

УДК 532.5

**ВАЧАГИНА Е.К., ГАЛИУЛЛИНА Г.Р., ХАЛИТОВА Г.Р.***Исследовательский центр проблем энергетики**Учреждения Российской академии наук Казанского научного центра РАН*

## ЧИСЛЕННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ГИДРОДИНАМИКИ И ТЕПЛОПЕРЕНОСА ПРИ ТЕЧЕНИИ РЕОЛОГИЧЕСКИ СЛОЖНЫХ СРЕД В КОНВЕРГЕНТНО-ДИВЕРГЕНТНЫХ КАНАЛАХ

Представлено математичну модель, методику розрахунку та результати числових розрахунків теплообміну при течії реологічно складних субстанцій в конвергентно-дивергентних каналах, які мають широке застосування в якості основних елементів теплообмінних апаратів в важливих галузях хімічного та нафтохімічного виробництва.

Представлена математическая модель, методика расчета и численные результаты теплообмена при течении реологически сложных сред в конвергентно-дивергентных каналах, имеющих широкое применение в качестве основных элементов теплообменных аппаратов во многих отраслях химического и нефтехимического производства.

The mathematical model, solution methods and numerical results of the problem of heat exchange in a flow of rheologically complex fluids in convergent and divergent channels, widely used as main units of heat exchange equipments in many fields of chemical and petrochemical industry.

$A_0, A_\infty$  – предэкспоненты;  
 $B_0, B_\infty$  – энергии активации вязкого течения при  $\tau \rightarrow 0$  и  $\tau \rightarrow \infty$ ;  
 $c_p$  – удельная теплоемкость жидкости;  
 $D$  – диаметр;  
 $h$  – разность между max. и min. радиусом конвергентно-дивергентного канала;  
 $\mathbf{I}$  – единичный тензор;  
 $I_2$  – второй инвариант тензора скоростей деформации;  
 $\mathbf{\bar{n}}$  – нормаль к поперечному сечению канала;  
 $Nu$  – число Нуссельта для конвергентно-дивергентного канала;  
 $Nu_0$  – число Нуссельта для гладкой трубы;  
 $P$  – давление;  
 $Q$  – расход жидкости;  
 $R$  – универсальная газовая постоянная;  
 $Re$  – число Рейнольдса;  
 $S$  – длина повторяющейся конвергентно-дивергентной части канала;  
 $S_{бок}$  – площадь поверхности теплообмена конвергентно-дивергентного канала;  
 $S_{бок0}$  – площадь поверхности теплообмена гладкой трубы;  
 $\mathbf{T}$  – тензор напряжений;  
 $T$  – температура;  
 $T_0$  – температура жидкости на входе в канал;  
 $T_1$  – температура на границе канала;  
 $v_r, v_z$  – физические компоненты вектора скорости;  
 $\vec{v}$  – вектор скорости;

$\Phi_0, \Phi_\infty$  – текучесть при  $\tau \rightarrow 0$  и  $\tau \rightarrow \infty$ ;  
 $\lambda$  – теплопроводность жидкости;  
 $\mu$  – вязкость;  
 $\theta_0$  – предэкспонента;  
 $\theta$  – мера структурной стабильности жидкости;  
 $\rho$  – плотность жидкости;  
 $\Omega$  – область поперечного сечения канала;  
 $\tau_1$  – предел структурной стабильности жидкости;  
 $\tau$  – интенсивность касательных напряжений сдвига;  
 $\omega_\phi$  – окружная компонента вектора вихря;  
 $\xi$  – гидравлическое сопротивление в конвергентно-дивергентном канале;  
 $\xi_0$  – гидравлическое сопротивление в гладкой трубе;  
 $\psi$  – функция тока;  
 $\Gamma$  – граница области продольного сечения канала;  
**Индексы верхние:**  
 $T$  – символ транспонирования;  
 $S$  – реологическая константа;  
 МПН – метод переменных направлений.  
**Индексы нижние:**  
 $r, \phi, z$  – координаты цилиндрической системы координат;  
 $бок$  – боковая поверхность конвергентно-дивергентного канала;  
 $бок0$  – боковая поверхность гладкой трубы.

## Введение

Во многих отраслях химического и нефтехимического производства используются материалы, характеризующиеся наличием сложных реологических свойств, которые приводят к усложнению расчетов процессов теплообмена и затруднению в выборе оптимальных параметров, обеспечивающих заданные режимы работы технологического оборудования, в частности теплообменных аппаратов. Конвергентно-дивергентные каналы широко распространены в качестве основных элементов теплообменных аппаратов при переработке реологически сложных сред. Именно поэтому разработка математических моделей и методики расчета теплообмена в каналах такого типа является весьма актуальной задачей.

## Постановка задачи

Рассмотрим задачу теплообмена в конвергентно-дивергентных каналах при течении обобщенных ньютоновских жидкостей, подчиняющихся реологическому уравнению состояния дифференциального типа

$$\mathbf{T} = -P\mathbf{I} + \mu(I_2, T)\mathbf{B}_1, \quad (1)$$

где

$$I_2 = 4\text{tr}\mathbf{D}^2; \quad \mathbf{B}_1 = 2\mathbf{D}; \quad \mathbf{D} = \frac{1}{2}(\text{grad}\bar{\mathbf{v}} + (\text{grad}\bar{\mathbf{v}})^T).$$

В качестве конкретного вида зависимости вязкости  $\mu$  от  $I_2$  использовалось обобщенное реологическое уравнение Кутателадзе – Хабахпашевой [1,2]

$$d\varphi_* = -\varphi_*^s dt_*, \quad (2)$$

где  $\varphi_* = (\varphi_\infty - \Phi) / (\varphi_\infty - \varphi_0)$ ;

$$\tau_* = \theta \cdot (\tau - \tau_1) / (\varphi_\infty - \varphi_0),$$

$$\tau = \mu(I_2) \cdot \sqrt{I_2 / 2}; \quad \Phi = 1 / \mu(I_2).$$

Для практических расчетов была выбрана одна из разновидностей этой модели [3]

$$\varphi_* = \exp(-\tau_*). \quad (3)$$

Температурную зависимость вязкости удобнее всего представить через зависимость основных реологических параметров модели (3) в аррениусовском виде

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= A_0 \cdot \exp(-B_0 / (RT)), \\ \varphi_\infty &= A_\infty \cdot \exp(-B_\infty / (RT)), \\ \theta &= \theta_0 \cdot \exp(-B_\theta / (RT)). \end{aligned} \quad (4)$$

При построении математической модели принимались следующие допущения: 1) течение жидкости ламинарное, установившееся, со сформировавшимся профилем скорости на входе в канал; 2) плотность, удельная теплоемкость и теплопроводность среды в ходе процесса меняются незначительно; 3) силы тяжести входят в уравнения неявно через избыточное давление; 4) распределение вектора скорости симметрично относительно произвольных поворотов вокруг оси  $Oz$  или  $\frac{\partial v_i}{\partial \varphi} = 0$ , где  $i = r, \varphi, z$ .

Введем цилиндрическую систему координат, ось  $Oz$  которой направлена вдоль оси трубы. Геометрическая область течения представляет собой периодически повторяющиеся конвергентные и дивергентные каналы, образованные коническими поверхностями. Продольное сечение такой геометрической области, представлено на рис. 1.

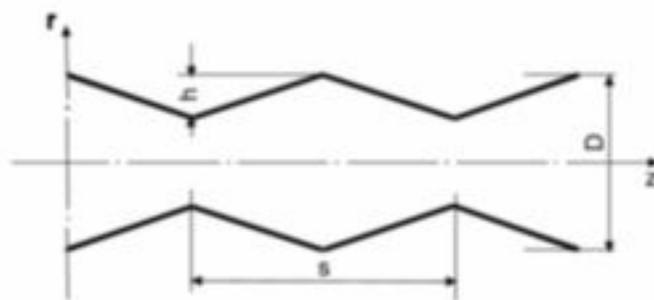


Рис. 1. Продольное сечение конвергентно-дивергентного канала.

Математическая модель базируется на фундаментальной системе уравнений механики сплошных сред: уравнений сохранения массы, переноса количества движения и переноса теплоты. Одной из наиболее удобных форм уравнений, описывающих течение несжимаемых сред при отсутствии за-

данных граничных условий для давления, является форма уравнений, полученная введением новых переменных вихрь-функция тока:

$$\omega_\varphi = \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}, \quad v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad v_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (5)$$

Введение функции тока  $\psi$  позволяет удовлетворить уравнению неразрывности. Далее применяем операцию **rot** к динамическому уравнению

$$\rho(\text{grad}(\vec{v} \cdot \vec{v})) = -\text{grad}P + \text{div}\mathbf{T}^0,$$

где  $\mathbf{T}^0 = \mu(I_2, T)\mathbf{B}_1$  – девиаторная часть тензора напряжений, и, проецируя на ось  $\varphi$  окончательно получим

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\omega_\varphi}{r} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\omega_\varphi}{r} \right) \right) &= \frac{\partial}{\partial r} \left( \mu(I_2, T) \frac{1}{r} \frac{\partial r \omega_\varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu(I_2, T) \frac{\partial \omega_\varphi}{\partial z} \right) + \\ + 2 \frac{\partial^2 \mu(I_2, T)}{\partial r \partial z} \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \right) &+ \left( \frac{\partial^2 \mu(I_2, T)}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \mu(I_2, T)}{\partial r^2} \right) \left( \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) - \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \right) &+ \frac{\partial \mu(I_2, T)}{\partial r} \frac{\partial \omega_\varphi}{\partial r} + \frac{\partial \mu(I_2, T)}{\partial z} \frac{\partial \omega_\varphi}{\partial z}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\text{где } I_2 = 2 \left( 2 \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right)^2 + \frac{2}{r^4} \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \right)^2 + 2 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right)^2 \right). \quad (7)$$

По определению

$$\omega_\varphi = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right). \quad (8)$$

Добавим уравнение теплопереноса, записанное через вихрь-функцию тока

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial z} &= \\ = \frac{\lambda}{\rho c_p} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right], \end{aligned} \quad (9)$$

Краевые условия для данной задачи записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \omega_\varphi|_r &= \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \Big|_r, \\ \frac{\partial \psi}{\partial r} \Big|_r &= 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} \Big|_r = 0; \quad T_r|_r = T_1, \end{aligned} \quad (10)$$

$$v_r|_{z=0} = 0; \quad v_z|_{z=0} = \frac{2Q(R^2 - r^2)}{\pi R^4}; \quad T|_{z=0} = T_0, \quad (11)$$

где  $R = \frac{D}{2}$ . Кроме этого будем считать, что выполняется условие постоянства расхода через поперечное сечение канала  $Q = \iint_{\Omega} (\vec{v} \cdot \vec{n}) d\Omega$ .

Таким образом, получаем систему дифференциальных уравнений (6) – (8) с краевыми условиями (10) – (11), описывающих течение обобщенной ньютоновской жидкости в конвергентно-дивергентном канале.

### Метод решения задачи

Решение поставленной задачи для произвольных зависимостей  $\mu(I_2, T)$  невозможно получить в явном виде из-за сложностей, связанных с нелинейным характером операторов, соответствующих старшим производным уравнений системы, нелинейности конвективных членов уравнений переноса. Поэтому поиск решения такой системы проводился с помощью численных методов, при этом ал-

горитм был построен на базе итерационных методов.

Эллиптический характер используемых уравнений математической модели диктует необходимость постановки граничных условий на выходе из каналов, которые заранее неизвестны. Рассмотрим вместо действительной геометрической области определения переменных задачи видоизменённую теоретическую область, полученную из данной увеличением длины канала до таких размеров, при которых происходит стабилизация как температурных, так и скоростных полей. При этом эту часть канала можно для простоты принять в виде круглой трубы, а граничные условия для температуры на продолженных границах принять в наиболее простом виде, т.е. в виде граничных условий второго

рода  $\frac{\partial T}{\partial r} = 0$ , обеспечивающих тепловую изоляцию

границ. На этих же границах принимаются также гидродинамические граничные условия прилипания. В качестве граничных условий на выходе из таких продолженных каналов принимаются граничные условия стабилизации искомых полей по длине каналов:  $\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, v_r = 0, \frac{\partial T}{\partial z} = 0$ . Согласно

принципу локального действия, справедливому для нелинейно-вязких сред решение поставленной для действительной геометрической области задачи будет практически совпадать с решением, полученным для видоизмененной области, за исключением произвольно малой окрестности граничных точек, соответствующих выходу из реально существующих каналов, т.е. основные интегральные характеристики интенсивности теплообменных процессов в обоих случаях будут совпадать.

Решение каждого из эллиптических уравнений, общий вид которых можно представить в виде

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( k_1(r, z) \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_2(r, z) \frac{\partial U}{\partial z} \right) = -f(r, z),$$

проводилось методом переменных направлений (МПН) [4]. При этом для уравнений (6) и (8) вводились дополнительные итерации, так как свободные члены уравнений представляют собой функции, зависящие от искомой функции. Для решения краевой задачи (6)-(8), (10)-(11) использовался итераци-

онный алгоритм, представляющий последовательное решение уравнений системы с использованием результатов, полученных на предыдущей итерации. В качестве начальных условий можно использовать любое заданное распределение температуры, концентрационных и гидродинамических полей. В качестве первого приближения можно использовать любое заданное распределение температуры и гидродинамических полей, например,  $T = T_0$  и распределение скорости, соответствующее ньютоновскому при данной температуре и  $\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, v_r = 0$ .

### Результаты численных расчётов

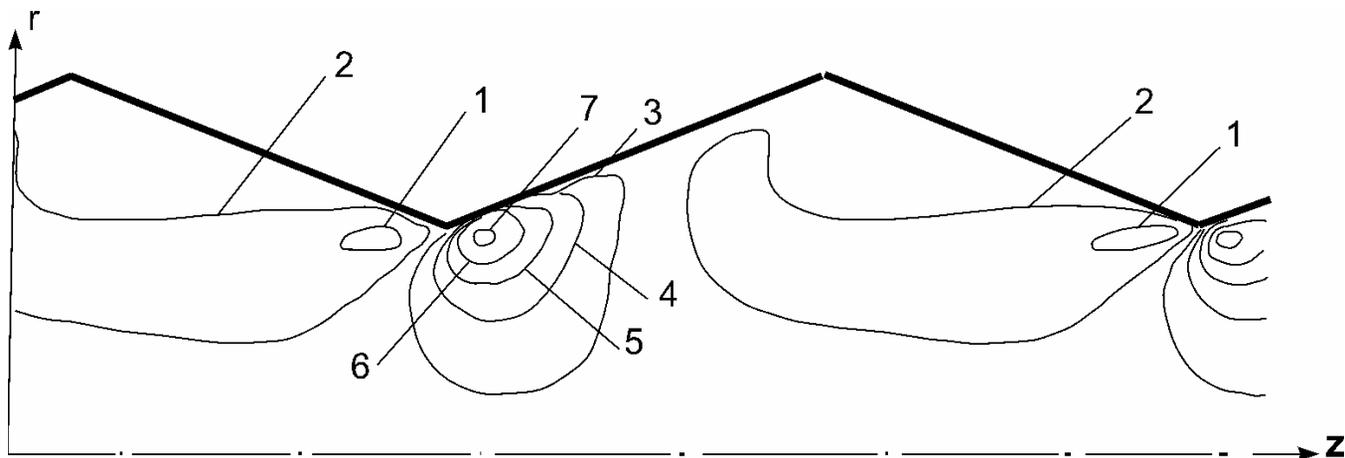
В качестве рабочей среды в численных расчетах использовался 0,65% раствор Na-КМЦ, обладающий псевдопластичными свойствами поведения. Реологические константы для модели (2)-(4), полученные экспериментальным путем в [5], определяют зависимость функции вязкости от градиента скорости. Однако, неявный характер зависимости, предполагает итерационный метод определения  $\mu(I_2, T)$ . Чтобы избежать дополнительных итераций в расчетах была получена явная зависимость, имеющая следующий вид

$$\begin{aligned} \mu(I_2, T) = & 0,0756312 - \\ & -9,04 \cdot 10^{-6} * I_2 - 3,26 \cdot 10^{-10} \cdot I_2^2 + \\ & + \frac{0,492196(1,0561 + 0,0199 \cdot I_2)}{50 + I_2} - \\ & -3,4 \cdot 10^{-4} \cdot T + 2,39 \cdot 10^{-8} \cdot I_2 \cdot T + 4,02 \cdot 10^{-7} \cdot T^2. \end{aligned} \quad (12)$$

Для  $0 < I_2 < 600$  и  $293K < T < 353K$  средне-квадратическая погрешность этой формулы составляет  $\approx 0,16\%$ .

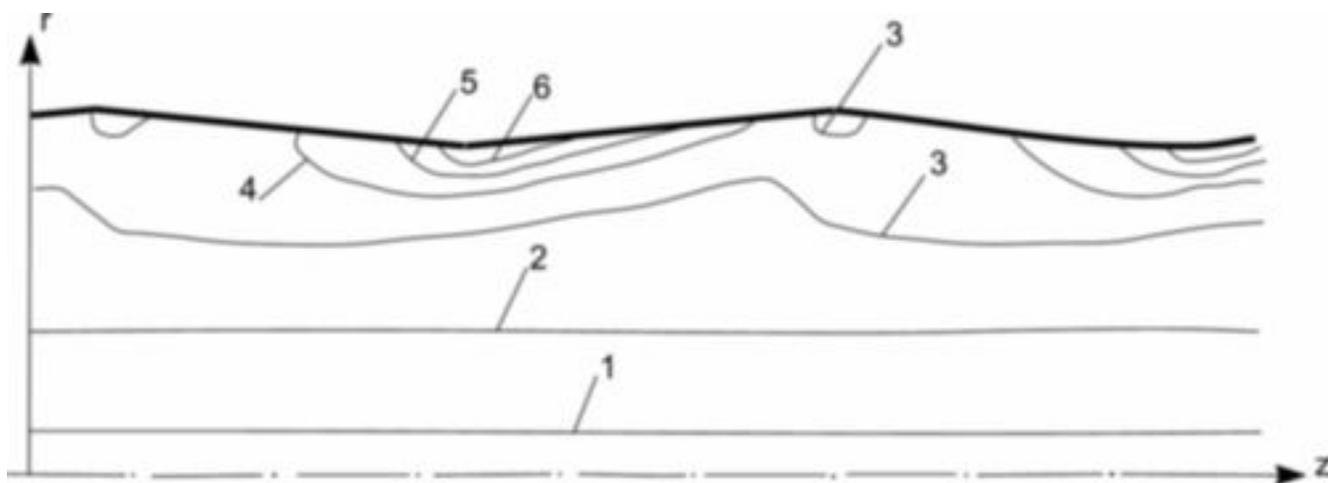
Для получения физической картины распределения скоростного и температурных полей, а также проведения сравнительного анализа интенсивности теплообмена и гидравлического сопротивления расчеты проводились для различных отношений геометрических характеристик конвергентно-дивергентных каналов.

Течение в конвергентно-дивергентных каналах характеризуется наличием радиальной составляю-



**Рис. 2. Линии равных значений радиальной составляющей вектора скорости, отнесенной к среднему значению скорости  $\frac{v_r}{|\bar{v}|}$  в продольном сечении**

**конвергентно-дивергентного канала с параметрами  $S/D=1$ ,  $h/D=0,2$  и  $Re=140$ : 1 – 0,017; 2 – -0,017; 3 – 0,05; 4 – -0,083; 5 – -0,117; 6 – -0,15; 7 – -0,183.**



**Рис. 3. Линии равных значений  $\omega_\varphi$ , в продольном сечении конвергентно-дивергентного канала с параметрами  $S/D=1$ ,  $h/D=0,1$  и  $Re=105$ : 1 – 0,2; 2 – 0,7; 3 – 1,2; 4 – 1,7; 5 – 2,2; 6 – 2,7.**

щей вектора скорости, которая принимает максимальное значение в области соединения конвергентной и дивергентной частей. На рисунке 2 представлено ее изменение вдоль канала.

Описание движения в конвергентно-дивергентном канале дополняет распределение компоненты  $\omega_\varphi$  вектора вихря, представленное на рис. 3.

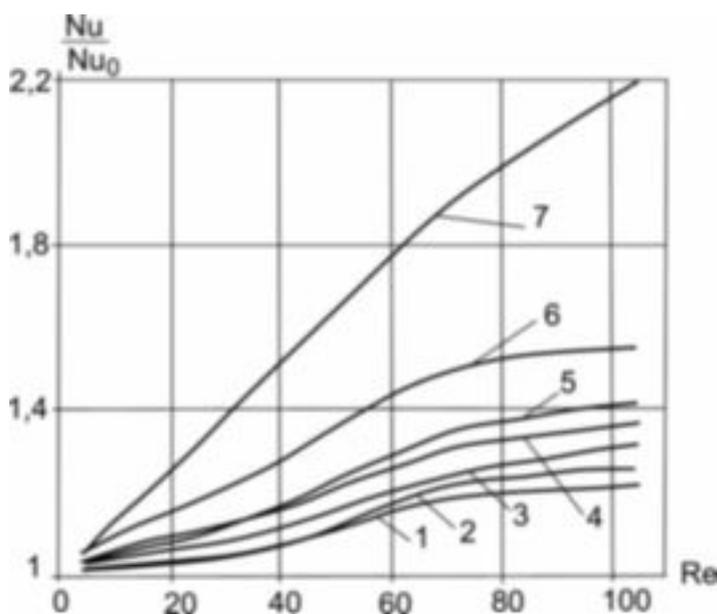
Интенсивность теплообмена конвергентно-дивергентных каналах будем представлять отноше-

нием  $\frac{Nu}{Nu_0}$ , где  $Nu_0$  – число Нуссельта при течении

в гладкой трубе с радиусом  $D/2$ . Результаты численных расчетов для различных соотношений геометрических характеристик каналов представлены на рисунке 4. Как видно увеличение отношения  $\frac{h}{D}$  ведет к улучшению показателя интенсивности

теплообмена (кривые 1, 5, 7), что можно объяснить

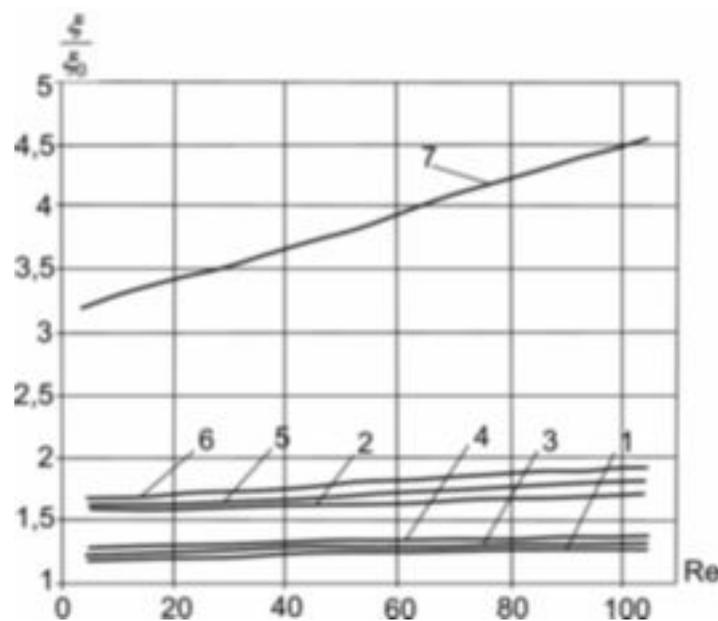
как увеличением поверхности теплообмена, так и изменением гидродинамической картины течения, характеризующейся образованием макровихрей и большим значением средней скорости течения. Аналогичная картина наблюдается при сравнении кривых 6, 5 и 2, имеющих одинаковое отношение  $h/D=0.1$  и разные длины повторяющейся конвергентно-дивергентной части канала  $S/D$ . В каналах, имеющих одинаковую площадь поверхности теплообмена (например, для кривых 7, 6 и 4  $\frac{S_{бок}}{S_{бок0}}=1,02$ ) отношение  $\frac{Nu}{Nu_0}$  больше в тех каналах, размер области течения которых меньше и соответственно больше средняя скорость течения. Для кривых 7, 6, 4 это значение, отнесенное к размеру области течения в гладкой трубе, соответственно равно 0,8; 0,9; 0,95.



**Рис. 4. Интенсивность теплообмена в конвергентно-дивергентных каналах с различными геометрическими размерами:**  
 1 –  $S/D=2$ ,  $h/D=0,05$ ; 2 –  $S/D=5$ ,  $h/D=0,1$ ;  
 3 –  $S/D=1$ ,  $h/D=0,05$ ; 4 –  $S/D=0,5$ ,  $h/D=0,05$ ;  
 5 –  $S/D=2$ ,  $h/D=0,1$ ; 6 –  $S/D=1$ ,  $h/D=0,1$ ;  
 7 –  $S/D=2$ ,  $h/D=0,2$ .

Геометрические размеры конвергентно-дивергентных каналов оказывают также существенное влияние и на значение гидравлического сопротивления, которое зависит от затраты энергии на трение между жидкостью и стенкой, от изменения

скорости и кинетической энергии потока (вследствие перестройки профиля скорости). На рис. 5 представлены кривые для каналов с различными геометрическими характеристиками, представляющие изменение гидравлического сопротивления в зависимости от числа Рейнольдса. Расположение кривых 7, 5 и 1 убедительно иллюстрирует тот факт, что увеличение отношения  $h/D$  ведет к увеличению гидравлического сопротивления. Закономерность влияния отношения  $S/D$  при прочих равных условиях также не вызывает сомнения (кривые 5, 2, 6): чем больше значение  $S/D$ , тем меньше гидравлическое сопротивление канала.



**Рис. 5. Изменение гидравлического сопротивления в зависимости от числа Re. Обозначения такие же, как на рис. 4.**

### Выводы

Представленная математическая модель и метод решения позволили провести комплекс численных исследований процессов теплопереноса и гидродинамики при ламинарных течениях реологически сложных сред в конвергентно-дивергентных каналах теплообменного оборудования и определить влияние геометрических характеристик исследуемых каналов на гидродинамику и интенсивность теплообмена.

Отношение  $\frac{Nu}{Nu_0} / \frac{\xi}{\xi_0}$ , характеризующее тепло-гидравлическую эффективность, в исследованном

диапазоне геометрических параметров конвергентно-дивергентных каналов не превышает единицы. Полученный результат согласуется с результатами аналогичных исследований, представленных, например, в работе [6]. Подобные геометрические размеры можно использовать в тех случаях, когда имеются запасы мощности на прокачку жидкости.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Кутателадзе С.С.* Основы теории теплообмена. М.: Атомиздат, 1979. – 415 с.
2. *Кутателадзе С.С., Хабахнашева Е.М., Лемберский В.Б., Попов В.И.* Некоторые вопросы гидродинамики и теплообмена структурно-вязких сред // В кн.: Тепло- и массообмен в неньютоновских жидкостях. – М.: Энергия, 1968. – С. 69-90.
3. *Кутателадзе С.С., Попов В.И., Хабахнашева Е.М.* К гидродинамике жидкостей с переменной вязкостью // ПМТФ. – 1966. – № 1. – С.45-49.
4. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. – М.: Наука, 1983. – 616 с.
5. *Назмеев Ю.Г.* Тепломассоперенос в трубчатых реакторах гомофазной полимеризации. Дис. на соиск. уч. степ. докт. техн. наук. МЭИ, Казанский филиал, Казань, 1986. – 349с.
6. *Tanda G., Vittori G.* Fluid flow and heat transfer in a two-dimensional wavy channel //Heat and Mass Transfer 31. - 1996.- С.411-418.

*Получено 29.09.2009 г.*