ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

10 • 2008

ЕНЕРГЕТИКА

УДК 621.318.576.4

© 2008

Член-корреспондент НАН Украины **А. Е. Божко**

О выводе особой формулы мощности в электрической цепи переменного тока с управляемыми диодами

New special formules for the mean current, effective voltage, and power in the ac curcuit with controlled diodes are deduced.

Электрические цепи с управляемыми диодами (тиристорами, симисторами) широко применяются в различных областях промышленности [1–3]. Регулировка тока в этих цепях осуществляется с помощью изменения угла открывания управляемого диода. Такое регулирование величины тока осуществляется как в цепях постоянного (рис. 1, *б*), так и переменного (рис. 1, *в*) токов. На рис. 1 приведены кривые изменения синусоидального напряжения $U = U_a \sin \omega t$ (см. рис. 1, *а*), где U_a — амплитуда; ω — круговая частота ($\omega = 2\pi f$, f — частота, Гц); t — время; φ — угол открывания тиристора.

Однофазные схемы цепей постоянного и переменного токов с тиристорами приведены на рис. 2, *а*, *б*, соответственно, где D1, D2 — диоды; T1, T2 — тиристоры; $z_{\text{н}}$ — сопротивление нагрузки; $U_{\text{н}}$ — напряжение на $z_{\text{н}}$. Схеме рис. 2, *а* соответствуют кривые тока рис. 1, *б*, а схеме рис. 2, *б* — рис. 1, *в*. Как видно из рис. 1, *б*, *в*, при включении тиристора (угол φ) напряжение на нагрузке ($z_{\text{н}}$) возникает скачком величиной $U_a \sin \varphi$. В зависимости от характера нагрузки (активной, индуктивной, емкостной, смешанной) нарастание тока $i(t)$ в цепи может быть скачком в активной нагрузке $i = U_a \sin\varphi / R_{\text{н}}$ или, в соответствии с переходным процессом в цепи, при других видах нагрузки. В зависимости от угла φ меняется величина среднего напряжения на $z_{\text{н}}$ (цепь постоянного и переменного токов) и эффективного напряжения (цепь переменного тока).

Известно [4], что электрическая энергия цепи $W_e = \int\limits_0^t P(t)dt$, где $P(t) = U_{\text{эф}} I_{\text{эф}} \cos\Psi$ — мощность цепи; $U_{\text{эф}}$, $I_{\text{эф}}$ — эффективные значения напряжения и тока соответственно; Ψ — сдвиг фаз между $U(t)$ и $i(t)$. Ниже рассмотрим цепь с активной нагрузкой. В этом случае $\Psi = 0$. Мощность $P(t)$ будем определять на переменном токе по формуле

$$P(t) = U_{\text{эф}}(t) I_{\text{ср}}, \tag{1}$$

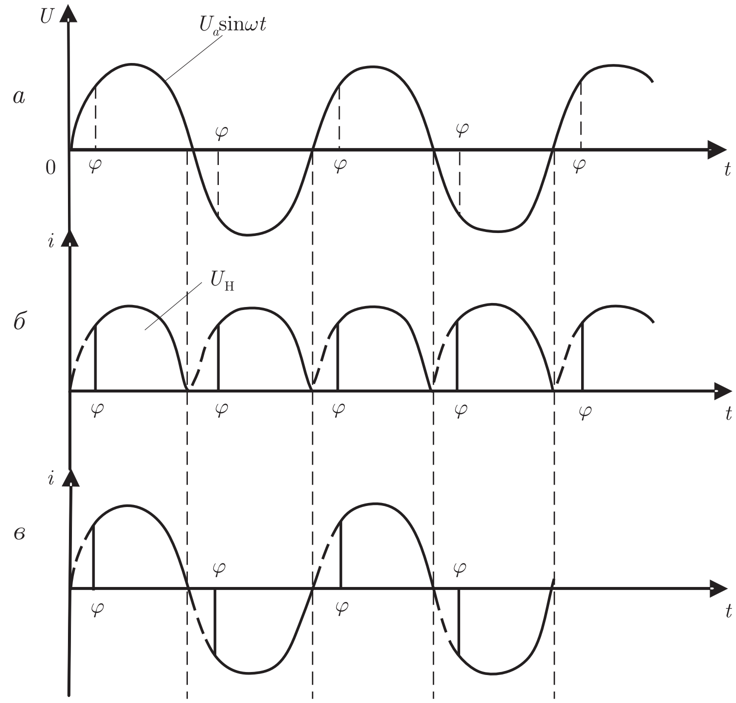

Рис. 1

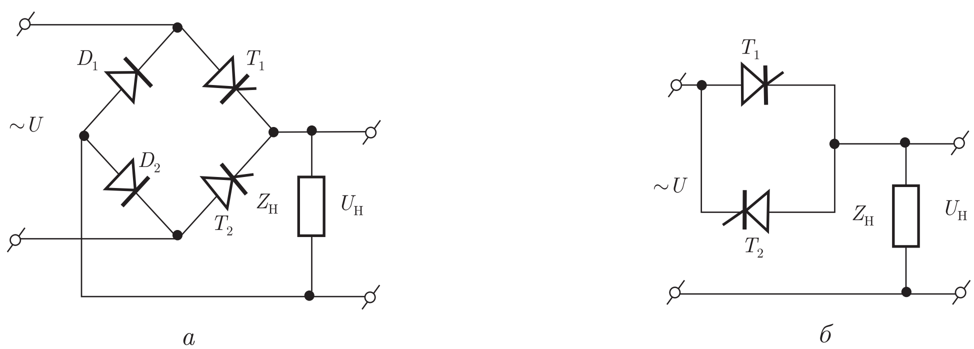

Рис. 2

где $I_{ср}$ — среднее значение тока, идущего по активному сопротивлению нагрузки $R_н$; $I_{ср}$ определяется мгновенными значениями токов в цепи, возникающих после открывания тиристоров (см. рис. 1 *б*, *в*) в каждый полупериод переменного напряжения $U(t)$. Ток в цепи в каждый момент $(t = 0)$ открывания тиристора выразим

$$i(0) = I_a 1(t) \sin\varphi, \tag{2}$$

где

$$I_a = \frac{U_a}{R_н}; \qquad 1(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & t \geqslant 0 \\ 0, & t < 0 \end{array} \right\} \text{ — единичная скачкообразная функция.}$$

Как видим из (2), ток $i(t)$ при угле φ изменяется скачком, а это значит, что и напряжение на нагрузке $R_н$ изменяется скачком и имеет форму тока. В соответствии с результатами, полученными в работах [5, 6], выражение $I_a \sin(\omega t + \varphi)$ и $U_a \sin(\omega t + \varphi)$ можно представить в виде особого (сингуларисного) разложения

$$
\begin{aligned}
i(t) &= I_a(1 - \ell^{-\alpha t}) \sin(\omega t + \varphi) + \ell^{-\alpha t} \sin\varphi \sum_{k=1}^{n} I_{ak} \cos\omega_k t, \\
U(t) &= U_a(1 - \ell^{-\alpha t}) \sin(\omega t + \varphi) + \ell^{-\alpha t} \sin\varphi \sum_{k=1}^{n} U_{ak} \cos\omega_k t,
\end{aligned} \tag{3}
$$

где α — коэффициент затухания;

$$
\sum_{k=1}^{n} U_{ak} = U_a; \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{U_{ak}}{R_{\text{н}}} = I_{ak}; \quad U_{a1} = \frac{U_a}{\pi}; \quad I_a = \frac{U_a}{R_{\text{н}}}; \quad U_{ak} = \frac{U_{a1}}{k}; \quad \omega_k = k\omega_1.
$$

Заметим, что при $t = 0$ $i(0) = I_a \sin\varphi$, $U(0) = U_a \sin\varphi$; $t = \infty$ $i(\infty) = I_a \sin(\omega t + \varphi)$, $U(\infty) = U_a \sin(\omega t + \varphi)$. При $\alpha = \infty$ $i(t) = I_a \sin(\omega t + \varphi)$, $U(t) = U_a \sin(\omega t + \varphi)$, т. е. выражения (3) соответствуют классическим величинам. При учете в данном исследовании принятого разложения скачкообразной функции (3) для определения мощности цепи $P(t)$ необходимо определить $U_{\text{эф}}$ и $I_{\text{ср}}$. В данном случае

$$
I_{\text{ср}} = \frac{2}{T} \int\limits_{\varphi/\omega}^{T/2} i(t)dt = \frac{2}{T} \int\limits_{\varphi/\omega}^{T/2} \left[I_a(1 - \ell^{-\alpha t}) \sin(\omega t + \varphi) + \sin\varphi \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{T_k} U_{ak} \ell^{-\alpha t} \cos\omega_k t \right] dt, \tag{4}
$$

$$
\begin{aligned}
U_{\text{эф}} &= \left[\frac{1}{T} \int\limits_{0}^{T} U^2(t)dt \right]^{1/2} = \\
&= \left\{ \frac{1}{T} \int\limits_{0}^{T} \left[U_a(1 - \ell^{-\alpha t}) \sin(\omega t + \varphi) + \sin\varphi \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{T_k} U_{ak} \ell^{-\alpha t} \cos\omega_k t \right]^2 dt \right\}^{1/2}
\end{aligned} \tag{5}
$$

и тогда с учетом (4), (5) мощность в цепи с управляемыми тиристорами при активной нагрузке записывается выражением

$$
\begin{aligned}
P(t) = &\left\{ \frac{1}{T} \int\limits_{0}^{T} \left[U_a(1 - \ell^{-\alpha t}) \sin(\omega t + \varphi) + \ell^{-\alpha t} \sin\varphi \sum_{k=1}^{n} U_{ak} \cos\omega_k t \right]^2 dt \right\}^{1/2} \times \\
&\times \left\{ \frac{2}{T} \int\limits_{\varphi/\omega}^{T/2} \left[I_a(1 - \ell^{-\alpha t}) \sin(\omega t + \varphi) + \ell^{-\alpha t} \sin\varphi \sum_{k=1}^{n} U_{ak} \cos\omega_k t \right] dt \right\}.
\end{aligned} \tag{6}
$$

Для окончательного результата в (6) вычислим интегралы (4) и (5) методом по частям [7]. Решение задачи будем осуществлять последовательно: вначале определим $I_{\text{ср}}$ из (4), а затем $U_{\text{эф}}$ из (5). Подынтегральные выражения в (4) и (5) состоят из нескольких слагаемых (со своими знаками $\pm$). Поэтому будем вычислять интегралы отдельных слагаемых, а затем индивидуальные результаты суммировать. Итак, перейдем к выражению (4)

$$I_{\text{ср}1} = \frac{2}{T}\int\limits_{\varphi/\omega}^{T/2} I_a \sin\omega t dt = -\frac{2I_a}{T\omega}\cos\omega t\Big|_{\varphi/\pi}^{T/2} = \frac{I_a}{\pi}(1+\cos\varphi),$$
$$I_{\text{ср}2} = -\frac{2}{T}\int\limits_{\varphi/\omega}^{T/2} I_a \ell^{-\alpha t}\sin(\omega t+\varphi)dt. \tag{7}$$

При вычислении I_{cp2} методом по частям вначале вводим обозначения

$$U_1 = \ell^{-\alpha t}, \qquad U_1' = -\alpha\ell^{-\alpha t}; \qquad \upsilon_1' = \sin(\omega t+\varphi), \qquad \upsilon_1 = -\frac{1}{\omega}\cos(\omega t+\varphi),$$

а затем

$$U_2 = \ell^{-\alpha t}, \qquad U_2' = -\alpha\ell^{-\alpha t}; \qquad \upsilon_2' = \cos(\omega t+\varphi), \qquad \upsilon_2 = -\frac{1}{\omega}\sin(\omega t+\varphi)$$

и используем тригонометрические преобразования [7]

$$\cos(\omega t+\varphi) = \cos\omega t\cos\varphi - \sin\omega t\sin\varphi;$$
$$\sin(\omega t+\varphi) = \sin\omega t\cos\varphi + \cos\omega t\sin\varphi.$$

В результате

$$I_{\text{ср}2} = -\frac{\omega^2 I_a}{(\alpha^2+\omega^2)\pi}\left[\ell^{-\alpha\pi/\omega}\left(\cos\varphi+\frac{\alpha}{\omega}\sin\varphi\right)-1\right], \tag{8}$$

$$I_{\text{ср}3} = \frac{2}{T}\int\limits_{\varphi/\omega}^{T/2}\left(\sin\varphi\sum_{k=1}^{n} U_{ak}\ell^{-\alpha t}\cos\omega_k t\right)dt. \tag{9}$$

Подынтегральное выражение в (9) состоит из n слагаемых $\sin\varphi U_{ak}\ell^{-\alpha t}\cos\omega_k t$, $k = \overline{1,n}$. Поэтому вычислим интеграл, соответствующий (9) для каждого k-го слагаемого, а затем все полученные результаты просуммируем. Итак,

$$I_{\text{ср}3k} = \frac{2}{T}\int\limits_{\varphi/\omega}^{T} \sin\varphi U_{ak}\ell^{-\alpha t}(\cos\omega_k t)\,dt \tag{10}$$

вычисляется методом по частям [7]. Заметим, что частота ω может не равняться частоте ω_k, $k = \overline{1,n}$, а это значит, что $T \neq T_k = 2\pi/\omega_k$. К тому же, если считать, что каждое включение тиристора при φ/ω вызывает индивидуальное изменение тока в цепи со скачком $U_a\sin\varphi/R_{\text{н}} = i(\varphi/\omega)$, то можно при вычислении интеграла (10) считать, что ток $i(\varphi/\omega)$ возникает при $t = 0$. В этом случае в соответствии с (3) в момент включения тиристора

$U_k = U_{ak}$, т. е. $\cos(\omega_k t = 0) = 1$. И тогда среднее значение тока $I_{\text{ср}k}$ должно определяться выражением

$$I_{\text{ср}3k} = \frac{2\sin\varphi}{T_k} \int\limits_{T_k/4}^{5T_k/4} I_{ak} \ell^{-\alpha t} (\cos\omega_k t) dt. \tag{11}$$

При вычислении (11) с использованием метода по частям введем обозначения: вначале

$$U_{1k} = \ell^{-\alpha t}, \qquad U'_{1k} = -\alpha\ell^{-\alpha t}, \qquad \upsilon'_{1k} = \cos\omega_k t, \qquad \upsilon_{1k} = \frac{1}{\omega_k}\sin\omega_k t,$$

затем

$$U_{2k} = \ell^{-\alpha t}, \qquad U'_{2k} = -\alpha\ell^{-\alpha t}, \qquad \upsilon'_{2k} = \sin\omega_k t, \qquad \upsilon_{2k} = -\frac{\cos\omega_k t}{\omega_k}$$

и тогда получим

$$I_{\text{ср}3k} = \frac{I_{ak}\omega_k^2 \sin\varphi}{\pi(\alpha^2 + \omega_k^2)} \ell^{-\alpha\pi/(2\omega_k)} (1 - \ell^{-2\pi\alpha/\omega_k}). \tag{12}$$

В свою очередь суммарное

$$I_{\text{ср}3} = \frac{\sin\varphi}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{I_{ak}\omega_k^2}{\alpha^2 + \omega_k^2} \ell^{-\alpha\pi/(2\omega_k)} (1 - \ell^{-2\alpha\pi/\omega_k}). \tag{13}$$

Таким образом, средний ток в цепи определяется выражением (7) + (8) + (13)

$$I_{\text{ср}} = \frac{I_a}{\pi}\left[(1 + \cos\varphi) - \frac{\omega^2}{\alpha^2 + \omega^2}\ell^{-\alpha\pi/\omega}\left(\cos\varphi + \frac{\alpha}{\omega}\sin\varphi - 1\right)\right] + $$
$$+ \frac{\sin\varphi}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{I_{ak}\omega_k^2}{\alpha^2 + \omega_k^2} \ell^{-\alpha\pi/(2\omega_k)} (1 - \ell^{-2\alpha\pi/\omega_k}). \tag{14}$$

Заметим, что при $\varphi = 0$ скачка тока $i(t)$ нет, этот ток в цепи $i(t) = I_a(\sin\omega t + \varphi) = (U_a/R_{\text{н}})\sin(\omega t + \varphi)$. В этом случае $I_{\text{ср}} = 2U_a/\pi$. Это классическая формула [4]. Проверим с этой точки зрения выражение (14). Слагаемые $I_{\text{ср}1} = 2U_a/\pi$, $I_{\text{ср}2} = 0$, $I_{\text{ср}3} = 0$. То есть выражение (14) при $\varphi = 0$ соответствует классической формуле среднего значения тока. Далее при $\alpha = \infty$ $I_{\text{ср}} = (I_a/\pi)(1 + \cos\varphi)$, т. е. также (14) соответствует классическому выражению $I_{\text{ср}}$ [4].

Перейдем к вычислению интегралов в выражении (5). Прежде всего, в (5) подынтегральное выражение представим в развернутом виде

$$U_{\text{эф}}^2 = \frac{1}{T}\int\limits_0^T \left\{U_a^2(1 - \ell^{-\alpha t})^2 \sin^2(\omega t + \varphi) + \ell^{-2\alpha t}(\sin\varphi)^2 \left(\sum_{k=1}^{n} U_{ak}\cos\omega_k t\right)^2 + \right.$$
$$\left. + 2U_a(1 - \ell^{-\alpha t})[\sin(\omega t + \varphi)]\left(\ell^{-\alpha t}\sin\varphi \sum_{k=1}^{n} U_{ak}\cos\omega_k t\right)\right\} dt. \tag{15}$$

В (15) имеем под интегралом три слагаемых $U_{\text{эф}\overline{1,3}}$, каждое из которых также состоит из ряда слагаемых. Вычислим в отдельности каждое из этих слагаемых

$$\left.\begin{aligned}
U^2_{\text{эф}1} &= \frac{1}{T}\int\limits_0^T [U_a^2(1-\ell^{-\alpha t})^2\sin^2(\omega t+\varphi)]dt,\\
U^2_{\text{эф}2} &= \frac{\sin^2\varphi}{T}\int\limits_0^T \ell^{-2\alpha t}\left(\sum_{k=1}^n U_{ak}\cos\omega_k t\right)^2 dt,\\
U^2_{\text{эф}3} &= \frac{2U_a\sin\varphi}{T}\int\limits_0^T \left\{(1-\ell^{-\alpha t})[\sin(\omega t+\varphi)]\ell^{-\alpha t}\sum_{k=1}^n U_{ak}\cos\omega_k t\right\}dt.
\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

При вычислении (16) к рассмотренным ранее тригонометрическим преобразованиям [7] применим

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha), \qquad \cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha),$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)], \qquad \cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)].$$

В нашем случае

$$\left.\begin{aligned}
&\sin^2(\omega t+\varphi) = \frac{1}{2}[1-\cos(2\omega t+2\varphi)] = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}(\cos 2\omega t\cos 2\varphi - \sin 2\omega t\sin 2\varphi);\\
&\cos^2(\omega t+\varphi) = \frac{1}{2}[1+\cos(2\omega t+2\varphi)] = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(\cos 2\omega t\cos 2\varphi - \sin 2\omega t\sin 2\varphi);\\
&(\cos\omega_k t)\cos\omega_l t = \frac{1}{2}[\cos(\omega_k-\omega_l)t+\cos(\omega_k+\omega_l)t];\\
&\sin(\omega t+\varphi)\cos\omega_k t = \frac{1}{2}\{\sin[(\omega_k-\omega_l)t+\varphi]+\sin[(\omega-\omega_k)t+\varphi]\}.
\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Итак,

$$U^2_{\text{эф}1} = \frac{U_a^2}{T}\int\limits_0^T \sin^2(\omega t+\varphi)dt - \frac{2U_a^2}{T}\int\limits_0^T \ell^{-\alpha t}\sin^2(\omega t+\varphi)dt + \frac{U_a^2}{T}\int\limits_0^T \ell^{-2\alpha t}\sin^2(\omega t+\varphi)dt =$$
$$= U^2_{\text{эф}11} + U^2_{\text{эф}12} + U^2_{\text{эф}13}.$$

В свою очередь,

$$U^2_{\text{эф}11} = \frac{U_a^2}{T}\int\limits_0^T \sin^2(\omega t+\varphi)dt = \frac{U_a^2}{2}\left(1-\frac{1}{\pi}\sin 2\varphi\right), \tag{18}$$

$$U^2_{\text{эф}12} = \frac{-2U_a^2}{T}\int\limits_0^T \ell^{-\alpha t}\sin^2(\omega t+\varphi) =$$
$$= \frac{U_a^2\omega}{\pi}\left[\frac{\omega}{4\omega^2+\alpha^2}\left(\frac{\alpha}{2\omega}\cos 2\varphi - \sin 2\varphi\right) - \frac{\alpha}{2\omega}\right](1-\ell^{-2\alpha\pi/\omega}). \tag{19}$$

Далее вычислим

$$U^2_{\text{эф}13} = \frac{U_a^2}{T}\int\limits_0^T \ell^{-2\alpha t}\sin^2(\omega t+\varphi)\,dt. \tag{20}$$

Вычисление (20) подобно вычислению $U^2_{\text{эф}12}$ и поэтому запишем сразу результат

$$U^2_{\text{эф}13} = \frac{U_a^2\omega}{2\pi}\left[\frac{\omega}{4(\omega^2+\alpha^2)}\left(\frac{\alpha}{\omega}\cos 2\varphi - \sin 2\varphi\right) - \frac{\alpha}{\omega}\right](1-\ell^{-4\alpha\pi/\omega}). \tag{21}$$

В итоге $U^2_{\text{эф}1} = (18) + (19)$, т. е.

$$U^2_{\text{эф}1} = \frac{U_a^2}{T}\left(1-\frac{1}{\pi}\sin 2\varphi\right) + \frac{U_a^2\omega}{\pi}\left[\frac{\omega}{4\omega^2+\alpha^2}\left(\frac{\alpha}{2\omega}\cos 2\varphi - \sin 2\varphi\right) - \frac{\alpha}{2\omega}\right](1-\ell^{-2\alpha\pi/\omega}) +$$
$$+ \frac{U_a^2\omega}{2\pi}\left[\frac{\omega}{4(\omega^2+\alpha^2)}\left(\frac{\alpha}{\omega}\cos 2\varphi - \sin 2\varphi\right) - \frac{\alpha}{\omega}\right](1-\ell^{-4\alpha\pi/\omega}). \tag{22}$$

Вычислим $U^2_{\text{эф}2}$. Вначале раскроем это выражение более подробно в виде

$$U^2_{\text{эф}2} = \frac{\sin^2\varphi}{T}\int\limits_0^T \ell^{-2\alpha t}\left[\sum_{k=1}^{n}(U_{ak}\cos\omega_k t)^2 + 2\sum_{\substack{k=1\\l=1\\k\neq l}}^{C_n 2} U_{ak}U_{al}(\cos\omega_k t)\cos\omega_l t\right]dt =$$
$$= \frac{\sin^2\varphi}{T}\int\limits_0^T \ell^{-2\alpha t}\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{U_{ak}^2}{2}(1+\cos 2\omega_k t) + \sum_{\substack{k=1\\l=1\\k\neq l}}^{C_n 2} U_{ak}U_{al}[\cos(\omega_k-\omega_l)t + \right.$$
$$\left. + \cos(\omega_k+\omega_l)t]\vphantom{\sum}\right\}dt. \tag{23}$$

Из (23) видно, что $U^2_{\text{эф}2}$ состоит из слагаемых

$$U^2_{\text{эф}2} = \frac{\sin^2\varphi}{2T}\int\limits_0^T\left(\ell^{-2\alpha t}\sum_{k=1}^{n}U_{ak}^2\right)dt, \qquad U^2_{\text{эф}22} = \frac{\sin^2\varphi}{2T}\int\limits_0^T \ell^{-2\alpha t}\left(\sum_{k=1}^{n}U_{ak}\cos 2\omega_k t\right)dt,$$

$$U^2_{\text{эф}23} = \frac{\sin^2\varphi}{T}\int\limits_0^T \ell^{-2\alpha t}\sum_{k=1}^{n}U_{ak}U_{al}[\cos(\omega_k-\omega_l)t]dt,$$

$$U^2_{\text{эф}24} = \frac{\sin^2\varphi}{T}\int\limits_0^T \ell^{-2\alpha t}\sum_{\substack{k=1\\l=1\\k\neq l}}^{C_n^2}U_{ak}U_{al}[\cos(\omega_k+\omega_l)t]dt.$$

Вследствие того, что в этих выражениях имеется сумма гармоник, вначале вычислим интегралы для k-й гармоники и для отдельных произведений с $U_{ak}U_{al}\cos(\omega_k - \omega_l)t$ и $U_{ak}U_{al}\cos(\omega_k + \omega_l)t$, а затем определим суммы полученных результатов

$$U^2_{\text{эф}21k} = \frac{\sin^2\varphi}{2T_k}\int\limits_0^T \ell^{-2\alpha t}U^2_{ak}dt = -\frac{\sin^2\varphi}{4\alpha T_k}U^2_{ak}\ell^{-2\alpha t}\Big|_0^{T_k} = \frac{U^2_{ak}\omega_k\sin^2\varphi}{8\alpha\pi}(1-\ell^{-4\alpha\pi/\omega_k}). \quad (24)$$

Для вычисления $U^2_{\text{эф}2sk}$, $s = 2{,}3{,}4$, как и прежде, используем метод вычисления интегралов по частям и формулы (17)

$$U^2_{\text{эф}22k} = \frac{\sin^2\varphi}{2T_k}\int\limits_{T_k/4}^{5T_k/4}\ell^{-2\alpha t}U_{ak}\cos 2\omega_k t dt =$$

$$= -\frac{U^2_{ak}\sin^2\varphi}{32\alpha\pi\omega_k}\left(1+\frac{1}{16\alpha^2\omega_k^2}\right)^{-1}\ell^{-\alpha T_k/2}(1-\ell^{-2\alpha T_k}), \quad (25)$$

$$U^2_{\text{эф}23k} = \frac{\sin^2\varphi}{T_k}\int\limits_{T_k/4}^{5T_k/4}\ell^{-2\alpha t}U_{ak}U_{al}\cos(\omega_k-\omega_l)dt =$$

$$= -\frac{U_{ak}U_{al}\sin^2\varphi}{16\alpha\pi(\omega_k-\omega_l)}\left[1+\frac{1}{16\alpha^2(\omega_k-\omega_l)^2}\right]^{-1}\ell^{-\alpha T_k/2}(1-\ell^{-2\alpha T_k}), \quad (26)$$

$$U^2_{\text{эф}24k} = \frac{\sin^2\varphi}{T_k}\int\limits_{T_k/4}^{5T_k/4}\ell^{-2\alpha t}U_{ak}U_{al}\cos(\omega_k+\omega_l)dt =$$

$$= -\frac{U_{ak}U_{al}\sin^2\varphi}{16\alpha\pi(\omega_k+\omega_l)}\left[1+\frac{1}{16\alpha^2(\omega_k+\omega_l)^2}\right]^{-1}\ell^{-\alpha T_k/2}(1-\ell^{-2\alpha T_k}). \quad (27)$$

На основании (24), (25), (26), (27) запишем выражение для $U^2_{\text{эф}2}$ в виде

$$U^2_{\text{эф}2} = \frac{\sin^2\varphi}{8\alpha\pi}\sum_{k=1}^{n}U^2_{ak}\omega_k(1-\ell^{-4\alpha\pi/\omega_k}) -$$

$$-\frac{\sin^2\varphi}{32\alpha\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{U^2_{ak}}{\omega_k}\left(1+\frac{1}{16\alpha^2\omega_k^2}\right)^{-1}\ell^{-\alpha T_k/2}(1-\ell^{-2\alpha T_k}) -$$

$$-\frac{\sin^2\varphi}{16\alpha\pi}\sum_{\substack{k=1\\l=1\\l\neq k}}^{C_n^2}\frac{U_{ak}U_{al}}{(\omega_k-\omega_l)}\left(1+\frac{1}{16\alpha^2(\omega_k-\omega_l)^2}\right)^{-1}\ell^{-\alpha T_k/2}(1-\ell^{-2\alpha T_k}) -$$

$$-\frac{\sin^2\varphi}{16\alpha\pi}\sum_{\substack{k=1\\l=1\\l\neq k}}^{C_n^2}\frac{U_{ak}U_{al}}{(\omega_k+\omega_l)}\left(1+\frac{1}{16\alpha^2(\omega_k+\omega_l)^2}\right)^{-1}\ell^{-\frac{\alpha T_k}{2}}(1-\ell^{-2\alpha T_k}). \quad (28)$$

Перейдем к определению $U^2_{\text{эф}3}$, представленного в (16). Здесь также вначале будем вычислять $U^2_{\text{эф}3k}$ для k-й гармоники

$$U^2_{\text{эф}3k}=\frac{2U_a\sin\varphi}{T}\int\limits_0^T U_{ak}\ell^{-\alpha t}\sin(\omega t+\varphi)\cos\omega_k t dt-\frac{2U_a\sin\varphi}{T}\int\limits_0^T U_{ak}\ell^{-\alpha t}\sin(\omega t+\varphi)\times$$

$$\times\cos\omega_k t=\frac{U_aU_{ak}\sin\varphi}{T}\int\limits_0^T\ell^{-\alpha t}\sin[(\omega-\omega_k)t+\varphi]dt+\frac{U_aU_{ak}\sin\varphi}{T}\times$$

$$\times\int\limits_0^T\ell^{-\alpha t}\sin[(\omega+\omega_k)t+\varphi]dt-\frac{U_aU_{ak}\sin\varphi}{T}\int\limits_0^T\ell^{-2\alpha t}\sin[(\omega_k-\omega_l)+\varphi]dt-$$

$$-\frac{U_{ak}U_{ak}\sin\varphi}{T}\int\limits_0^T\ell^{-2\alpha t}\sin[(\omega+\omega_k)+\varphi]dt. \qquad (29)$$

На основании (29) $U^2_{\text{эф}3k}=U^2_{\text{эф}3k1}+U^2_{\text{эф}3k2}-U^2_{\text{эф}3k3}-U^2_{\text{эф}3k4}$

$$\begin{aligned}
U^2_{\text{эф}3k1}&=\frac{U_aU_{ak}\sin\varphi}{T_k}\int\limits_{T_k/4}^{5T_k/4}\ell^{-\alpha t}\sin[(\omega-\omega_k)t+\varphi]dt,\\
U^2_{\text{эф}3k2}&=\frac{U_aU_{ak}\sin\varphi}{T_k}\int\limits_{T_k/4}^{5T_k/4}\ell^{-\alpha t}\sin[(\omega+\omega_k)t+\varphi]dt,\\
U^2_{\text{эф}3k3}&=\frac{-U_aU_{ak}\sin\varphi}{T_k}\int\limits_{T_k/4}^{5T_k/4}\ell^{-2\alpha t}\sin[(\omega-\omega_k)t+\varphi]dt,\\
U^2_{\text{эф}3k4}&=\frac{-U_aU_{ak}\sin\varphi}{T_k}\int\limits_{T_k/4}^{5T_k/4}\ell^{-2\alpha t}\sin[(\omega+\omega_k)t+\varphi]dt.
\end{aligned} \qquad (30)$$

Определим в отдельности каждое из этих (30) $U^2_{\text{эф}3ks}$, $s=\overline{1{,}4}$. Вычисление интегралов в (30) также осуществим методом по частям. Во избежание громоздкости вычислений представим окончательные результаты

$$U^2_{\text{эф}3k1}=\frac{U_aU_{ak}\sin\varphi}{T_k(\omega-\omega_k)}\ell^{-\alpha T_k/4}(1-\ell^{-\alpha T_k})\left(\frac{\alpha\cos\varphi}{\omega-\omega_k}-\sin\varphi\right)\left[1+\frac{\alpha^2}{(\omega-\omega_k)^2}\right]^{-1}, \qquad (31)$$

$$U^2_{\text{эф}3k2}=\frac{U_aU_{ak}\sin\varphi}{T_k(\omega+\omega_k)}\ell^{-\alpha T_k/4}(1-\ell^{-\alpha T_k})\left(\frac{\alpha\cos\varphi}{\omega+\omega_k}-\sin\varphi\right)\left[1+\frac{\alpha^2}{(\omega+\omega_k)^2}\right]^{-1}, \qquad (32)$$

$$U^2_{\text{эф}3k3}=\frac{U_aU_{ak}\sin\varphi}{T_k(\omega-\omega_k)}\ell^{-\alpha T_k/2}(1-\ell^{-2\alpha T_k})\left(\sin\varphi-\frac{2\alpha\cos\varphi}{\omega-\omega_k}\right)\left[1+\frac{4\alpha^2}{(\omega-\omega_k)^2}\right]^{-1}, \qquad (33)$$

$$U_{\text{эф}3k4}^2 = \frac{U_a U_{ak}\sin\varphi}{T_k(\omega+\omega_k)}\ell^{-\alpha T_k/2}(1-\ell^{-2\alpha T_k})\left(\sin\varphi - \frac{2\alpha\cos\varphi}{\omega+\omega_k}\right)\left[1+\frac{4\alpha^2}{(\omega+\omega_k)^2}\right]^{-1}. \tag{34}$$

Таким образом,

$$U_{\text{эф}3}^2 = \sum_{k=1}^{n}(31)+(32)+(33)+(34), \tag{35}$$

а общее эффективное напряжение в цепи равно (1)

$$U_{\text{эф}} = [(22)+(28)+(35)]^{1/2}. \tag{36}$$

При $\varphi = 0$ выражение (36) принимает вид $U_{\text{эф}}(\varphi = 0) = U_a/\sqrt{2}$, т. е. соответствует классической формуле [4]. При $\alpha = \infty$, $\varphi = 0$ $U_{\text{эф}} = U_a/\sqrt{2}$.

На основании проведенных вычислений $I_{\text{ср}}$ и $U_{\text{эф}}$ в рассмотренных электроцепях мощность цепи с управляемыми тиристорами записывается в виде

$$P = (36)\times(14). \tag{37}$$

При $\varphi = 0$ (37) принимает вид

$$P = \frac{2I_a}{\pi}\frac{U_a}{\sqrt{2}}. \tag{38}$$

Выражение (38) является классическим. При $\alpha = \infty$, $\varphi = 0$ $P = (38)$. При $\alpha = \infty$, $\varphi \neq 0$

$$P = \frac{I_a}{\pi}(1+\cos\varphi)\frac{U_a}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{1}{\pi}\sin 2\varphi\right)^{1/2}, \tag{39}$$

т. е. (39) отражает выражение мощности в цепи с управляемыми тиристорами в соответствии с обычными расчетами.

Как видим, сингуларисное разложение скачкообразной функции, используемое в данной работе, несмотря на свою громоздкость, точно отражает электрические величины в цепи и при $\alpha = \infty$ переходит к классическому виду.

1. *Брухман С. С., Трофимов Н. А.* Тиристорные переключатели переменного тока. – Москва: Энергия, 1969. – 64 с.
2. *Евсеев Ю. А., Крылов С. С.* Симисторы и их применение в бытовой электроаппаратуре. – Москва: Энергоатомиздат, 1999. – 120 с.
3. *Энергетическая* электроника: Справ. пособие / Под ред. В. А. Лабунцова. – Москва: Энергоатомиздат, 1987. – 461 с.
4. *Бессонов Л. А.* Теоретические основы электротехники. – Москва: Высш. шк., 1978. – 528 с.
5. *Божко А. Е.* Новая интерпретация переходных процессов в электрических цепях // Доп. НАН Украины. – 2004. – № 9. – С. 83–87.
6. *Божко А. Е.* Новая трактовка переходных процессов в электрических цепях переменного тока // Там само. – 2005. – № 4. – С. 81–86.
7. *Бронштейн И. Н., Семендяев К. А.* Справочник по математике. – Москва: ГИТТЛ, 1956. – 608 с.

Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков

Поступило в редакцию 27.07.2007