УДК 518.5+531.2

П. С. Малачівський

Чебишовське наближення раціональним виразом із точним відтворенням значення функції та її похідних у заданих точках

(Представлено членом-кореспондентом НАН України Я. Й. Бураком)

The problem of Chebyshev (uniform) approximation of a discrete function by a rational expression with Hermite interpolation is considered. The characteristic property of a Chebyshev approximation with exact reproduction of a function and its derivatives to the r order at given points is established. A Remez algorithm to determine the parameters of this approximation is proposed.

Властивості чебишовського наближення функцій раціональним виразом вивчаються в роботах [1, 2]. Характеристична властивість чебишовського наближення функцій раціональним виразом з інтерполюванням встановлена Б. А. Поповим в [3]. Дана робота присвячена подальшому розвитку ідей [3] щодо чебишовського наближення функції з точним відтворенням її значень і значень її похідних у заданих точках.

Нехай неперервно диференційовна до r-го порядку функція $f(x)$ ($f(x) \in C^r[\alpha,\beta]$) задана в $(n+k)$ різних точках x та u відрізка $[\alpha,\beta]$

$$X_k = \{x, u \in X_k \colon \alpha \leqslant x_1 < x_2 < \cdots < x_{j_1} < u_1 < x_{j_1+1} < \cdots \\ < x_{j_k} < u_k < x_{j_k+1} < \cdots < x_n \leqslant \beta\}, \tag{1}$$

де $1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leqslant n-1$, і відомо, що в точках u_i $(i = \overline{1,k})$ функція $f(x)$ та її похідні $f^{(r_i)}(x)$ до r_i-го порядку набувають таких значень:

$$f(u_i) = v_{i,0}, \qquad f^{(j)}(u_i) = v_{i,j}, \qquad j = \overline{1,r_i}, \qquad i = \overline{1,k}; \tag{2}$$

вагова функція $w(x)$ неперервна на відрізку $[\alpha,\beta]$ $(w(x) \in C[\alpha,\beta])$ і не набуває на ньому нульового значення $(w(x) \neq 0, x \in [\alpha,\beta])$. Необхідно функцію $f(x)$ наблизити раціональним виразом

$$R_{m,l}(a;x) = \frac{P_m(a;x)}{Q_l(b;x)} = \frac{\sum\limits_{i=0}^{m} a_i x^i}{\sum\limits_{j=0}^{l-1} b_j x^j + x^l} \tag{3}$$

так, щоб у точках u_i $(i = \overline{1,k})$ значення функції $f(x)$ та її похідних $f^{(r_i)}(x)$ до r_i-го порядку включно відтворювалися точно

$$R_{m,l}(a;u_i) = v_{i,0}, \qquad R^{(j)}_{m,l}(a;u_i) = v_{i,1}, \qquad j = \overline{1,r_i}, \qquad i = \overline{1,k}, \tag{4}$$

а найбільша похибка наближення з ваговою функцією $w(x)$

$$\Delta(a) = \max_{x \in X_k} \left| \frac{f(x) - R_{m,l}a; x)}{w(x)} \right| \tag{5}$$

була найменшою з можливих на множині точок X_k (1).

Раціональний вираз $R_{m,l}(a^*; x)$, який задовольняє умови (4) і для якого найбільше значення абсолютної величини зваженої похибки (5) на множині точок X_k (1) досягає найменшого значення, називається чебишовським наближенням функції $f(x)$ раціональним виразом $R_{m,l}(a; x)$ на множині точок X_k з вагою $w(x)$ й ермітовим інтерполюванням у точках u_i $(i = \overline{1,k})$. При цьому величину $\Delta(a^*)$ (5) називають похибкою чебишовського наближення функції $f(x)$ раціональним виразом $R_{m,l}(a; x)$ на множині точок X_k із вагою $w(x)$ й ермітовим інтерполюванням у точках u_i $(i = \overline{1,k})$.

Під час дослідження чебишовського наближення раціональним виразом з інтерполяційними умовами використовуватимемо властивість щодо похідних раціонального виразу

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}. \tag{6}$$

Нехай функції $P(x)$ і $Q(x)$, які є чисельником та знаменником раціонального виразу (6), диференційовні до n-го порядку включно і $Q(x)$ не набуває нульового значення. Тоді для n-ї похідної раціонального виразу $R(x)$ (6) справджується формула

$$R^{(n)}(x) = \frac{P^{(n)}(x)}{Q(x)} - \sum_{i=1}^{n} C_n^i \frac{Q^{(i)}(x)}{Q(x)} R^{(n-i)}(x), \tag{7}$$

де C_n^i — число комбінацій з n по i, а $R^{(0)}(x) = R(x)$.

Доведення справедливості формули (7) отримано за методом математичної індукції.

Характеристичну властивість чебишовського наближення раціональним виразом (3) із точним відтворенням значень функції та її похідних до r-го порядку в заданих точках сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема. *Нехай неперервно диференційовна до r-го порядку $(r = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant k} r_i)$ функція $f(x)$ $(f(x) \in C^r[\alpha, \beta])$ задана на множині точок X_k (1), вагова функція $w(x)$ неперервна і не набуває нульового значення на $[\alpha, \beta]$, а степінь чисельника m і знаменника l раціонального виразу $R_{m,l}(a; x)$ (3) задовольняють нерівності*

$$m + l \geqslant k + \sum_{i=1}^{k} r_i$$

і

$$n \geqslant m - k - \sum_{i=1}^{k} r_i + l + 2.$$

Тоді існує не більше одного обмеженого на відрізку $[\alpha, \beta]$ раціонального виразу $R_{m,l}(a; x)$, який є чебишовським наближенням функції $f(x)$ на множині точок X_k із ваговою функцією $w(x)$ і точним відтворенням в точках u_i $(i = \overline{1,k})$ значення функції та її похідних

$f^{(r_i)}(u_i)$ до r_i-го порядку включно. Якщо такий раціональний вираз $R_{m,l}(a;x)$ існує, то він характеризується альтернансною властивістю

$$\begin{cases} R_{m,l}(a;u_i) = f(u_i), \qquad i=\overline{1,k}, \\ \dfrac{P_m^{(j)}(a;u_i)}{Q_l(b;u_i)} - \sum\limits_{s=1}^{j} C_j^s \dfrac{Q_l^{(s)}(b;u_i)}{Q_l(b;u_i)} f^{(j-s)}(u_i) = f^{(j)}(u_i), \qquad j=\overline{1,r_i}, \qquad i=\overline{1,k}, \\ \dfrac{f(z_i)-R_{m,l}(a;z_i)}{w(z_i)} = (-1)^{i+\sum\limits_{j=1}^{k}(r_j+1)\Theta(z_i-u_j)}\mu, \qquad i=\overline{1,p}, \end{cases} \tag{8}$$

де

$$|\mu| = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\left|\frac{f(x_i)-R_{m,l}(a;x_i)}{w(x_i)}\right|, \tag{9}$$

$$p = m-k-\sum_{i=1}^{k} r_i + l + 2, \tag{10}$$

$$f^{(0)}(x) = f(x),$$

$\Theta(x)$ — *функція Хевісайда*

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x<0, \\ 1, & \text{якщо} \quad x\geqslant 0, \end{cases} \tag{11}$$

z_i $(i=\overline{1,p})$ — впорядковані за зростанням точки чебишовського альтернансу, $P_m^{(j)}(a;x)$ — j-та похідна чисельника раціонального виразу $R_{m,l}(a;x)$, $Q_l(b;x)$ — його знаменник, а $Q_l^{(j)}(b;x)$ — j-та похідна знаменника.

Доведення. Доведення цієї теореми грунтується на характеристичній властивості чебишовського наближення раціональним виразом з інтерполюванням [3]. Його можна провести подібно до доведення характеристичної теореми чебишовського наближення функцій многочленом із точним відтворенням значення функції та її похідної в заданих точках [4, 5].

Характеристична властивість (8) чебишовського наближення раціональним виразом $R_{m,l}(a;x)$ (3) функції $f(x)$ з ваговою функцією $w(x)$ на множині точок X_k і точним відтворенням значень функції та її похідних в точках u_i $(i=\overline{1,k})$ записана з врахуванням значень похідних раціонального виразу відповідно до формули (7).

Із цієї теореми випливає, що характеристична властивість чебишовського наближення раціональним виразом $R_{m,l}(a;x)$ (3) функції $f(x)$ із точним відтворенням у точках u_i $(i=\overline{1,k})$ значень функції та її похідних $f^{(r_i)}(u_i)$ до r_i-го порядку включно за суттю збігається з характеристичною властивістю відповідного чебишовського наближення многочленом [5]. Кількість точок альтернансу p (10) у цьому разі також залежить від кількості параметрів, точок інтерполювання й порядку похідних. Знаки похибки апроксимації в точках альтернансу, сусідніх із точками інтерполювання u_i $(i=\overline{1,k})$, для парних значень r_i збігаються, а для непарних — чергуються. Для визначення точок чебишовського альтернансу можна застосувати схему Ремеза [3, 6] з уточненням наближення до них за модифікованим алгоритмом Валле-Пуссена [7].

Для знаходження значень параметрів a_i $(i=\overline{0,m})$ і b_i $(i=\overline{0,l-1})$ чебишовського наближення раціональним виразом $R_{m,l}(a;x)$ (3) із системи рівнянь (8) можна використати методи, які застосовуються під час знаходження значень параметрів чебишовського наближення раціональним виразом без інтерполювання [6].

На закінчення зробимо такі висновки.

Якщо існує чебишовське наближення для неперервно диференційовної до r-го порядку ($r = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant k} r_i$) функції $f(x)$ раціональним виразом $R_{m,l}(a;x)$ $\left(m + l \geqslant k + \sum\limits_{i=1}^{k} r_i,\ n \geqslant m - k - \sum\limits_{i=1}^{k} r_i + l + 2\right)$ з точним відтворенням значень функції та її похідних до r_i ($i = \overline{1,k}$) порядку в заданих точках u_i ($i = \overline{1,k}$), то воно єдине, а його параметри задовольняють альтернансну властивість (8). Відповідно до цієї властивості така чебишовська апроксимація має $\left(m + l - k - \sum\limits_{i=1}^{k} r_i + 2\right)$-ті точки альтернансу, в яких спосіб зміни знаку похибки апроксимації залежить від порядку похідної. Для знаходження параметрів такої апроксимації можна використати схему Ремеза з одноточковою заміною наближення до точок альтернансу за модифікованим алгоритмом Валле-Пуссена.

Чебишовське наближення з точним відтворенням значення функції та її похідної в крайніх точках відрізка застосовується під час побудови неперервних і гладких мінімаксних сплайн-апроксимацій, в яких кожна з ланок є чебишовським наближенням. Практично цікавим є також застосування такого наближення для апроксимації розв'язків диференціальних рівнянь.

1. *Baratchart L., Stahl H., Wielonsky F.* Non-uniqueness of rational best approximants // J. Comput. Appl. Math. – 1999. – **105**, No 1–2. – P. 141–154.
2. *Blatt H.-P., Grothmann R., Kovacheva R. K.* On the distribution of alternation points in uniform rational approximation // C. R. Acad. Bulg. Sci. – 2002. – **55**, No 8. – P. 5–10.
3. *Попов Б. А.* Равномерное приближение сплайнами. – Киев: Наук. думка, 1989. – 272 с.
4. *Малачівський П. С.* Рівномірне наближення з точним відтворенням значень функції та похідної в заданих точках // Доп. НАН України. – 2006. – № 9. – С. 80–85.
5. *Малачівський П.* Рівномірне наближення з точним відтворенням значень функції та її похідних у заданих точках // Фіз.-мат. моделювання та інформац. технології. – 2007. – Вип. 5. – С. 119–126.
6. *Fike C. T.* Computer evaluation of mathematical function. – Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1968. – 228 p.
7. *Малачівський П.* Модифікований алгоритм Валле-Пуссена // Фіз.-мат. моделювання та інформац. технології. – 2005. – Вип. 2. – С. 159–166.

Центр математичного моделювання
Інституту прикладних проблем механіки
та математики ім Я. С. Підстригача
НАН України, Львів

Надійшло до редакції 31.03.2008