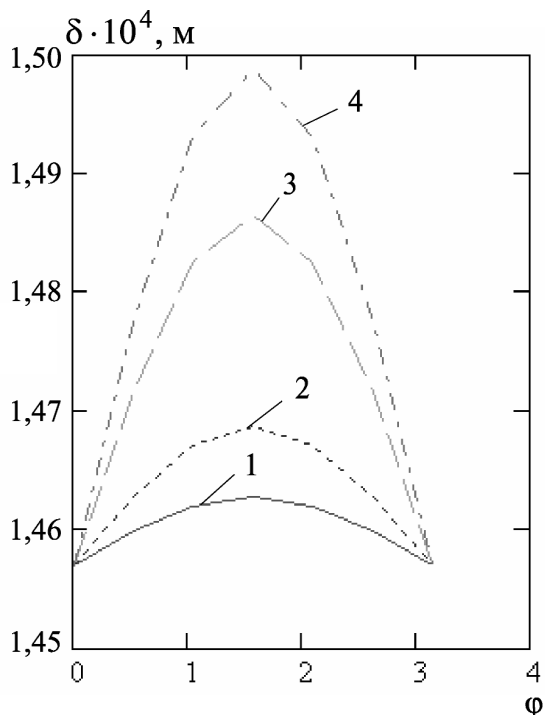


Рис. 3. Изменение  $\delta(\varphi)$  при  $Re = 10$ ,  $\omega = \pi/3 \text{ c}^{-1}$ :  
 1 –  $r = 0,1$ , 2 –  $r = 0,2$ , 3 –  $r = 0,5$ , 4 –  $r = 0,7$ .

при изменении  $\omega$  в пределах  $0,1 \text{ c}^{-1} \leq \omega \leq 4 \text{ c}^{-1}$ . Видно, что с ростом  $\omega$  возрастает также и  $\delta(\omega)$ , причем, если  $\omega \rightarrow \sqrt{g/R}$ , то при  $r = 1$  имеет место значительный рост  $\delta(\omega)$ , т.е.  $\delta(\omega) \rightarrow \infty$ . Это видно и из формулы (17). Такой эффект в литературе [3] известен как “захлебывание” аппарата.

В заключение заметим, что для экспериментальной проверки зависимости (17) необходимы, кроме сведений о скорости вращения диска, еще и данные о значении средней скорости движения жидкости, поскольку в соответствии с (16) число  $Re$  является также функцией  $\omega$ . Но уравнение (17) позволяет установить верхнюю границу толщины пленки, учитывая, что данное приближение справедливо при  $Re \leq 12$ , а именно:  $\delta(r, \varphi) \leq \sqrt[3]{12 \varphi(\omega)}$ .

### Выводы

1. В предположении ламинарного характера течения установлено поле его скоростей в

пленке жидкости. Показано, что толщина пленки с ростом радиальной координаты возрастает, и наибольшее ее значение достигается при  $r = 1$ .

2. Зависимость толщины пленки от угловой координаты носит симметричный характер относительно прямой  $\varphi = \pi/2$  с максимумом в этой точке.

3. С ростом  $\omega$  толщина пленки возрастает, достигая максимума при  $\omega = \sqrt{g/R}$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Пленочная тепло – и массообменная аппаратура* (Процессы и аппараты химической и нефтехимической технологии). / Под редакцией В.М. Оленевского. – Химия, 1988. – 240 с.

2. *Бояджиев Х., Бешков В.* Массоперенос в движущихся пленках жидкости: Пер. с английского. – М.: Мир, 1988. – 136 с.

3. *Холпанов Л.П., Шкадов В.Я.* Гидродинамика и теплообмен с поверхностью раздела. – М.: Наука, 1990. – 271 с.

4. *Е.А. Селезнева, Г.В. Рябчук.* Абсорбция газа пленкой жидкости на поверхности вращающегося плоского диска. // Химия и химическая технология. – 2003. – Т.46, вып. 4. – С. 55–58.

5. *Grcenveld P/* Withdrawal of power law fluid films. // Chem. Eng. Sci. – 1970. – V.25, № 10. – P. 1579–1585.

6. *Гинзбург И.П.* Теория сопротивления и теплопередачи. – Изд-во ЛГУ им. А.А. Жданова, 1970. – 376 с.

7. *Камке Э.* Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. – М.: Наука, 1966. – 260 с.

*Получено 29.09.2006 г.*