

УДК 536.24

НИКИТЕНКО Н. И.¹, СНЕЖКИН Ю. Ф.¹, СОРОКОВАЯ Н. Н.¹, КОЛЬЧИК Ю.Н.²

¹ *Институт технической теплофизики НАН Украины*

² *Киевский национальный университет строительства и архитектуры*

МЕТОД КАНОНИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИКИ СУШКИ КАПИЛЛЯРНО–ПОРИСТЫХ ТЕЛ С КРИВОЛИНЕЙНЫМИ ГРАНИЦАМИ

Приведено чисельний метод розрахунку тепломасопереносу і фазових перетворень при зневодненні капілярно-пористого тіла довільної форми з криволінійними границями, що базується на методі канонічних елементів і на тришаровій явній різнищевій схемі. Розглянуто застосування приграничних елементів різної форми. Представлено результати розв'язання двовимірної задачі сушіння многозв'язного тіла криволінійної форми.

Приведен численный метод расчета тепломассопереноса и фазовых превращений при обезвоживании капиллярно-пористого тела произвольной формы с криволинейными границами, который базируется на методе канонических элементов и на трехслойной явной разностной схеме. Рассмотрено применение приграничных элементов различной формы. Представлены результаты решения двумерной задачи сушки многосвязного тела криволинейной формы.

The numerical method of calculation of heat-mass transfer and phase transformations at dewatering a capillary-porous body of the any form with curvilinear borders which is based on a method of initial elements and on three-layer obvious finite-difference to the circuit are stated. Application of elements of the various form on frontier is examined. Results of the decision of a bidimensional task of drying of a multicoherent body of the curvilinear form are submitted.

A – энергия активации молекул;
 c – удельная изобарная теплоемкость;
 D – коэффициент диффузии;
 G, G_1 – коэффициенты Ляме;
 h, l – размер шагов разностной сетки по пространственной координате и времени;
 I – интенсивность фазового превращения жидкости в пар;
 i, m, j, n – порядковые номера шагов разностной сетки по координатам и времени;
 J – плотность потока жидкости, пара или воздуха;
 K – относительный коэффициент термодиффузии;
 k – касательная к граничной поверхности;
 L – удельная теплота фазового перехода жидкости в пар;
 P – давление;
 q_f – тепловой поток на внешней границе;
 R – универсальная газовая постоянная;
 S_f – площадь приграничного элемента;
 T – температура;
 t – время;
 U – объемная концентрация связанного вещества;
 V – объем;
 w – скорость фильтрационного движения фазы;
 α – коэффициент теплоотдачи;
 β – угол между осью x и нормалью к внешней границе;

γ – коэффициент испарения;
 ε_V – относительная объемная деформация;
 χ – коэффициент влагообмена;
 λ – коэффициент теплопроводности;
 μ – молекулярная масса вещества;
 ν – нормаль к граничной поверхности;
 ρ – парциальная плотность компонента;
 φ – степень насыщения парогазовой смеси;
 Ψ – объемная доля пористой системы, занятая компонентом фазы;
 Ω – весовой параметр разностного уравнения;
 ∇ – оператор Гамильтона.
Индексы верхние:
 d – диффузия;
 f – фильтрация.
Индексы нижние:
 0 – начальное значение;
 f – внешняя граница тела;
 ν – нормаль к внешней границе тела;
 v – воздух;
 $г$ – газ;
 $ж$ – жидкость;
 $п$ – пар;
 $пс$ – пар внешней среды;
 $т$ – твердое пористое тело;
 $н$ – насыщенное состояние;
 $с$ – внешняя среда;
 $эф$ – эффективное значение.

В работах [1, 2] развивается теория тепломассо-переноса и фазовых превращений в пористых и дисперсных системах и на этой основе построены математические модели, описывающие широкий круг процессов сушки. Для реализации указанных моделей разработаны эффективные сеточные методы расчета процессов сушки в областях относительно простой формы. При разработке технологий сушки тел сложной конфигурации с криволинейными границами возникает необходимость введения неортогональных (неравномерных) сеток.

В [3–7] предложен и развивается новый подход к решению дифференциальных уравнений переноса массы энергии и импульса для областей сложной конфигурации, базирующийся на аппроксимации исходного дифференциального уравнения балансным уравнением для элемента канонической формы, который строится на неравномерной разностной сетке. Этот подход, названный методом канонических элементов, имеет определенные преимущества по отношению к другим численным методам [4–6], применяемых для систем с криволинейными границами, и сохраняет все основные достоинства конечно-разностных методов, причем в пределе для равномерной ортогональной сетки аппроксимирующие уравнения метода канонических элементов переходят в известные разностные уравнения метода сеток.

В [1] на базе законов сохранения и основных положений механики деформируемого тела получено уравнение переноса субстанции W (массы, энергии, импульса)

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\nabla J_W + I_W - \frac{W}{1 + \varepsilon_V} \frac{\partial \varepsilon_V}{\partial t}, \quad (1)$$

которое при отсутствии деформаций ($\varepsilon_V = 0$) переходит в известное уравнение Умова.

Плотность потока J_W субстанции W в общем случае складывается из диффузионного и фильтрационного потоков $J_W = J_W^d + J_W^f$. Диффузионный поток энергии пропорционален градиенту температуры $J_q^d = -\lambda \nabla T$, а массы компонентов – градиентам объемной концентрации и температуры $J_U^d = -D(\nabla U + K \nabla T)$. Фильтрационный поток

$J_W^f = W w$, где скорости фильтрации газа w_g и жидкости w_j , согласно формуле Дарси, пропорциональны градиентам их давлений. Давления пара и газа находится через объемные концентрации и объемные доли Ψ компонентов тела [1]. Давление жидкости определяется как сумма давления газа и капиллярного давления в порах тела P_k . Коэффициент диффузии жидкости D_j и интенсивность ее испарения в порах тела I_V и на внешних его границах I_c определяются по формулам [8], которые получены на базе закона Никитенко Н.И. об интенсивности спектрального излучения частиц:

$$D_j = \gamma_D \left[\exp\left(\frac{A}{RT}\right) - 1 \right]^{-1}; \quad (2)$$

$$I_c = \gamma_c \left\{ \begin{array}{l} \varphi_T \left[\exp\left(\frac{A}{RT}\right) - 1 \right]^{-1} - \\ - \varphi_c \left[\exp\left(\frac{A}{RT_c}\right) - 1 \right]^{-1} \end{array} \right\}; \quad (3)$$

$$I_V = \gamma_V \left[\exp\left(\frac{A}{RT}\right) - 1 \right]^{-1} (\varphi_T - \varphi). \quad (4)$$

Здесь φ_T – влажность газа, которой согласно изотерме адсорбции отвечает объемная концентрация U_j в данной точке пористого тела, $\varphi_T = \varphi_T(U_j)$; $\varphi_c = P_c / P_H(T_c)$; $\varphi = P_H / P_H(T)$. Величина φ_T характеризует степень насыщения тела гигроскопической влагой, поэтому она может быть названа адсорбционной влажностью тела.

Давления компонентов парогазовой смеси P_T в порах тела, выражаются через объемные концентрации компонентов U_H, U_B, U_j и температуру T следующим образом. Объемные доли жидкости Ψ_j и газа Ψ_g в пористом теле соответственно равны

$$\Psi_j = U_j / \rho_j \quad \text{и} \quad \Psi_g = 1 - \Psi_T - \Psi_j,$$

где ρ_j – истинная плотность жидкости. Парциальные плотности пара и воздуха в порах тела определяются выражениями $\rho_H = U_H / \Psi_g$, $\rho_B = U_B / \Psi_g$. Парци-

альные давления пара и воздуха находятся по уравнению состояния парогазовой смеси. Для процессов сушки она может рассматриваться как смесь идеальных газов. При этом $P_{\text{п}} = \rho_{\text{п}}RT/\mu_{\text{п}}$ и $P_{\text{в}} = \rho_{\text{в}}RT/\mu_{\text{в}}$. Общее давление парогазовой смеси $P_{\text{г}}$ равно сумме парциальных давлений его компонентов.

В настоящей работе при изложении численного метода расчета динамики сушки тел с криволинейными границами ограничимся рассмотрением случая, когда перенос субстанции в теле осуществляется диффузионным путем и оно является капиллярно-пористым. При этом в уравнении (1) можно не учитывать члены, связанные с фильтрационным переносом и объемной деформацией системы. Тогда математическая модель сушки может быть представлена в следующем виде

$$\partial U_{\text{ж}} / \partial t = \nabla [D_{\text{ж}} (\nabla U_{\text{ж}} + K_{\text{ж}} \nabla T)] - I_{\text{в}}, \quad (5)$$

$$\partial U_{\text{п}} / \partial t = \nabla [D_{\text{п}} (\nabla U_{\text{п}} + K_{\text{п}} \nabla T)] + I_{\text{в}}, \quad (6)$$

$$c_{\text{эф}} \partial T / \partial t = \nabla (\lambda_{\text{эф}} \nabla T) - \sum c_{\text{к}} D_{\text{к}} (\nabla U_{\text{к}} + K_{\text{к}} \nabla T) \nabla T - LI_{\text{в}}, \quad (7)$$

к = ж, п, в.

Эффективные значения теплоемкости и теплопроводности тела определяются как аддитивные величины:

$$c_{\text{эф}} = c_{\text{т}} U_{\text{т}} + c_{\text{ж}} U_{\text{ж}} + c_{\text{п}} U_{\text{п}} + c_{\text{в}} U_{\text{в}};$$

$$\lambda_{\text{эф}} = \lambda_{\text{т}} U_{\text{т}} / \rho_{\text{т}} + \lambda_{\text{ж}} U_{\text{ж}} / \rho_{\text{ж}} + \lambda_{\text{п}} U_{\text{п}} / \rho_{\text{п}} + \lambda_{\text{в}} U_{\text{в}} / \rho_{\text{в}}.$$

$$\begin{aligned} z_j &= z_{j-1} + h_{z,j-1}, & j &= 0, 1, \dots, J, \\ y_{m,j} &= y_{m-1,j} + h_{y,m-1,j}, & m &= 1, 2, \dots, M_j, \\ x_{i,m,j} &= x_{i-1,m,j} + h_{x,i-1,m,j}, & i &= 1, 2, \dots, I_{m,j}, \\ t_n &= t_{n-1} + h_{t,n-1}, & n &= 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

Здесь $Z', Y', X'_{m,j}$ – минимальные значения координат соответственно: z – для точек области, y – для точек ее сечения $z = z_j$ и x – для точек линий пересечения координатных поверхностей $z = z_j$ и

При отсутствии фильтрации давление парогазовой смеси является постоянным и равным давлению внешней среды $P_{\text{с}}$, поэтому парциальное давление воздуха $P_{\text{в}}$ определяется выражением $P_{\text{в}} = P_{\text{с}} - P_{\text{п}}$.

Для системы уравнений (5) – (7) задаются поля искомых функций $U_{\text{ж}0}, U_{\text{п}0}, T_0$ в начальный момент времени $t = 0$ в функции координат области и граничные условия. Граничные условия тепло- и массообмена третьего рода формулируются следующим образом [4]:

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial v} \Big|_{v=0} = \alpha (T_{\text{с}} - T|_{v=0}) - LI_{\text{с}}, \quad (8)$$

$$D_{\text{ж}} \left(\frac{\partial U_{\text{ж}}}{\partial v} \Big|_{v=0} + K_{\text{ж}} \frac{\partial T}{\partial v} \Big|_{v=0} \right) = I_{\text{с}}, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} -D_{\text{п}} \left(\frac{\partial U_{\text{п}}}{\partial v} \Big|_{v=0} + K_{\text{п}} \frac{\partial T}{\partial v} \Big|_{v=0} \right) = \\ = \chi_{\text{пс}} (U_{\text{п}}|_{v=0} - \rho_{\text{пс}} \Psi_{\text{п}}) + \chi_{\text{пс}} K_{\text{пс}} \Psi_{\text{п}} (T|_{v=0} - T_{\text{с}}). \end{aligned} \quad (10)$$

Хотя метод канонических элементов может быть реализован на произвольных неравномерных сетках, для упрощения алгоритма, обеспечения возможности автоматизированного построения неравномерных разностных сеток, а также для повышения точности расчетов, целесообразным является использование регуляризованных сеток [1, 2]. Регуляризация сеток может быть достигнута путем размещения узловых точек на сетках координатных поверхностей и линий. Для частного случая односвязной трехмерной области в декартовых координатах такая сетка определяется уравнениями

$$\begin{aligned} z_0 &= Z', & z_j &= Z''; \\ y_{0,j} &= Y'_j, & y_{M,j} &= Y''_j; \\ x_{0,m,j} &= X'_{m,j}, & x_{I,m,j} &= X''_{m,j}; \\ h_m &> 0, & t_0 &= 0. \end{aligned}$$

$y = y_{m,j}; Z'', Y''_j, X''_{m,j}$ – максимальные значения координат для тех же элементов области.

Простейшим случаем регуляризованной сетки является квазиравномерная сетка [1], которая мо-

жет использоваться для решения многих практических задач. Для этой сетки

$$h_{z,j} = \text{const}, \quad h_{y,m,j} = h_{y,j} \neq f(m) \quad \text{и} \\ h_{x,l,m,j} = h_{x,m,j} \neq f(i) \quad \text{и} \quad h_{t,n} = \text{const}.$$

Для областей, форма которых близка к полуму цилиндру или полой сфере со стенками переменной толщины, целесообразно использовать регуляризованные сетки в цилиндрических или сферических координатах.

Для получения разностных выражений частных производных $\partial T / \partial x$, $\partial T / \partial y$, $\partial T / \partial z$ в декартовых координатах по значениям искомой скалярной функции T в узлах неравномерной разностной сетки с заданной погрешностью вычислений используются дифференциальные уравнения Никитенко Н.И. [4]

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \left[\frac{\partial T}{\partial x'} \frac{1}{\sin(x, x')} + \frac{\partial T}{\partial y'} \frac{1}{\sin(x, y')} \right] / \\ / [\text{ctg}(x, x') + \text{ctg}(x, y')], \quad (11)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = - \left[\frac{\partial T}{\partial x'} \frac{1}{\cos(x, x')} + \frac{\partial T}{\partial y'} \frac{1}{\cos(x, y')} \right] / \\ / [\text{tg}(x, x') + \text{tg}(x, y')], \quad (12)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \left[\frac{\partial T}{\partial z'} - \frac{\partial T}{\partial x} \cos(z', x) - \right. \\ \left. - \frac{\partial T}{\partial y} \cos(z', y) \right] / \cos(z', z). \quad (13)$$

Для двумерных задач используются уравнения (11), (12), определяющие взаимосвязь между производными $\partial T / \partial x$ и $\partial T / \partial y$ в ортогональных координатах x, y с производными $\partial T / \partial x'$ и $\partial T / \partial y'$ вдоль произвольно направленных осей x' и y' , составляющих с осью x углы соответственно (x, x') и (x, y') . Для случая регуляризованной сетки, когда угол $(x, x') = 0$, уравнение (11) переходит в тождество $\partial T / \partial x = \partial T / \partial x'$, а уравнения (12) принимает вид

$$\frac{\partial T}{\partial y} = - \left[\frac{\partial T}{\partial x'} \text{ctg}(x, y') + \frac{\partial T}{\partial y'} \frac{1}{\sin(x, y')} \right]. \quad (14)$$

При решении трехмерных задач переноса дополнительно привлекается уравнение (13) для нахождения производной $\partial T / \partial z$ в узле сетки через значение производных вдоль осей x, y и z' . Производные от функции T в произвольной внутренней узловой точке $(x_{i,m,j}, y_{m,j}, z_j)$ области находятся через производные вдоль нормалей к граничным поверхностям канонического элемента, который строится в окрестности этой узловой точки при помощи координатных поверхностей ортогональной системы координат. В декартовых координатах канонический элемент представляет собой параллелепипед, грани которого лежат на координатных поверхностях

$$z = z_{j-1/2}, \quad z = z_{j+1/2}, \\ y = y_{m-1/2,j}, \quad y = y_{m+1/2,j}, \\ x = x_{i-1/2,m,j}, \quad x = x_{i+1/2,m,j}.$$

На регуляризованной сетке производная $\partial T / \partial x$ на гранях $x = x_{i-1/2,m,j}$ и $x = x_{i+1/2,m,j}$ определяется с погрешностью порядка $h_{x,i,m,j}^2$ симметричными разностными отношениями

$$\delta_x T_{i-1/2,m,j} = \frac{T_{i,m,j} - T_{i-1,m,j}}{h_{x,i,m,j}}, \\ \delta_x T_{i+1/2,m,j} = \frac{T_{i+1,m,j} - T_{i,m,j}}{h_{x,i,m,j}}. \quad (15)$$

Базирующиеся на (15) разностные выражения производных $\partial T / \partial x$ и $\partial^2 T / \partial x^2$ в узловой точке $(x_{i,m,j}, y_{m,j}, z_j)$ имеют вид

$$\delta_x T_{i,m,j} = \alpha_x \delta_x T_{i+1/2,m,j} + (1 - \alpha_x) \delta_x T_{i-1/2,m,j}, \\ \alpha_x = h_{x,i-1,m} / (h_{x,i,m} + h_{x,i-1,m}), \quad (16)$$

$$\delta_x (\lambda \delta_x T)_{i,m,j} = \\ = \frac{\lambda_{i+1/2,m,j} \delta_x T_{i+1/2,m,j} - \lambda_{i-1/2,m,j} \delta_x T_{i-1/2,m,j}}{0,5(h_{x,i,m,j} + h_{x,i-1,m,j})}. \quad (17)$$

Производная $\partial T / \partial y$ на грани канонического элемента, лежащей в плоскости $y = y_{m+1/2,j}$, определяется следующим образом [5]. На координатной прямой $y = y_{m+1,j}$ выбираются две соседние узловые точки

$$(x_{i'',m+1,j}, y_{m+1,j}, z_j) \text{ и } (x_{i''+1,m+1,j}, y_{m+1,j}, z_j),$$

расположенные на ближайшем расстоянии от координатной поверхности $x = x_{i,m,j}$. Идентификация указанных точек сводится к поиску целочисленного значения i'' исходя из требования удовлетворения условия

$$\begin{aligned} & \left| x_{i'',m+1,j} - x_{i,m,j} \right| + \left| x_{i''+1,m+1,j} - x_{i,m,j} \right| = \\ & = \min \left(\left| x_{\zeta,m+1,j} - x_{i,m,j} \right| + \left| x_{\zeta+1,m+1,j} - x_{i,m,j} \right| \right), \end{aligned} \quad (18)$$

при $\zeta = 1, 2, \dots, I_{m,j} - 1$.

Далее строятся разностные аппроксимации уравнения (14) для двух случаев. Когда ось y' с началом в точке $(x_{i,m,j}, y_{m,j}, z_j)$ проходит через узловую точку $(x_{i'',m+1,j}, y_{m+1,j}, z_j)$ и производная

$$\begin{aligned} \partial T / \partial y' & \approx \delta_{y'} T_{i,m,j} = \\ & = (T_{i'',m+1,j} - T_{i,m,j}) / [h_{y,m,j}^2 + (x_{i'',m+1,j} - x_{i,m,j})^2]^{0,5}, \end{aligned}$$

а функция

$$\sin(y', x) = h_{y,m,j} / [h_{y,m,j}^2 + (x_{i'',m+1,j} - x_{i,m,j})^2]^{0,5},$$

разностная производная вдоль оси y равна

$$\begin{aligned} \delta_y T_{i,m+1/2,j}' & = \frac{T_{i'',m+1,j} - T_{i,m,j}}{h_{y,m,j}} + \frac{h'_{x,m+1,j}}{h_{y,m,j}} \frac{T_{i,m,j} - T_{i-1,m,j}}{h_{x,i-1,m,j}}, \\ h'_{x,m+1,j} & = x_{i,m,j} - x_{i'',m+1,j}. \end{aligned} \quad (19)$$

Когда ось y' проходит через узловую точку $(x_{i''+1,m+1,j}, y_{m+1,j}, z_j)$ производная вдоль оси y имеет вид

$$\begin{aligned} \delta_y T_{i,m+1/2,j}'' & = \frac{T_{i''+1,m+1,j} - T_{i,m,j}}{h_{y,m,j}} + \frac{h''_{x,m+1,j}}{h_{y,m,j}} \frac{T_{i+1,m,j} - T_{i,m,j}}{h_{x,i,m,j}}, \\ h''_{x,m+1,j} & = x_{i''+1,m+1,j} - x_{i,m,j}. \end{aligned} \quad (20)$$

Аппроксимирующие уравнения (19) и (20) вначале умножаются на подлежащие определению постоянные величины, а затем суммируются. Значения постоянных определяются из условия, чтобы погрешность аппроксимации, полученного путем суммирования выражения для нахождения производной $\partial T / \partial y$ в точке $(x_{i,m+1/2,j}, y_{m+1/2,j}, z_j)$ грани $y = y_{m+1/2,j}$ рассматриваемого канонического элемента, имела порядок $h_{x,i,m,j}^2 + h_{y,m,j}^2$. В результате находим

$$\begin{aligned} \delta_y T_{i,m+1/2,j} & = \\ & = \frac{(T_{i'',m+1,j} - T_{i,m,j}) h''_{x,m+1,j} + (T_{i''+1,m+1,j} - T_{i,m,j}) h'_{x,m+1,j}}{h_{y,m,j} (h'_{x,m+1,j} + h''_{x,m+1,j})} - \\ & - \frac{h'_{x,m+1,j} h''_{x,m+1,j}}{2h_{y,m,j}} \delta_{xx} T_{i,m,j}. \end{aligned} \quad (21)$$

Аналогично находится разностное выражение производной $\partial T / \partial y$ в точке $(x_{i,m,j}, y_{m-1,j}, z_j)$ грани $y = y_{m-1/2,j}$ канонического элемента

$$\begin{aligned} \delta_y T_{i,m-1/2,j} & = \\ & = \frac{(T_{i,m,j} - T_{i',m-1,j}) h''_{x,m-1,j} + (T_{i,m,j} - T_{i'+1,m-1,j}) h'_{x,m-1,j}}{h_{y,m-1,j} (h'_{x,m-1,j} + h''_{x,m-1,j})} - \\ & - \frac{h'_{x,m-1,j} h''_{x,m-1,j}}{2h_{y,m-1,j}} \delta_{xx} T_{i,m,j}. \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь

$$h'_{x,m-1,j} = x_{i,m,j} - x_{i',m-1,j}, \quad h''_{x,m-1,j} = x_{i'+1,m-1,j} - x_{i,m,j}.$$

Путем разложения входящих в полученную формулу (21) функций в ряд Тейлора относительно центральной точки грани $y = y_{m+1/2,j}$ рассматриваемого канонического элемента можно убедиться, что для нее погрешность аппроксимации имеет порядок $h_{x,i,m,j}^2 + h_{y,m,j}^2$. Следует отметить, что для равномерной сетки, а также в случаях, когда $h'_{x,m+1,j} = 0$ или $h''_{x,m+1,j} = 0$, т.е. когда одна из точек $(x_{i'',m+1,j}, y_{m+1,j}, z_j)$ или $(x_{i''+1,m+1,j}, y_{m+1,j}, z_j)$ лежит в плоскости $x = x_{i,m,j}$, формула (21) переходит в обычно применяемое в сеточных методах симметричное разностное выражение (аналогичное (15) для

$\delta_x T_{i+1/2,m}$), которое имеет также второй порядок точности относительно шага пространственной разбивки.

Разностные выражения производных $\partial W / \partial y$ и $\partial^2 W / \partial y^2$ в узловой точке $(x_{i,m,j}, y_{m,j}, z_j)$ имеют вид

$$\delta_y T_{i,m,j} = \alpha_y \delta_y T_{i,m+1/2,j} + (1 - \alpha_y) \delta_y T_{i,m-1/2,j}, \quad (23)$$

$$\alpha_y = h_{y,m-1} / (h_{y,m,j} + h_{y,m-1,j}),$$

$$\delta_y (\lambda \delta_y T)_{i,m,j} = \frac{\lambda_{i,m+1/2,j} \delta_y T_{i,m+1/2,j} - \lambda_{i,m-1/2,j} \delta_y T_{i,m-1/2,j}}{y_{m+1/2,j} - y_{m-1/2,j}}. \quad (24)$$

Смешанная производная $\partial^2 T / \partial x \partial y$ в точке $(x_{i,m,j}, y_{m,j}, z_j)$ находится по соотношениям (15), (16), в которые вместо символа T подставляется соответствующее разностное выражение производной по координате y .

При решении трехмерных задач переноса в областях с криволинейными границами необходимо проведение вычислений производных от искомым функций вдоль координаты z . Для нахождения на базе уравнения (13) производной $\partial T / \partial z$ с погрешностью порядка $h_{x,i,m,j}^2 + h_{y,m,j}^2 + h_{z,j}^2$ в точке $(x_{i,m,j}, y_{m,j}, z_{j+1/2})$ на верхней грани $z = z_{j+1/2}$ канонического элемента, требуется найти три узловые точки в плоскости $z = z_{j+1}$, которые расположены на ближайшем расстоянии от прямой пересечения координатных плоскостей $x = x_{i,m,j}$ и $y = y_{m,j}$. Для этого вначале в плоскости $z = z_{j+1}$ определяются две координатные прямые $y = y_{m',j+1}$ и $y = y_{m'+1,j+1}$, лежащие на кратчайшем расстоянии от поверхности $y = y_{m,j}$, по условию

$$\begin{aligned} & |y_{m'+1,j+1} - y_{m,j}| + |y_{m,j} - y_{m',j+1}| = \\ & = \min \left(|y_{g+1,j+1} - y_{m,j}| + |y_{m,j} - y_{g,j+1}| \right), \quad (25) \\ & g = 1, 2, \dots, M_j - 1. \end{aligned}$$

Находятся смещения идентифицированных координатных прямых $h'_y = y_{m,j} - y_{m',j+1}$ и $h''_y = y_{m'+1,j+1} - y_{m,j}$ относительно плоскости $y = y_{m,j}$. Далее по условию, аналогичному (18), находятся по две соседних узловых точки $(x'_{i',m',j+1}, y_{m',j+1}, z_{j+1})$ и $(x''_{i'+1,m'+1,j+1}, y_{m'+1,j+1}, z_{j+1})$ на прямой $y = y_{m',j+1}$, а $(x'_{i'',m'+1,j+1}, y_{m'+1,j+1}, z_{j+1})$ и $(x''_{i'+1,m'+1,j+1}, y_{m'+1,j+1}, z_{j+1})$ на прямой $y = y_{m'+1,j+1}$, а также их смещения $h'_{x1} = x'_{i',m',j+1} - x_{i,m,j}$, $h'_{x2} = x'_{i'+1,m'+1,j+1} - x_{i,m,j}$, $h''_{x1} = x'_{i'',m'+1,j+1} - x_{i,m,j}$, $h''_{x2} = x''_{i'+1,m'+1,j+1} - x_{i,m,j}$ относительно плоскости $x = x_{i,m,j}$. Одна из этих четырех точек, наиболее удаленная от узла $(x_{i,m,j}, y_{m,j}, z_{j+1/2})$, отбрасывается. Через каждую из трех оставшихся точек проводится полуоси z'_1, z'_2, z'_3 с началом в точке $(x_{i,m,j}, y_{m,j}, z_j)$. Направляющие косинусы углов, которые образует ось z' с координатными осями, определяются по выражениям:

$$\cos(z', x) = \frac{h'_x}{h'_z}, \quad \cos(z', y) = \frac{h'_y}{h'_z}, \quad \cos(z', z) = \frac{h_{z,j}}{h'_z},$$

$$\text{где } h'_z = \sqrt{(h'_x)^2 + (h'_y)^2 + h_{z,j}^2}.$$

Для каждой из трех полуосей z' записывается разностный аналог уравнения (13) вида

$$\delta_z T_{i,m,j+1/2} = (T_{i',m',j+1} - T_{i,m,j}) / h_{z,j} - T_{x,i,m,j+1/2} \cos(z', x) - T_{y,i,m,j+1/2} \cos(z', y). \quad (26)$$

Первое и второе уравнения полученной системы умножим на величины B_1 и B_2 , и просуммируем все три уравнения. Значения B_1 и B_2 находятся из условий обращения в нуль всех членов, содержащих в качестве сомножителя производные $T_{x,i,m,j+1/2}$ или $T_{y,i,m,j+1/2}$, которые не определены на поверхности $z_{j+1/2}$. Эти условия записываются следующим образом

$$B_1 \cos(z'_1, x) + B_2 \cos(z'_2, x) + \cos(z'_3, x) = 0;$$

$$B_1 \cos(z'_1, y) + B_2 \cos(z'_2, y) + \cos(z'_3, y) = 0.$$

В результате приходим к следующему выражению производной $\partial T / \partial z$ на грани $z = z_{j+1/2}$

$$\delta_z T_{i,m,j+1/2} = [(B_1 T'_{i_1, m'_1, j+1} + B_2 T'_{i_2, m'_2, j+1} + T'_{i_3, m'_3, j+1}) / (B_1 + B_2 + 1) - T_{i,m,j}] / h_{z,j}. \quad (27)$$

В случае, когда скорость изменения функции T вдоль оси z относительно невелика, можно ограничиться построением только одной полуоси z' и определять производную $\delta_z T_{i,m,j+1/2}$ непосредственно по уравнению (26). Разностное выражение $\delta_z T_{i,m,j-1/2}$ производной $\partial T / \partial z$ в точке $(x_{i,m,j}, y_{m,j}, z_{j-1/2})$ строится аналогично. Производные $\partial T / \partial z$ и $\partial^2 T / \partial z^2$ в узловой точке $(x_{i,m,j}, y_{m,j}, z_j)$ аппроксимируются выражениями

$$\delta_z T_{i,m,j} = \alpha_z \delta_z T_{i,m,j+1/2} + (1 - \alpha_z) \delta_z T_{i,m,j-1/2}, \quad (28)$$

$$\alpha_z = h_{z,i} / (h_{z,j+1} + h_{z,i}),$$

$$\delta_z (\lambda \delta_z T)_{i,m,j} = \frac{\lambda_{i,m,j+1/2} \delta_z T_{i,m,j+1/2} - T_{i,m,j-1/2} \delta_z T_{i,m,j-1/2}}{0,5(z_{j+1/2} + z_{j-1/2})}. \quad (29)$$

Балансные аппроксимации дифференциальных уравнений (5) – (7) на регуляризованной сетке строятся с использованием сеточных выражений (17), (24), (29) для вторых производных $\delta_{xx} T_{i,m,j}$, $\delta_{yy} T_{i,m,j}$, $\delta_{zz} T_{i,m,j}$ по пространственным координатам на основе трехслойной явной разностной схемы Никитенко Н.И. В координатах $x_1 = x$, $x_2 = y$ и $x_3 = z$ балансная аппроксимация уравнения (5) имеет вид

$$(1 + \Omega_{\text{ж}}) \frac{U_{\text{ж},i,m,j}^{n+1} - U_{\text{ж},i,m,j}^n}{l} - \Omega_{\text{ж}} \frac{U_{\text{ж},i,m,j}^n - U_{\text{ж},i,m,j}^{n-1}}{l} = \sum_{i=1}^3 [\delta_i (D_{\text{ж}} \delta_i U_{\text{ж}})_{i,m,j} + \delta_i (D_{\text{ж}} K_{\text{ж}} \delta_i T)_{i,m,j}] - I_V.$$

Аналогичным образом записываются аппроксимации уравнений (6) и (7). Условия устойчивости этих аппроксимаций не накладывают ограничений на шаги разностной сетки.

Граничные условия переноса энергии и массы вещества для двумерной области обычно могут быть представлены в виде

$$A_0 \frac{\partial T(x_{\Gamma}, y_{\Gamma}, t)}{\partial \nu} + A_1 T(x_{\Gamma}, y_{\Gamma}, t) + A_2 = 0, \quad (30)$$

где ν – нормаль к граничной поверхности в точке с координатами x_{Γ} и y_{Γ} ; A_0, A_1, A_2 – коэффициенты, которые могут быть функциями координат, времени и искомых функций.

Существенным при реализации метода канонических элементов является вопрос об аппроксимации граничных условия теплообмена. Для случая задания граничных условий первого рода выражение (30) приводится к виду

$$T(x_{\Gamma}, y_{\Gamma}, t) = T_{\Gamma}(x_{\Gamma}, y_{\Gamma}, t), \quad (31)$$

где $T_{\Gamma}(x_{\Gamma}, y_{\Gamma}, t)$ – заданная непрерывная функция. В простейшем случае $T_{\Gamma}(x_{\Gamma}, y_{\Gamma}, t) = \text{const}$.

При задании граничных условий второго рода ($A_0 \neq 0, A_1 = 0$) или третьего рода ($A_0 \neq 0, A_1 \neq 0, A_2 \neq 0$) процедура нахождения функции $T_{\Gamma}(x_{\Gamma}, y_{\Gamma}, t)$ усложняется и зависит от способа задания геометрии области. Если граничная поверхность рассматриваемой области задана аналитически, то координаты граничных узловых точек и направление нормали ν определяется соответствующими формулами дифференциальной геометрии. Когда граничная поверхность задается в виде таблицы координат некоторых точек граничной поверхности, координата граничной узловой точки и направление нормали в ней могут быть определены путем построения интерполирующей кривой или поверхности, проходящей через некоторое число соседних точек с заданными координатами. Для двумерных задач в качестве интерполирующей функции удобно использовать уравнение параболы, проходящей через три точки с за-

данными координатами, ближайшими к данному узлу. Направление нормали v в граничной узловой точке $(x_{I,m}, y_m)$ находится по уравнению параболы, проходящей через узловые точки $(x_{I,m}, y_{m-1})$, $(x_{I,m}, y_m)$, $(x_{I,m}, y_{m+1})$. Уравнение этой параболы удобно записать в виде

$$x = a_0 + a_1 \bar{y} + a_2 \bar{y}^2,$$

где \bar{y} – ось, параллельная координатной оси y , с началом в точке $(x_{I,m}, y_m)$. Вводя обозначения $h_1 = y_{m-1} - y_m$ и $h_2 = y_{m+1} - y_m$, после несложных выкладок находим:

$$a_0 = x_{I,m}, a_1 = \frac{(x_{I,m+1} - x_{I,m})h_1^2 - (x_{I,m-1} - x_{I,m})h_2^2}{h_1 h_2 (h_1 + h_2)},$$

$$a_2 = \frac{x_{I,m+1}h_1 + x_{I,m-1}h_2 - x_{I,m}(h_1 + h_2)}{h_1 h_2 (h_1 + h_2)}.$$

Величина a_1 представляет собой тангенс угла между положительными направлениями оси y и касательной τ к граничной поверхности в точке $(x_{I,m}, y_m)$, т.е. $\text{tg}(y, \tau) = a_1$. Поскольку $\text{tg}(y, v) = -\text{ctg}(y, \tau)$, $\text{tg}(x, v) = -\text{ctg}(x, \tau)$ и $\text{tg}(y, \tau) = \text{ctg}(x, v)$, то $\text{tg}(x, v) = -a_1$. Для квазиравномерной сетки, когда шаг вдоль оси y является равномерным, т.е. $h_2 = h_1 = h$, из выражения для a_1 следует, что $\text{tg}(x, v) = -(x_{I,m+1} - x_{I,m-1})/(2h)$.

Для нахождения температуры $T_{i,m}^{n+1}$ в некоторой граничной узловой точке при граничных условиях второго или третьего рода целесообразно ввести в рассмотрение приграничный элемент, одна из сторон которого образована граничной поверхностью. Для случая, когда угол β между осью x и нормалью к границе в узловой точке $(x_{f,m}, y_m)$ лежит в интервалах $0 < \beta < \pi/4$ и $3\pi/4 < \beta < 2\pi$, приграничный элемент четырехугольной формы образуется в окрестности узловой точки $(x_{f,m}, y_m)$ при помощи

граничной кривой и трех отрезков координатных прямых $y = y_{m-1/2}$, $y = y_{m+1/2}$, $x = x_{f,m} - h_{x,m}$, длины которых соответственно равны:

$$h_{x,m}^- = x_{f,m-1/2} - (x_{f,m} - h_{x,m}/2),$$

$$h_{x,m}^+ = x_{f,m+1/2} - (x_{f,m} - h_{x,m}/2), h_y.$$

При условии $\pi/4 < \beta < 3\pi/4$ приграничный элемент образуется в окрестности узловой точки $(x_i, y_{f,i})$ с использованием граничной кривой и отрезков координатными прямыми $x = x_{i-1/2}$, $x = x_{i+1/2}$, $y = y_{f,i-1/2} - h_{y,m}/2$, длины которых соответственно равны:

$$h_{y,i}^- = y_{f,i-1/2} - (y_{f,i} - h_y/2),$$

$$h_{y,i}^+ = y_{f,i+1/2} - (y_{f,i} - h_y/2), h_{x,m-1}.$$

Уравнение баланса энергии, аппроксимирующее уравнение $c\rho \partial T / \partial t = \lambda(\partial^2 T / \partial x^2 + \partial^2 T / \partial y^2)$ для четырехугольного приграничного элемента, имеющего площадь S_f и отвечающего точке (x_I, y_m) , в соответствии с трехслойной явной разностной схемой [3] можно записать в виде

$$S_f c \rho \left[(1 + \Omega_T) \frac{T_{I,m}^{n+1} - T_{I,m}^n}{l} - \Omega_T \frac{T_{I,m}^n - T_{I,m}^{n-1}}{l} \right] = \\ = \lambda (\delta_x T_{I-1/2,m} h_y + \delta_y T_{I,m-1/2} h_{x,m}^- - \\ - \delta_y T_{I,m+1/2} h_{x,m}^+) - q_f h_f. \quad (32)$$

Здесь S_f – площадь приграничного элемента, которая при условии, что кривизной участка h_f граничной поверхности, являющейся стороной этого элемента, можно пренебречь, равна

$$S_f = h_y (h_{x,m}^- + h_{x,m}^+) / 2.$$

В этом случае $h_f = [h_y^2 + (h_{x,m}^- - h_{x,m}^+)^2]^{0,5}$.

Тепловой поток q_f на внешней границе при условиях теплообмена второго рода считается заданным, а при условиях третьего рода он задается как функция температуры на внешней границе.

Если величина $h_{x,m}^-$, $h_{x,m}^+$, $h_{y,i}^-$ или $h_{y,i}^+$ окажется меньше нуля, что возможно на участке границы с большой кривизной, тогда эту величину (если она значительно меньше шага пространственной разбивки) можно положить равной нулю, либо внести коррективы в соотношение между шагами пространственной разбивки области, либо для данной граничной узловой точки вместо четырехугольного граничного элемента ввести элемент в виде обобщенного треугольника. В окрестности узловой точки $(x_{f,m}, y_m)$ при условии $x_{f,m-1/2} > x_{f,m+1/2}$, треугольный элемент образуется граничной кривой и двумя координатными прямыми $y = y_{m-1/2}$, $x = x_{f,m} + 1/2$. Для него уравнение баланса имеет вид

$$S_f c \rho \left[(1 + \Omega_T) \frac{T_{I,m}^{n+1} - T_{I,m}^n}{l} - \Omega_T \frac{T_{I,m}^n - T_{I,m}^{n-1}}{l} \right] = \lambda \left(\delta_x T_{I-1/2,m} h_y + \delta_y T_{I,m-1/2} h_{x,m}^- - \frac{q_f}{\lambda} h_f \right), \quad (33)$$

причем $S_f = h_y (x_{f,m-1/2} - x_{f,m+1/2}) / 2$ и

$$h_f = [h_y^2 + (x_{f,m-1/2} - x_{f,m+1/2})^2]^{0,5}.$$

В ряде случаев, например при аналитическом задании граничной поверхности и относительно небольших перепадах температуры на ней, удобно воспользоваться для нахождения искомой функции в граничных узловых точках выражением взаимосвязи производной $\partial T / \partial \nu$ с производными по направлениям координатной оси, скажем x , и касательной k к граничной поверхности [4]. Произведя выкладки, которые аналогичны выкладкам, связанным с получением уравнений (11), (12), находим:

$$\frac{\partial T}{\partial \nu} = \frac{1}{\cos(\nu, x)} \frac{\partial T}{\partial x} + \operatorname{tg}(\nu, x) \frac{\partial T}{\partial k}. \quad (34)$$

В соответствии с (34) уравнение (30) для точки $(x_{I,m}, y_m)$ аппроксимируется уравнением

$$A \left[\frac{1}{\cos(\nu, x)} \frac{T_{I,m}^{n+1} - T_{I-1,m}^{n+1}}{x_{I,m} - x_{I-1,m}} + \operatorname{tg}(\nu, x) \frac{T_{I,m+1}^n - T_{I,m-1}^n}{[h_{y,m}^2 + (x_{I,m+1} - x_{I,m-1})^2]^{0,5}} \right] + A_1 T_{I,m}^{n+1} + A_2 = 0. \quad (35)$$

Поскольку температура в граничных узловых точках находится после ее определения во внутренних точках, уравнение (35) приводится к явному виду.

Описанный метод решения был численно опробован при решении двумерной задачи сушки многосвязного капиллярно-пористого тела, представляющего собой керамический брус прямоугольного сечения с соотношением сторон 2:1 с двумя продольными каналами при условиях теплообмена третьего рода на внешних границах тела и каналов, когда $T_c = 373$ К, $T_0 = 293$ К и $\alpha = 45$ Вт/(м² К). Такого рода задачи возникают при сушке кирпичей с отверстиями круглого сечения. На рис. 1 представлены изолинии объемной концентрации жидкости и температуры в моменты времени $t = 4$ и $t = 20$ мин. Следует отметить, что изменение конфигурации тела приводит к перезадаанию массивов координат его граничных точек.

Численные эксперименты свидетельствуют о возможности построения единого программного комплекса для моделирования процессов обезвоживания многосвязных систем произвольной конфигурации с переменными теплофизическими характеристиками при произвольных начальных и граничных условиях с целью оптимизации режимов сушки.

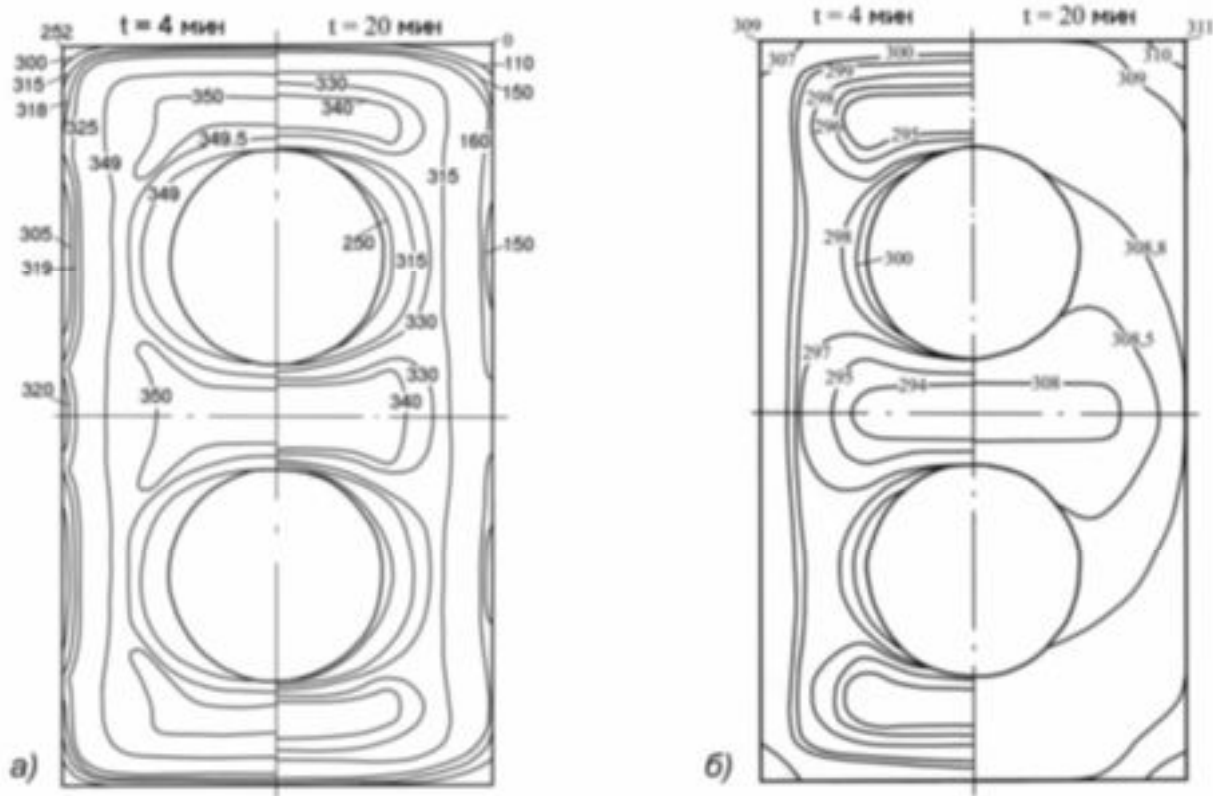


Рис. 1. Распределение объемной концентрации жидкости, $\text{кг}/\text{м}^3$ (а) и температуры, K (б) в керамическом брусе с двумя продольными цилиндрическими отверстиями в различные моменты времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. Никитенко Н.И., Снежкин Ю.Ф., Сорокова Н.Н. Динамика процессов тепломассопереноса, фазовых превращений и усадки при обезвоживании коллоидных капиллярно-пористых материалов // Пром. теплотехника. – 2003. – Т. 25, № 3. – С. 56 – 66.
2. Никитенко Н.И., Снежкин Ю.Ф., Сорокова Н.Н. Развитие теории и методов расчета тепломассопереноса при сушке пористого тела с многокомпонентными паровой и жидкой фазами // Инж.-физ. журн. – 2008. – Т. 81, № 6. – С. 1111–1124.
3. Никитенко Н.И., Кольчик Ю.Н., Сорокова Н.Н. Численный метод решения задач теплопроводности для тел сложной конфигурации // Инж.-физ. журн. – 1991. – Т. 61, № 5. – С. 851 – 857.
4. Никитенко Н.И. Об усовершенствовании метода канонических элементов для моделирования процессов переноса в системах с криволинейными границами // Инж.-физ. журн. – 1994. – Т. 66, № 6. – С. 710 – 714.

5. Никитенко Н.И., Кольчик Ю.Н. Метод канонических элементов для моделирования переносных процессов в многосвязных областях произвольной формы // Инж.-физ. журн. – 1999. – Т. 72, № 5. – С. 837 – 843.
6. Никитенко Н.И., Кольчик Ю.Н., Сорокова Н.Н. Метод канонических элементов для моделирования гидродинамики и тепломассообмена в областях произвольной формы // Инж.-физ. журн. – 2002. – Т. 75, № 6. – С. 74 – 80.
7. Никитенко Н.И., Снежкин Ю.Ф., Сорокова Н.Н., Кольчик Ю.Н. Метод математического моделирования теплопереноса и деформирования при ползучести // Математичне моделювання. – 2007. – № 2. – С. 74 – 82.
8. Никитенко Н. И. Исследование динамики испарения конденсированных тел на основе закона интенсивности спектрального излучения частиц // Инж.-физ. журн. – 2002. – Т. 75, № 3. – С. 128 – 134.

Получено 04.08.2009 г.