

УДК 532.529

БЕЗРОДНЫЙ М.К., ПИСЬМЕННЫЙ Е.Н., ТУЗ В.Е., ЛЕБЕДЬ Н.Л.

Национальный технический университет Украины
«Киевский политехнический институт»

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАЗРЫВА ПЛЕНКИ ЖИДКОСТИ ПРИ ГРАВИТАЦИОННОМ ТЕЧЕНИИ ПО ВЕРТИКАЛЬНЫМ ПОВЕРХНОСТЯМ С СЕТОЧНЫМ ПОКРЫТИЕМ

Наведено теоретичний аналіз задачі розриву плівки рідини при гравітаційній течії по вертикальним поверхням з сітковим покриттям. Чисельно визначена мінімальна товщина плівки в залежності від геометричних характеристик сітки, яка задовільно узгоджується з експериментальними даними.

Представлен теоретический анализ задачи разрыва плёнки жидкости при гравитационном течении по вертикальным поверхностям с сеточным покрытием. Численно определена минимальная толщина плёнки в зависимости от геометрических характеристик сетки, которая удовлетворительно согласуется с экспериментальными данными.

The problem of a liquid film discontinuity under gravitational flow over a vertical grid covered surface was theoretically analyzed in the work. The minimum film thickness response of geometric characteristics of the grid was quantified. The result well conforms to experimental data.

d – диаметр;

g – ускорение свободного падения;

R – радиус;

S – размер ячейки в свету;

x, y – координаты;

Γ – плотность орошения;

δ – толщина плёнки;

ρ – плотность;

σ – коэффициент поверхностного натяжения;

θ – краевой угол смачиваемости.

Индексы:

min – минимальное значение;

пр – проволока,

м – точка М.

Физическая модель разрыва пленки жидкости

Исследование гидродинамики двухфазных кольцевых систем в каналах с сеточным покрытием стенок позволило установить, что при плотностях орошения близких к минимальным толщина плёнки жидкости практически постоянна и при уменьшении плотности орошения Γ происходит утончение сечения жидкости в зоне между плёнкой и нижней образующей проволоки сетки. При смыкании кривых, описывающих профиль плёнки в ячейке сетки, в сечении с максимальным удалением проволоки от поверхности канала происходит её разрыв. Возникшее при этом возмущение приводит к разрыву основной плёнки. Схема процесса в момент разрыва плёнки жидкости в различных сечениях ячеек сетки изображена на рис.1.

Введение

Гравитационное течение плёнки жидкости по вертикальной стенке канала с сеточным покрытием имеет ряд особенностей, которые существенно усложняют процесс и механизм разрыва плёнки с переходом в ручейковое течение. В отличие от гладкой поверхности, где условие разрыва плёнки определяется физическими свойствами жидкости, смачиваемостью поверхности и зависит от баланса сил, действующих на элементарный объём плёнки [1, 3-7], для поверхности с сеточным покрытием необходимо дополнительно учитывать капиллярные эффекты в ячейке сетки.

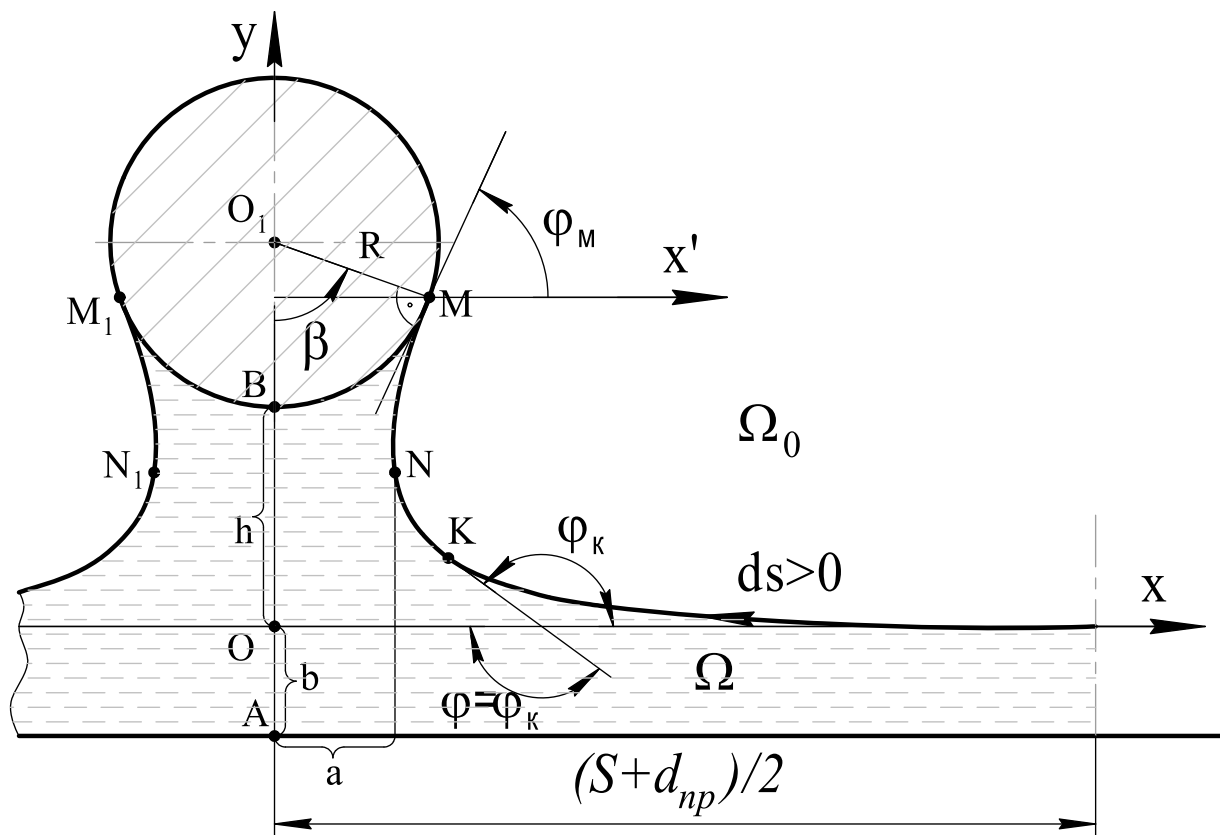


Рис.1. К определению профиля поверхности пленки жидкости у основания проволоки сетки.

Таким образом, для определения минимальной плотности орошения необходимо определить функцию, описывающую профиль между плёнкой и поверхностью проволоки в соответствующих сечениях ячейки. Учитывая симметричность ячейки сетки относительно своих осей, предположим, что процесс изменения профиля сечения плёнки происходит также симметрично.

Аналитическая модель разрыва пленки жидкости

Жидкость будем считать несжимаемой. Поверхность канала и проволок сетки предполагается твёрдой и гладкой, изготовленной из одного материала.

Жидкость, газ или пар, материал ячейки и стенки канала будем считать однородными, а их физические свойства постоянными. Будем предполагать, что при отсутствии в жидкости поля скоростей, т.е. при $\Gamma \rightarrow \Gamma_{min} \quad u \rightarrow 0$, все действующие на неё массовые силы не зависят от времени и занимаемой области Ω . Их объёмную плотность обозначим че-

рез $\rho F(x)$. Предположим, что поле массовых сил имеет потенциал

$$F(x) = \nabla \Pi. \tag{1}$$

Наличие потенциала $F(x)$ является необходимым условием для существования равновесных состояний плёнки жидкости. Стационарность этого поля также становится необходимым условием при наличии у жидкости свободной поверхности.

Полная потенциальная энергия U жидкости в ячейке сетки на стенке канала, связанная с поверхностными и массовыми силами, в положении равновесия принимает стационарное значение [2, 8], что даёт возможность для вывода условий равновесия.

Для того, чтобы некоторое положение плёнки жидкости в ячейке сетки на стенке канала было равновесным, должны выполняться: зависимость Эйлера в области Ω

$$\nabla P = F\rho; \tag{2}$$

зависимость Лапласа для перепада давления на поверхности раздела жидкости и газа или пара

$$P_0 - P = \sigma \cdot (k_1 + k_2), \quad (3)$$

где $P_0 = \text{const}$ – давление газовой (паровой) фазы, k_1 и k_2 – кривизны главных нормальных сечений плёнки жидкости в ячейке сетки и на стенке канала; условие Дюпре-Юнга на линии контакта L и по обвивающей проволоки сетки

$$\sigma \cdot \cos \theta = \sigma_0 - \tilde{\sigma}, \quad (4)$$

либо

$$\sigma \cdot \cos \theta_0 = \tilde{\sigma} - \sigma_0, \quad (5)$$

из которого следует, что устойчивое соприкосновение плёнки жидкости и газа (пара) с твёрдым телом возможно только в случае, когда выполняется неравенство

$$|\sigma_0 - \tilde{\sigma}| \leq \sigma. \quad (6)$$

Для однородных сред коэффициенты σ , σ_0 и $\tilde{\sigma}$ – постоянные величины и, следовательно, краевые углы θ и θ_0 также постоянны. Следует отметить, что значения коэффициентов поверхностного натяжения и краевых углов смачивания зависят не только от комбинации «твёрдое тело-жидкость-газ», но и от действительного состояния поверхности контакта, то есть наличия микротрещин либо деформаций, вызванных механической либо термической обработкой, а также примесей в жидкости и газе (паре) [2].

Из равенств (1) и (2) следует, что:

$$\nabla P = -\rho \nabla \Pi, \quad (7)$$

или в объёме жидкости Ω :

$$P = -\rho \Pi + \text{const}. \quad (8)$$

Теперь условие Лапласа (3) принимает вид:

$$\sigma \cdot (k_1 + k_2) = \rho \Pi + c. \quad (9)$$

Таким образом, для равновесия жидкости необходимо и достаточно, чтобы были выполнены равенства (9) на свободной поверхности и (4), (5) на линии контакта. Именно эти условия используются для нахождения форм равновесных поверхностей жидкости [8]. При этом равенство (9) описывает профиль поверхности, а выражения (4) и (5) определяют граничные условия.

Учитывая приведенные зависимости, определим характер изменения сечения плёнки жидкости. Для этого необходимо определить функцию кривой, описывающую профиль поверхности плёнки в ячейке сетки. Учитывая, что диаметр канала значительно превосходит размер ячейки сетки, т.е. $d \gg (S + d_{\text{пр}})$, будем считать поверхность, на которой расположена сетка, в границах ячейки плоской.

Выберем прямоугольную декартову систему координат, таким образом, что ось Ox направлена слева направо по нижнему краю плёнки жидкости, а ось Oy – снизу вверх и проходит через центр сечения проволоки O_1 . Схема сечения ячейки и плёнки жидкости на стенке канала изображена на рис.1, где K – произвольная точка на криволинейном профиле L края жидкости, $\varphi = \varphi_k$ – угол, который составляет касательная к L в точке K с положительным направлением оси Ox .

Согласно закону Лапласа, с учётом того, что ячейка симметрична $k_1 = k_2$:

$$\rho \cdot g \cdot y = 2 \cdot \sigma \cdot k, \quad (10)$$

где y – координата точки K .

Умножим обе части выражения (10) на приращение dS дуги L так, что $dS > 0$ при увеличении значения y , т.е. при $dy > 0$:

$$\rho \cdot g \cdot y \cdot dS = 2 \cdot \sigma \cdot k \cdot dS. \quad (11)$$

По определению абсолютного значения кривизны k :

$$k = -\frac{d\varphi}{dS} \quad (12)$$

или

$$k \cdot dS = -d\varphi. \quad (13)$$

Из выражений (11) и (13) следует

$$\rho \cdot g \cdot y \cdot dS + 2 \cdot \sigma \cdot d\varphi = 0. \quad (14)$$

Кроме того, из рис.1 очевидны следующие соотношения:

$$dx = ds \cdot \cos \varphi, \quad (15)$$

$$dy = ds \cdot \sin \varphi. \quad (16)$$

Умножим выражение (14) на $\cos \varphi$ и с учётом (15) получим:

$$\rho \cdot g \cdot y \cdot dx + 2 \cdot \sigma \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi = 0. \quad (17)$$

Умножим выражение (14) на $\sin \varphi$ и с учётом (16) получим:

$$\rho \cdot g \cdot y \cdot dy + 2 \cdot \sigma \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi = 0. \quad (18)$$

В результате получаем систему дифференциальных уравнений (17) и (18) с граничными условиями:

$$x|_{\varphi=\pi/2} = a \quad (\text{точка } N \text{ на рис.1}), \quad (19)$$

$y|_{\varphi=\pi} = 0$ (точка на оси Ox , соответствующая $x \rightarrow \infty$ на рис 1, фактически на оси симметрии ячейки сетки).

Анализ аналитической модели

Разрыв плёнки произойдет, когда толщина минимального сечения стыковой части плёнки

$$N_1 N = 2a \rightarrow 0.$$

Введём обозначение:

$$P = 2 \cdot \sqrt{\frac{\sigma}{\rho \cdot g}}. \quad (20)$$

Тогда умножая выражение (18) на $\frac{2}{\rho \cdot g}$ получим

$$2 \cdot y \cdot dy + 2 \cdot P^2 \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{\varphi}{2} \cdot d\varphi = 0. \quad (21)$$

В результате интегрирования имеем:

$$dy^2 + 2 \cdot P^2 \cdot d\left(\sin \frac{\varphi}{2}\right)^2 = 0, \quad (22)$$

отсюда получаем

$$y^2 + 2 \cdot P^2 \cdot \sin \frac{\varphi}{2} = C_1. \quad (23)$$

С учётом граничных условий (19), $y|_{\varphi=\pi} = 0$, получаем

$$C_1 = 2 \cdot P^2 \quad (24)$$

и, подставляя в (23), после преобразований получим:

$$y = \sqrt{2} \cdot P \cdot \cos \frac{\varphi}{2}, \quad (25)$$

Учитывая, что $y \geq 0$, $\frac{\varphi}{2} \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ или $\varphi \in (0; \pi)$ и подставляя (25) в выражение (17) получим дифференциальное уравнение

$$\frac{4 \cdot \sigma}{P^2} \cdot (P \cdot \cos \frac{\varphi}{2}) dx + 2 \cdot \sigma \cdot \cos \varphi d\varphi = 0. \quad (26)$$

В результате решения уравнения (26) получаем, что при условии $\sigma \neq 0$ и $\frac{\varphi}{2} \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

$$dx = -\frac{P}{2} \cdot \frac{\cos \varphi}{\cos \frac{\varphi}{2}} d\varphi = 0, \quad (27)$$

отсюда

$$\begin{aligned} x &= \frac{P}{2} \cdot \int \frac{1 - 2 \cdot \cos^2 \frac{\varphi}{2}}{\cos \varphi} d\varphi = \\ &= P \cdot \left[\int \frac{d\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\cos \frac{\varphi}{2}} - \int \cos \frac{\varphi}{2} d\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right] = \\ &= P \cdot \left[\ln \left| \operatorname{tg} \frac{\varphi + \pi}{4} \right| - 2 \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \right] + C_2. \end{aligned} \quad (28)$$

С учётом граничных условий (19), $x|_{\varphi = \pi/2} = a$, получаем

$$C_2 = a + P \cdot \left[\sqrt{2} - \ln \left(\operatorname{tg} \frac{3\pi}{8} \right) \right]. \quad (29)$$

Поскольку в момент разрыва плёнки отрезок N_l становится равным нулю, то $a = 0$ и выражение, описывающее кривую профиля плёнки жидкости L , имеет параметрический вид:

$$x = P \cdot \begin{cases} \ln \left(\operatorname{tg} \frac{\varphi + \pi}{4} \right) + \\ 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin \frac{\varphi}{2} \right) \end{cases}. \quad (30)$$

Произведём подстановку (20) в (30), в результате параметрическое уравнения кривой L с параметром φ для кривой в момент разрыва плёнки жидкости имеет вид:

$$\left\{ x = 2 \cdot \sqrt{\frac{\sigma}{\rho \cdot g}} \cdot \begin{cases} \ln \left[(\sqrt{2} - 1) \cdot \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\varphi + \pi}{4} \right) \right| \right] + \\ + \sqrt{2} - 2 \cdot \sin \left(\frac{\varphi}{2} \right) \end{cases} \right\}, \quad (31)$$

$$\left\{ y = 2 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \sigma}{\rho \cdot g}} \cdot \cos \frac{\varphi}{2} \right\}. \quad (32)$$

В результате преобразования последнего выражения получим

$$\begin{aligned} & 4 \cdot \frac{\sigma}{\rho \cdot g} \cdot \left(3 + \left[1 - \sqrt{2} \cdot \sin \left(\frac{\varphi_M}{2} \right) \right]^2 + 2\sqrt{2} \cdot \left(1 - \sqrt{2} \cdot \sin \left(\frac{\varphi_M}{2} \right) \right) \cdot \ln \left[(\sqrt{2} - 1) \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\varphi_M + \pi}{4} \right) \right] + \right. \\ & \left. + \left(\ln \left[(\sqrt{2} - 1) \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\varphi_M + \pi}{4} \right) \right] \right)^2 \right) - 4 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \sigma}{\rho \cdot g}} \cdot \left(h + \frac{d_{\text{np}}}{2} \right) \cdot \cos \frac{\varphi_M}{2} + h^2 + h \cdot d_{\text{np}} = 0. \end{aligned} \quad (37)$$

Решая уравнение (37), определим значение угла между касательной и кривой L в точке M на образующей проволоки сетки на стенке канала.

Полученные значения угла φ_M , которые определялись численным методом, путём их подстановки в систему уравнений (31) и (32) позволяют определить координаты точки $M(x_M, y_M)$ в момент разрыва плёнки жидкости.

Точка M , соответствующая точке контакта плёнки жидкости на образующей проволоки (рис.1), удовлетворяет уравнению окружности:

$$x^2 + \left[y - \left(h + \frac{d_{\text{np}}}{2} \right) \right]^2 = \left(\frac{d_{\text{np}}}{2} \right)^2 \quad (33)$$

и параметрическим уравнениям:

$$\begin{cases} x = \frac{d_{\text{np}}}{2} \cdot \sin \beta \\ y = h + \frac{d_{\text{np}}}{2} - \frac{d_{\text{np}}}{2} \cdot \cos \beta \end{cases} \quad (34)$$

$$\begin{cases} x = \frac{d_{\text{np}}}{2} \cdot \sin \beta \\ y = h + \frac{d_{\text{np}}}{2} - \frac{d_{\text{np}}}{2} \cdot \cos \beta \end{cases} \quad (35)$$

Отсюда можно найти угол φ_M между касательной к кривой L в точке M , и положительным направлением оси Ox . Подставляя (34) в уравнение окружности (33), получим выражение:

$$\begin{aligned} & 4 \cdot \frac{\sigma}{\rho \cdot g} \cdot \left\{ \ln \left[(\sqrt{2} - 1) \cdot \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\varphi_M + \pi}{4} \right) \right| \right] + \right. \\ & \left. + \sqrt{2} - 2 \cdot \sin \left(\frac{\varphi_M}{2} \right) \right\}^2 + \\ & + \left[2 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \sigma}{\rho \cdot g}} \cdot \cos \frac{\varphi_M}{2} - \left(h + \frac{d_{\text{np}}}{2} \right) \right]^2 = \left(\frac{d_{\text{np}}}{2} \right)^2. \end{aligned} \quad (36)$$

Этой точке соответствует угол β в сечении окружности проволоки сетки. Он определяется из выражения (34):

$$\beta = \arcsin \left(\frac{2 \cdot x_M}{d_{\text{np}}} \right). \quad (38)$$

Из выражения (35) можно определить высоту стыковой части плёнки жидкости (рис.1)

$$h = y_m - \frac{d_{np}}{2} \cdot (1 - \cos \beta) . \quad (39)$$

Получив значения высоты стыковой части плёнки, определим её толщину на оси симметрии ячейки. Для этого необходимо высоту стыковой части плёнки h вычесть из расстояния между стенкой канала и нижней образующей проволоки:

$$\delta_{min} = AB - h = \left(S + \frac{d_{np}}{2} \right) \cdot \sin \gamma - h, \quad (40)$$

Табл. Минимальная толщина плёнки жидкости в канале с сеточным покрытием

Размер ячейки в свету, $S \cdot 10^3$, м	$\delta_{min} \cdot 10^4$, м экспериментальные данные	$\delta_{min} \cdot 10^4$, м аналитическое решение	$\Delta \delta_{min} = \left \frac{\delta_{min}^{\phi} - \delta_{min}^{\delta}}{\delta_{min}^{\delta}} \right \cdot 100\%$
0,40	0,5	0,426	14,2
0,50	0,7	0,586	18,9
0,63	0,8	0,654	18,3

Анализ полученных данных подтверждает адекватность вышеприведенной модели разрыва плёнки жидкости. В соответствии с этой моделью уменьшение плотности орошения приводит к уменьшению площади сечения стыковой жидкости между основной плёнкой и нижними образующими наклонных проволок ячейки сетки. При смыкании стыковой жидкости происходит её разрыв, в этот момент плёнка получает импульс, который способствует её разрыву.

Следует отметить, что некоторое расхождение между аналитическими и экспериментальными данными могут быть вызваны тем, что при аналитическом исследовании предполагалось использование твёрдых и гладких поверхностей. Реальные тела имеют определённую шероховатость и микротрещины, которые могут существенно повлиять на смачиваемость элементов канала контактного ТМО аппарата.

Выводы

В отличие от гладкой поверхности, где условие разрыва плёнки определяется физическими свойствами жидкости, смачиваемостью поверхности и зависит от баланса сил, действующих на элементарный объём плёнки, для поверхности с сеточным

где γ – угол наклона оси проволоки к стенке исследуемого канала; S – размер ячейки в свету.

Результаты решения задачи

Сравнение полученных результатов по определению минимальной толщины плёнки жидкости в ячейке сеточного покрытия стенок канала с экспериментальными данными, соответствующими моменту начала разрыва плёнки, представлены в таблице.

покрытием необходимо дополнительно учитывать капиллярные эффекты в ячейке сетки.

Предложена аналитическая модель разрыва пленки жидкости, учитывающая капиллярные эффекты в ячейке сетки. На основе численной реализации этой модели рассчитана минимальная толщина плёнки в зависимости от геометрических характеристик сетки.

Анализ результатов аналитического исследования показывает адекватность предложенной модели разрыва плёнки экспериментальным данным, полученным при исследовании гидродинамики плёнки. Некоторое расхождение результатов вызвано тем, что реальная поверхность, имеющая определённую шероховатость и микротрещины, смачивается не так, как гладкая поверхность.

ЛИТЕРАТУРА

1. Воронцов Е.Г. О минимальной плотности орошения вертикальных плёночных аппаратов/ Е.Г.Воронцов// ИФЖ. – 1968. – Т. 14, № 4. – С.1075-1078.
2. Дерягин Б.В., Чураев Н.В. Смачивающие плёнки/ Б.В.Дерягин, Н.В.Чураев. – М.: Наука, 1984. – 160 с.
3. Mikielewicz J. Minimum thickness of liquid film

- flourid vertikally down a solid surface/ J.Mikielewicz, J.R.Moszynski// *Int.J. Heat and Mass Transfer.* – 1976. – Vol. 19, № 7. – P.771-776.
4. *Anshus B.E.* The Appearance of Dry Patches on a Wetted Wall/ B.E.Anshus, E.Ruckenstein// *J. Of Colloid and Interface Science.* – 1975. – Vol. 51. № 1. – P.12-22.
5. *Bankoff S.G.* Minimum thickness of draining liquid film/S.G.Bankoff // *Int.J. Heat and Mass Transfer.* – 1971. – Vol. 14, № 3 – P.21-43.
6. *Hobler T.* Minimal wetting of a flat surfaces/ T.Hobler, Czajaka I.// *Chem. Stosowens.* – 1968. – Ser. B. № 2. – P.169-178.
7. *Watanabe K.* Minimum wetting rate on wetted-wall column-correlation over wide range of liquid viscosity/K.Watanabe, T.Munakata, T.Mutsuda// *J. Chem. Eng. Japan.* – 1975. – Vol. 8, № 1. – P. 75-77.
8. *Гидромеханика невесомости/ В.Г.Бабский, Н.Д.Копачевский, А.Д.Мышкис, Л.А.Слобожанин, А.Д.Тюцов/* Под ред. А.Д.Мышкиса. – М.: Наука, 1976. – 504 с.

Получено 27.09.2009 г.