

В. Л. Поляков

## О взаимодействии между неструктурными частицами при внутренней суффозии в увлажняемом несвязном грунте

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А. Я. Олейником)

*A mathematical model of hydrodynamical deformations of cohesiveless soils is generalized taking the interaction between moving particles into account. Based on the sedimentation models of suspended particles under hindered conditions, an expression is developed for the interaction function in porous media. An analysis of the effect of the given factor on deformation characteristics is performed.*

Как известно [1, 2], мобилизованные под действием гидродинамической силы неструктурные частицы суффозионного грунта могут транспортироваться жидкостью или к границам области движения (контуры разгрузки, дренажные устройства) с последующим их удалением (внешняя суффозия), или вглубь грунта с перераспределением и накоплением на отдельных участках фильтрационного потока (внутренняя суффозия). Вынос суффозионных частиц способствует постепенному снижению их содержания в области деформаций. А так как исходное количество неструктурного вещества в природных пористых средах обычно невелико, то взаимодействие между подвижными частицами при внешней суффозии оказывается минимальным и может не приниматься во внимание. Иная картина наблюдается при внутренней суффозии, когда образуется аккумулирующая зона с их повышенным содержанием [3]. Тогда частые контакты между движущимися частицами способны стать значимым фактором для деформационного и фильтрационного процессов, а их равномерное перемещение во взаимосвязанных порах благодаря трем основным силам — фильтрационной  $F_h$ , а также противодействующим и уравнивающим ее силам трения о скелет  $F_f$  и внутреннего взаимодействия  $F_i$ . Анализ механической обстановки в суффозионных грунтах, деформируемых при работе дрен-осушителей, позволил, опираясь на первые две силы и их известные представления, разработать и обосновать математическую модель деформаций при низком содержании взвеси [4]. Что касается третьей силы, то она применительно к пористым средам до сих пор не изучалась ввиду сложности и выделения ее из системы сил, и измерения.

Поэтому ниже предлагается косвенный путь определения  $F_i$ , базирующийся на результатах экспериментальных и теоретических исследований осаждения взвешенных частиц в неподвижной жидкости (отстойниках при водоочистке). Следует подчеркнуть, что в литературе приводятся многочисленные формулы для расчета разделения суспензий седиментацией в неограниченной и ограниченной жидкостях, которые выражают зависимость между их скоростью и концентрацией [5–7]. Большинство из них легко преобразовать и представить в форме связи между скоростями стесненного  $u_c$  и свободного  $u_f$  осаждения, т. е. с учетом и без учета взаимного влияния подвижных частиц,

$$u_c = u_f g(m), \quad (1)$$

где  $m$  — объемная концентрация взвеси. В вышеупомянутых аппаратах массовое осаждение частиц осуществляется, по существу, при сохранении баланса между результирующей  $F_{gl}$  сил тяжести  $F_g$ , Архимеда  $F_l$  и силами сопротивления  $F_r$ ,  $F_i$  ( $F_i$  можно трактовать в данных условиях как дополнительную силу сопротивления). Очевидно, что силы сопротивления, рассчитанные с позиций стесненного и свободного осаждения, должны быть равны результирующей  $F_{gl}$  и равны между собой. Поэтому в рамках Стоксова приближения можно составить равенство

$$3\pi d_c \mu u_f = 3\pi d_c \mu u_c + F_i, \quad (2)$$

где  $d_c$  — (эквивалентный) радиус частиц;  $\mu$  — динамическая вязкость. Вообще нижней границей диапазона чисел Рейнольдса, характерных для фильтрации в деформируемых несвязных грунтах с однородной суффозионной компонентой, является значение

$$\text{Re}_k = \frac{u_k d_c}{\nu} = \frac{k_0 I_k d_c}{n_0 \nu}. \quad (3)$$

Здесь  $u_k$ ,  $I_k$  — критические средняя скорость в порах и градиент напора [8, 9];  $\nu$  — кинематическая вязкость;  $k_0$ ,  $n_0$  — коэффициент фильтрации и пористость недеформированного грунта. Так как  $\nu \sim 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с,  $I_k \sim 10^{-1}$ ,  $k_0 \sim 10^{-4}$  м/с,  $d_c \sim 10^{-3}$  м, то  $\text{Re}_k$  даже для крупнозернистых песков будет порядка  $10^{-2}$ , что и оправдывает применение закона Стокса даже в задачах с осевой и радиальной симметрией.

Из (2) прежде всего следует, что

$$F_i = 3\pi d_c \mu m (u_f - u_c). \quad (4)$$

Тогда отношение между силами сопротивления будет иметь вид

$$\frac{F_i}{F_r} = \frac{u_f - u_c}{u_c} = \frac{1 - g(m)}{g(m)}, \quad (5)$$

а значит, их сумма составит  $F_r + F_i = F_r/g(m)$ . Так как в пористой среде роль силы сопротивления  $F_r$  играет сила трения  $F_f$ , то, согласно (5), получается, что

$$F_h = \frac{F_f}{g(m)}. \quad (6)$$

Силы  $F_h$ ,  $F_f$  при линейной фильтрации пропорциональны разности между действительными средними скоростями в порах жидкости  $u$  и частиц  $u_c$ , а также критической  $u_k$  [1]. Коэффициенты же пропорциональности зависят от геометрии порового пространства, физических свойств жидкости и совпадают. Поэтому из (6) вытекает, что указанные скорости связаны соотношением

$$u_c = u - \frac{u_k}{g(m)}. \quad (7)$$

С учетом (7) система уравнений неразрывности для жидкости и суффозионных частиц принимает вид [10]

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}(nu), \quad (8)$$

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ m \left( u - \frac{u_k}{g(m)} \right) \right], \quad (9)$$

где  $n$  — текущая пористость, координатная ось с началом на поверхности грунта направлена вверх. Интенсивное промачивание грунта обусловлено нисходящим насыщенным (или почти насыщенным) потоком жидкости за счет инфильтрации переменной интенсивностью  $\varepsilon$ . Тогда из (8), (9), имея в виду  $n = 1 - m_s - m$ , несложно получить

$$(1 - m_s)u - \frac{u_k m}{g(m)} = \varepsilon(t), \quad (10)$$

где  $m_s$  — объемная концентрация структурных частиц. Наконец, уравнение массопереноса в безразмерной форме относительно концентрации  $\bar{m}$  следует из (9), (10)

$$\frac{\partial \bar{m}}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[ \bar{m} \left( \tilde{\varepsilon} - \frac{1 - \beta \bar{m}}{g(\bar{m})} \right) \right], \quad (11)$$

где

$$\bar{m} = \frac{m}{m_0}, \quad \bar{t} = \frac{u_k t}{Z_0}, \quad \bar{z} = \frac{z}{Z_0}; \quad \tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{u_k(1 - m_s)}, \quad \beta = \frac{m_0}{1 - m_s},$$

$Z_0$  — линейный масштаб.

Теперь математическую задачу внутренней суффозии для промачиваемого грунта с учетом взаимодействия подвижных частиц можно сформулировать следующим образом:

$$\frac{\partial \bar{m}}{\partial \bar{t}} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \varphi(\bar{m}, \bar{t}) = 0, \quad (12)$$

$$\bar{z} = \bar{z}_*, \quad \frac{\bar{m}}{g(\bar{m})} = \frac{\tilde{\varepsilon}(\bar{t})}{1 - \beta}. \quad (13)$$

Здесь  $\varphi = \tilde{\varepsilon} \bar{m} - (\bar{m} - \beta \bar{m}^2)/g(\bar{m})$ ;  $\bar{z}_* = z_*/Z_0$ ,  $z_*$  — глубина фронта промачивания, условие (13) обосновывается в [10]. Строгое решение задачи (12), (13) строится методом характеристик. Характеристическая система имеет вид

$$\frac{d\bar{z}}{d\bar{t}} = -\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{m}}(\bar{m}, \bar{t}), \quad \frac{d\bar{m}}{d\bar{t}} = 0. \quad (14)$$

Выражение для искомой интегральной кривой находится в параметрической форме, а параметры задачи  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  в соответствии с (13) связаны между собой таким образом:

$$\eta = \frac{1}{1 - \beta} \int_0^{\xi} \tilde{\varepsilon}(\tau) d\tau, \quad \frac{\zeta}{g(\zeta)} = \frac{\tilde{\varepsilon}(\xi)}{1 - \beta}. \quad (15)$$

В итоге для расчетов величины  $\bar{m}$  предлагаются зависимости

$$\frac{\bar{m}}{g(\bar{m})} = \frac{\tilde{\varepsilon}(\xi)}{1 - \beta}, \quad (16)$$

$$\bar{z} = \frac{1}{1-\beta} \int_0^{\xi} \tilde{\varepsilon}(\tau) d\tau + \int_{\xi}^{\bar{t}} \tilde{\varepsilon}(\tau) d\tau + G(\bar{m})(\bar{t} - \xi), \quad (17)$$

где

$$G(\bar{m}) = \bar{m}(1 - \beta\bar{m}) \frac{g'(\bar{m})}{g^2(\bar{m})} - \frac{1 - 2\beta\bar{m}}{g(\bar{m})}.$$

В распространенном случае  $\varepsilon = \varepsilon_0 = \text{const}$  из (16), (17) получается

$$\frac{\bar{m}}{g(\bar{m})} = \frac{\tilde{\varepsilon}_0}{1 - \beta}. \quad (18)$$

Относительная же глубина верхней границы аккумулирующей зоны  $\bar{z}_m$  находится на основе баланса суффозионных частиц в пределах области деформаций (увлажнения), а именно:

$$\int_{-\bar{z}_*}^{-\bar{z}_m} \bar{m} d\bar{z} = \bar{z}_*, \quad (19)$$

так что

$$\bar{z}_m = \bar{z}_* \frac{\bar{m} - 1}{\bar{m}}. \quad (20)$$

В практике расчетов осаднения взвесей широко используется следующая формула [6]:

$$u_c = u_f e^{-\alpha m}. \quad (21)$$

Следовательно, свободное осаднение, согласно (21), реализуется только в пределе при  $m \rightarrow 0$ . В разработанных же моделях фильтрационных деформаций полагалось, что взаимодействие между мобильными частицами отсутствует или присутствует лишь в качестве составляющей  $F_f$  при  $\bar{m} = 1$ . Поэтому с учетом (21) функцию  $g$  следует представить в виде

$$g(\bar{m}) = e^{-\bar{\alpha}(\bar{m}-1)}, \quad (22)$$

где  $\bar{\alpha} = m_0\alpha$ . Тогда вспомогательные функции будут

$$\varphi = \bar{m}[\tilde{\varepsilon} - (1 - \beta\bar{m})e^{-\bar{\alpha}(\bar{m}-1)}], \quad (23)$$

$$G = [\bar{\alpha}\beta\bar{m}^2 + (2\beta - \bar{\alpha})\bar{m} - 1]e^{-\bar{\alpha}(\bar{m}-1)}. \quad (24)$$

При  $\tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}_0$  из (18), (20) следуют расчетные уравнения

$$\bar{m}e^{\bar{\alpha}(\bar{m}-1)} = \frac{\tilde{\varepsilon}_0}{1 - \beta}, \quad (25)$$

$$\bar{z}_m = \frac{\tilde{\varepsilon}_0 \bar{t}}{1 - \beta} \left(1 - \frac{1}{\bar{m}}\right). \quad (26)$$

В другом интересном для практики случае интенсивность  $\varepsilon$  возрастает со временем по линейному закону, так что

$$\tilde{\varepsilon} = \lambda_0 + \lambda_1 \bar{t}. \quad (27)$$

Таким образом, согласно (16), (22) и (27),

$$\xi(\bar{m}) = \frac{1}{\lambda_1} [(1 - \beta) \bar{m} e^{\bar{\alpha}(\bar{m}-1)} - \lambda_0], \quad (28)$$

$$G(\bar{m}) = e^{\bar{\alpha}(\bar{m}-1)} [\bar{\alpha} \beta \bar{m}^2 + (\bar{\alpha} - 2\beta) \bar{m} - 1] \quad (29)$$

и основная расчетная зависимость принимает вид

$$\bar{z} = \frac{\beta}{1 - \beta} \left[ \lambda_0 \xi(\bar{m}) + \frac{\lambda_1}{2} \xi^2(\bar{m}) \right] + \lambda_0 \bar{t} + \frac{\lambda_1}{2} \bar{t}^2 + G(\bar{m}) [\bar{t} - \xi(\bar{m})]. \quad (30)$$

Чтобы найти глубину  $\bar{z}_m$  как функцию от относительного времени, в первую очередь устанавливается изменение на этой границе концентрации  $\bar{m}_m = \bar{m}(-\bar{z}_m, \bar{t})$  в результате решения уравнения

$$\int_{\bar{m}_*}^{\bar{m}_m} \bar{m} \left\{ \left[ \frac{\beta \lambda_0}{1 - \beta} + \frac{\beta \lambda_1 \xi(\bar{m})}{1 - \beta} - G(\bar{m}) \right] \frac{d\xi}{d\bar{m}} + (\bar{t} - \xi(\bar{m})) \frac{dG}{d\bar{m}} \right\} d\bar{m} = \frac{2\lambda_0 \bar{t} + \lambda_1 \bar{t}^2}{2(1 - \beta)}, \quad (31)$$

где

$$\frac{d\xi}{d\bar{m}} = \frac{1 - \beta}{\lambda_1} (1 + \bar{\alpha} \bar{m}) e^{\bar{\alpha}(\bar{m}-1)},$$

$$\frac{dG}{d\bar{m}} = [2\beta - 2\bar{\alpha} + (4\bar{\alpha}\beta - \bar{\alpha}^2) \bar{m} + \bar{\alpha}^2 \beta \bar{m}^2] e^{\bar{\alpha}(\bar{m}-1)}.$$

Относительная концентрация на фронте увлажнения  $\bar{m}_* = \bar{m}(-\bar{z}_*)$  вычисляется из уравнения

$$\bar{m}_* e^{\bar{\alpha}(\bar{m}_*-1)} = \frac{\lambda_0 + \lambda_1 \bar{t}}{1 - \beta}. \quad (32)$$

Затем при известном  $\bar{m}_m$  по (28), (29) находятся  $\xi(\bar{m}_m)$ ,  $G(\bar{m}_m)$  и, наконец, по формуле (30) — положение второй границы аккумулирующей зоны. Итак, указанная зона расположена в пределах от  $-z_*$  до  $-z_m$ , причем

$$\bar{z}_* = \frac{2\lambda_0 \bar{t} + \lambda_1 \bar{t}^2}{2(1 - \beta)}. \quad (33)$$

В принятой обобщенной математической модели увлажнения суффозионного грунта в соответствии с (22) взаимодействие между подвижными частицами контролируется единственным параметром  $\alpha$ . Количественный анализ выполнялся на ряде характерных примеров с целью оценки значимости этого фактора для внутренней суффозии. Поэтому основные деформационные характеристики (относительная концентрация  $\bar{m}$  и глубина  $\bar{z}_m$ ) рассчитывались при изменяющемся в широких пределах коэффициенте  $\bar{\alpha}$ . Показательным здесь

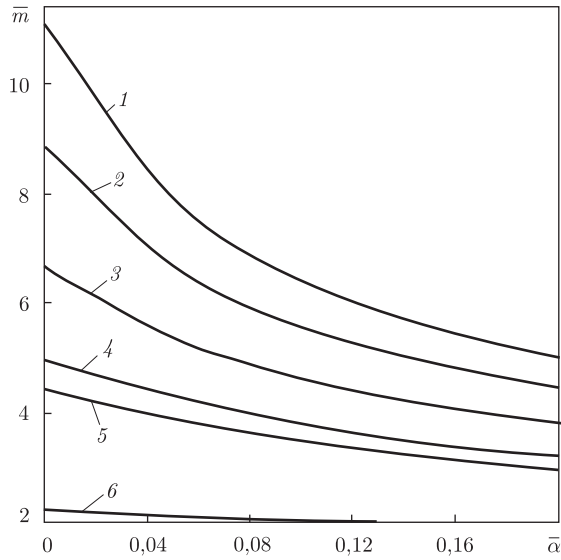


Рис. 1. Графики зависимости  $\bar{m}(\bar{\alpha})$ :

1-3, 5, 6 —  $\beta = 0,1$ ; 4 —  $\beta = 0,2$ ; 1 —  $\tilde{\varepsilon}_0 = 10$ ; 2 —  $\tilde{\varepsilon}_0 = 8$ ; 3 —  $\tilde{\varepsilon}_0 = 6$ ; 4, 5 —  $\tilde{\varepsilon}_0 = 4$ ; 6 —  $\tilde{\varepsilon}_0 = 2$

есть убывание относительной величины  $\bar{m}$  с ростом  $\bar{\alpha}$ , определявшееся при фиксированных характерных значениях  $\tilde{\varepsilon}_0$  по формуле (25). Тем самым обеспечивается равномерное распределение неструктурных частиц в вышеупомянутой зоне. Данные вычислений постоянной по высоте  $\bar{m}$  в зависимости от  $\bar{\alpha}$  при разных значениях  $\beta$ ,  $\tilde{\varepsilon}_0$  представлены на рис. 1 и свидетельствуют об ощутимом снижении накопления мобилизованных частиц даже при незначительном увеличении  $\bar{\alpha}$ , причем в большей степени при интенсивной инфильтрации.

Скорость инфильтрации  $\varepsilon$  в суффозионных грунтах определяет и увлажнительный, и деформационный (суффозионный, кольматационный) процессы. В то же время столкновения подвижных частиц между собой при заданной  $\varepsilon$  отражаются исключительно на деформационных характеристиках и лишь при взаимодействии поверхностных и инфильтрационных вод сказываются на скорости промачивания среды. Для непосредственной оценки вклада силы взаимодействия  $F_i$  в динамику суффозионной компоненты предлагаются рис. 2, 3, где изображены графики зависимостей относительных сокращений концентрации

$$\overline{\Delta m}(\bar{\alpha}) = \frac{m(0) - m(\bar{\alpha})}{m(0)}$$

(рис. 2) и глубины

$$\overline{\Delta z_m}(\bar{\alpha}) = \frac{z_m(0) - z_m(\bar{\alpha})}{z_m(0)}$$

(рис. 3) также в случае  $\varepsilon = \text{const}$ . Здесь

$$\bar{m}(0) = \frac{\tilde{\varepsilon}_0}{1 - \beta}, \quad \bar{z}_m(0) = \frac{\tilde{\varepsilon}_0 \bar{t}}{1 - \beta},$$

$$\overline{\Delta z_m}(\bar{\alpha}) = \frac{\tilde{\varepsilon}_0 - (1 - \beta) \cdot \bar{m}(\bar{\alpha})}{\bar{m}(\bar{\alpha})(\tilde{\varepsilon}_0 - 1 + \beta)}.$$

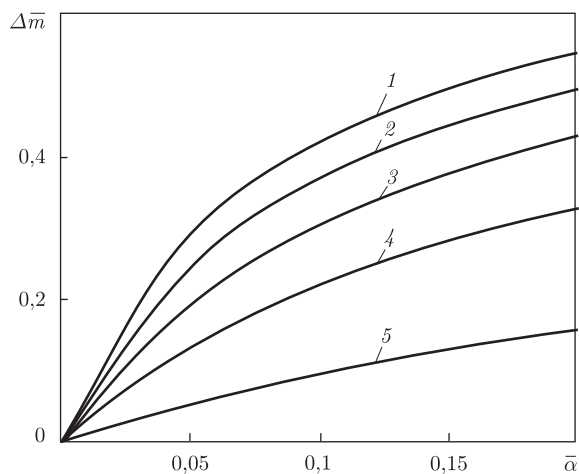


Рис. 2. Графики зависимости  $\overline{\Delta m}(\overline{\alpha})$ :  
 1 —  $\tilde{\varepsilon}_0 = 10$ ; 2 —  $\tilde{\varepsilon}_0 = 8$ ; 3 —  $\tilde{\varepsilon}_0 = 6$ ; 4 —  $\tilde{\varepsilon}_0 = 4$ ;  
 5 —  $\tilde{\varepsilon}_0 = 2$

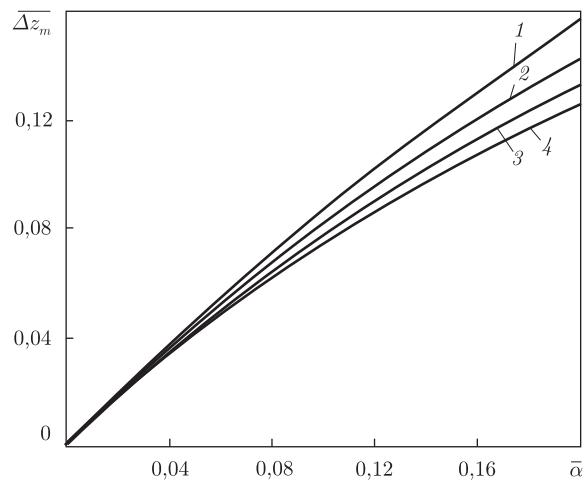


Рис. 3. Графики зависимости  $\overline{\Delta z_m}(\overline{\alpha})$ :  
 1 —  $\tilde{\varepsilon}_0 = 2$ ; 2 —  $\tilde{\varepsilon}_0 = 4$ ; 3 —  $\tilde{\varepsilon}_0 = 6$ ; 4 —  $\tilde{\varepsilon}_0 = 8$

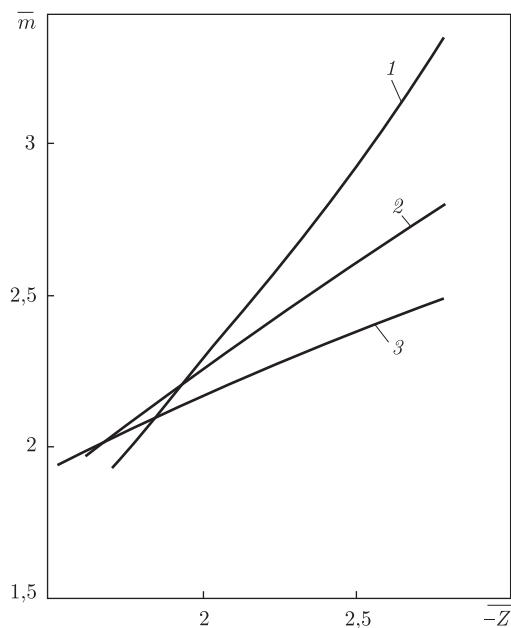


Рис. 4. Профили относительной объемной концентрации подвижных частиц:  
 1 —  $\overline{\alpha} = 0$ ; 2 —  $\overline{\alpha} = 0,1$ ; 3 —  $\overline{\alpha} = 0,2$

При меньших  $\varepsilon_0$  величины  $\overline{m}$  и  $\overline{z}_m$  демонстрируют одинаковую чувствительность к коэффициенту  $\overline{\alpha}$ . Однако с усилением инфильтрации  $\overline{m}$  намного резче реагирует на приращение  $\overline{\alpha}$ , причем это особенно заметно при малых  $\overline{\alpha}$ . Вместе с тем исходное содержание неструктурных частиц слабо отражается на обеих характеристиках. И в заключение по формулам (30)–(34) вычислялись профили концентрации  $\overline{m}(\overline{z})$  на момент  $t = 1$  (рис. 4). В отличие от предыдущих примеров они имеют нетривиальную форму из-за линейного увеличения  $\varepsilon$  (27). Выбраны типичные значения  $\lambda_0 = 2$ ,  $\lambda_1 = 1$ . Семейство профилей получено благодаря дискретному изменению  $\overline{\alpha}$ . В качестве базовой при выяснении роли взаимодей-

ствия между мобильными частицами в суффозионном процессе служит кривая 1, отвечающая  $\alpha = 0$ . Рост инфильтрации не влечет за собой серьезных изменений в поведении кривых  $\bar{m}(\bar{\alpha})$  и  $\bar{z}_m(\bar{\alpha})$ . Действительно, и в более сложных фильтрационных условиях при  $\bar{\alpha} \geq 0,1$  наблюдается ощутимое снижение концентрации подвижных частиц и за счет этого менее значимое уменьшение глубины аккумулирующей зоны (положение ее нижней границы не зависит от  $\alpha$ ).

1. *Дмитриев А. Ф., Хланук Н. Н., Дмитриев Д. А.* Деформационные процессы в несвязных грунтах в придонной зоне и их влияние на работу осушительно-увлажнительных систем. – Ровно: Изд-во РГТУ, 2002. – 145 с.
2. *Кондратьев В. Н.* Фильтрация и механическая суффозия в несвязных грунтах. – Симферополь: Крымиздат, 1958. – 76 с.
3. *Поляков В. Л.* О фильтрационных деформациях грунта с образованием аккумулирующих зон // Прикл. гідромеханіка. – 2003. – **5(77)**, № 2. – С. 45–56.
4. *Хланук М. М.* Математичне моделювання процесу фільтрації в середовищах, де відбувається механічна суффозія // Гідромеліорація та гідротехнічне будівництво. – 1998. – Вип. 23. – С. 92–98.
5. *Cho S. H., Colin F., Sardin M., Prost C.* Settling velocity model of activated sludge // Water Res. – 1993. – **27**, No 7. – P. 1237–1242.
6. *Thomas D. G.* Transport characteristics of suspensions. Relation of hindered settling floc characteristics to rheological parameters // AIChE. – 1963. – **9**. – P. 310–316.
7. *Wilson T. E., Lee J. S.* Comparison of final clarifier design technique // J. Wat. Pollut. Control. Fed. – 1982. – **54**. – P. 1376–1381.
8. *Lennoz-Gratin Ch.* Effect of envelopes on flow pattern near drain pipe // J. Irrig. and Drain. Div., ASCE. – 1989. – **115**, No 4. – P. 626–641.
9. *Ojha C. S. P., Singh V. P., Adrian D. D.* Determination of critical head in soil piping // J. Hydraul. Eng. – 2003. – **129**, No 7. – P. 511–518.
10. *Поляков В. Л.* Промачивание суффозионных грунтов. 1. Суффозия // Прикл. гідромеханіка. – 2003. – **5(77)**, № 3. – С. 72–82.

*Институт гидромеханики НАН Украины, Киев*

*Поступило в редакцию 31.03.2008*