УДК 512.544

Л. А. Курдаченко, Н. А. Турбай

Характеризація FC-груп, в яких умова переставності є транзитивною

(Представлено членом-кореспондентом НАН України В. П. Моторним)

A subgroup H of the group G is said to be permutable (or quasinormal) in G, in symbols H per G, if $HK = KH$ for all subgroups K of G. We consider periodic locally soluble FC-groups, in which the permutability is a transitive relation. S-permutability is a rather wide generalization of the usual permutability. We show some properties of S-permutability for infinite periodic FC-groups.

Істотний вплив на будову групи мають системи її нормальних підгруп або підгруп, у тому чи іншому сенсі близьких до нормальних. Такими важливими природними узагальненнями нормальних підгруп є системи субнормальних та висхідних підгруп, майже нормальних та наближено нормальних підгруп і т. ін. Природним узагальненням нормальних підгруп є і підгрупи, що виникають при вивченні граткових властивостей системи підгруп групи. Такими підгрупами будуть переставні та модулярні підгрупи. Підгрупа H називається переставною в групі G, якщо вона переставна з будь-якою підгрупою K групи G, тобто $HK = KH$. Вивчення властивостей таких підгруп почалося досить давно і виявилося достатньо плідним. Дуже детально були вивчені властивості переставних підгруп і їх вплив на структуру групи в межах теорії скінченних груп; цілу серію відповідних результатів можна знайти в монографії [1]. Зокрема, будова груп (як скінченних, так і нескінченних), усі підгрупи яких переставні, виявилася достатньо простою (див., напр., [1, 2.4]). Властивість "бути переставною підгрупою" подібно властивості "бути нормальною підгрупою" не є транзитивною. Д. Цахером [2] було почато вивчення скінченних груп, в яких переставність є транзитивною властивістю. Такі групи були названі PT-групами. Д. Цахер отримав опис скінченних розв'язних PT-груп. Нерозв'язні скінченні PT-групи були вивчені Д. Робінсоном [3]. Властивість переставності не є властивістю, яку мають тільки скінченні групи. Її означення носить загальний характер. Тому той факт, що вивчення її істотно просунулося тільки в теорії скінченних групп, можна пояснити лише тією обставиною, що скінченність групи є дуже сильним обмеженням, і це дало можливість для глибокого і сильного розвитку теорії скінченних груп. У теорії нескінченних груп ситуація зовсім інша. Тому природним є вивчення PT-груп у тих класах нескінченних (періодичних) груп, які наслідують важливі властивості скінченних груп. Одним з таких класів є клас періодичних FC-груп. Пригадаємо, що група G називається FC-групою або групою із скінченними класами спряжених елементів, якщо кожний її елемент має скінченну множину спряжених елементів. Періодичні FC-групи можна охарактеризувати як групи, в яких кожна скінченна множина елементів породжує скінченну нормальну підгрупу. Періодичні FC-групи є одним з небагатьох класів нескінченних груп, на які можуть бути розширені більшість базових результатів теорії скінченних груп. А отже, буде природним почати розгляд властивостей, структури і характеристик нескінченних PT-груп та їх узагальнень саме в цьому класі.

Першим результатом роботи є нижченаведена структурна теорема, яка поширює на періодичні FC-групи теорему Д. Цахера, що згадувалася вище.

Нехай G — група. Перетин усіх її нормальних підгруп H, що визначають локально нільпотентні факторгрупи G/H, будемо називати локально нільпотентним резидуалом групи G.

Теорема 1. *Нехай G — періодична локально розв'язна PT-група і L — її локально нільпотентний резидуал. Якщо G — FC-група, то G задовольняє такі умови:*

(i) $G = L\lambda D$, де D — гіперцентральна підгрупа, усі підгрупи якої переставні;

(ii) $2 \notin \Pi(L)$ і кожна силовська p-підгрупа L скінченна та є силовською p-підгрупою всієї групи G для будь-якого $p \in \Pi(L)$;

(iii) будь-яка підгрупа L буде G-інваріантною.

Навпаки, якщо G — періодична FC-група, яка задовольняє умови (i) — (iii), тоді G є PT-групою.

Як згадувалося вище, будова груп, усі підгрупи яких переставні, була описана (див., напр., [1, теорема 2.4.14].

Нехай p — просте число. Будемо казати, що група G належить класу $\mathfrak{X}_p$, якщо G задовольняє таку умову:

для будь-якої силовської p-підгрупи P групи G кожна її підгрупа буде переставною в $N_G(P)$.

У роботі [4] для скінченних розв'язних груп були отримані зв'язки цього класу груп з класом PT-груп. Наведена нижче теорема поширює теорему А вказаної роботи на періодичні FC-групи.

Теорема 2. *Нехай G — періодична локально розв'язна FC-група. Включення $G \in \mathfrak{X}_p$ має місце для всіх простих чисел p тоді і тільки тоді, коли G — PT-група.*

Зауважимо один важливий наслідок. Нехай p — просте число.

Будемо казати, що група G належить класу $\mathfrak{C}_p$, якщо вона задовольняє таку умову:

якщо P — силовська p-підгрупа G, тоді кожна підгрупа P нормальна в $N_G(P)$.

Наслідок. *Нехай G — періодична локально розв'язна FC-група. Включення $G \in \mathfrak{C}_p$ має місце для всіх простих чисел p тоді і тільки тоді, коли G — T-група з дедекіндовою силовською 2-підгрупою.*

Нехай p — просте число. Будемо казати, що група G належить класу $\mathfrak{P}_p$, якщо G задовольняє дві умови:

(i) кожна силовська p-підгрупа G модулярна;

(ii) якщо P — силовська p-підгрупа G, тоді кожна нормальна підгрупа P пронормальна в G.

Нагадаємо, що підгрупа H групи G називається пронормальною в G, якщо для кожного $g \in G$ підгрупи H, H^g спряжені в $\langle H, H^g \rangle$.

Група G називається модулярною, якщо гратка її всіх підгруп буде модулярною, тобто для всіх підгруп X, Y, Z групи G таких, що $X \leqslant Z$ має місце рівність $\langle X, Y \rangle \bigcap Z = \langle X, Y \bigcap Z \rangle$.

За теоремою Івасави [1, теорема 2.4.14] локально скінченна p-група, p — просте число, буде модулярною тоді і тільки тоді, коли будь-яка її підгрупа переставна в G.

У статті [4, теореми A, D] було доведено, що скінченна розв'язна група G буде PT-групою тоді і тільки тоді, коли $G \in \mathfrak{P}_p$ для всіх $p \in \Pi(G)$. Тому природно виникає питання і про нескінченні групи з класу $\mathfrak{P}_p$.

Ми будемо розглядати не тільки клас $\mathfrak{P}_p$, але і таке його розширення:

нехай p — просте число. Будемо казати, що група G належить класу $\mathfrak{P}_p*$, якщо G задовольняє дві умови:

(i) кожна силовська p-підгрупа G модулярна;

(ii) якщо P — силовська p-підгрупа G, тоді кожна скінченна нормальна підгрупа P пронормальна в G.

Теорема 3. *Нехай G — періодична локально розв'язна FC-група. Включення $G \in \mathfrak{P}_p*$ має місце для всіх простих чисел p тоді і тільки тоді, коли G — PT-група.*

Наслідок 1. *Нехай G — періодична локально розв'язна FC-група. Якщо $G \in \mathfrak{P}_p$ для всіх простих чисел p, тоді G — PT-група.*

Використовуючи теорему 2, ми отримуємо такий результат.

Наслідок 2. *Нехай G — періодична локально розв'язна FC-група. Тоді еквівалентними є такі твердження:*

(i) G є PT-групою;

(ii) якщо p — просте число і P — силовська p-підгрупа G, тоді кожна підгрупа P переставна в $N_G(P)$;

(iii) якщо p — просте число і P — силовська p-підгрупа G, тоді P модулярна, і кожна нормальна підгрупа P пронормальна в G для всіх p.

Нехай G — періодична група і π — підмножина $\Pi(G)$. Згідно з О. Кегелем [5], підгрупу H групи G будемо називати π-переставною в G, якщо для кожного $p \in \pi$ і кожної силовської p-підгрупи S групи G має місце рівність $HS = SH$ (при цьому якщо $\pi = \varnothing$, то $< 1 >$ — єдина π-підгрупа G і кожна підгрупа G буде π-переставною).

Підгрупа H групи G називається S-переставною або силовськи переставною в G, якщо H π-переставна для $\pi = \Pi(G)$.

S-переставність є достатньо широким узагальненням звичайної переставності. О. Кегель показав [5], що всяка S-переставна підгрупа скінченної групи буде субнормальною. Звідси випливає, що скінченна група тоді і тільки тоді нільпотентна, коли всяка її підгрупа S-переставна. Цей результат показує, що S-переставні підгрупи істотно впливають на будову скінченної групи. У теорії скінченних груп цей вплив вивчався багатьма дослідниками з різних точок зору. Що ж стосується нескінченних груп, то досі S-переставні підгрупи в них не вивчались. Це обумовлено такими обставинами. По-перше, саме означення показує, що S-переставні підгрупи є сенс вивчати тільки в періодичних групах. По-друге, вивчення S-переставних підгруп може бути ефективним лише при наявності в групі розвинутої силовської структури. Раніше вже зазначалося, що періодичні FC-групи мають достатньо розвинуту силовську структуру, тому є сенс починати вивчення властивостей S-переставності в таких групах.

Група G називається PST-групою, якщо S-переставність є транзитивним відношенням в G, тобто з того факту, що H — S-переставна в G і K — S-переставна в H, завжди випливає, що K буде S-переставною підгрупою в G. З самого означення маємо, що всяка S–переставна підгрупа PST-групи сама буде PST-групою, зокрема такою буде всяка нормальна підгрупа G.

Будова скінченних розв'язних PST-груп описана Р. К. Агравалем [6]. Різні важливі властивості скінченних розв'язних PST-груп отримані іспанськими математиками [7–9]. У даній роботі основний результат роботи [6] поширений на клас нескінченних періодичних локально розв'язних FC-груп.

Теорема 4. *Нехай G — періодична локально розв'язна PST-група і L — її локально нільпотентний резидуал. Якщо G — FC-група, то G задовольняє такі умови:*

(i) $G = L\lambda D$, де D — гіперцентральна підгрупа;

(ii) $2 \notin \Pi(L)$ *і кожна силовська* p*-підгрупа* L *скінченна і є силовською* p*-підгрупою всієї групи* G *для будь-якого* $p \in \Pi(L)$*;*

(iii) підгрупа L *абелева;*

(iv) будь-яка підгрупа L *є* G*-інваріантною.*

Навпаки, якщо G *— періодична* FC*-група, яка задовольняє умови (i)–(iv), то* G *—* PST*-група.*

Наслідок. *Нехай* G *— періодична локально розв'язна* PST*-група. Якщо* G *—* FC*-група, то будь-яка підгрупа* G *буде* PST*-групою.*

1. *Schmidt R.* Subgroups lattices of groups. – Berlin: Walter de Gruyter, 1994. – 572 p.
2. *Zacher G.* I gruppi risolubili finite in cui i sottogruppi di composizione coincidono con i sottogruppi quasi – normali // Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis, mat. e natur. – 1964. – **37**, No 8. – P. 150–154.
3. *Robinson D. J. S.* The structure of finite groups in which permutability is a transitive relation // J. Austral. Math. Soc. – 2001. – **70**. – P. 143–159.
4. *Beidleman J. C., Brewster B., Robinson D. J. S.* Criteria for permutability to be transitive in finite groups // J. Algebra. – 1999. – **222**. – P. 400–412.
5. *Kegel O. H.* Sylow – Gruppen und Subnormalteiler endlicher Gruppen // Math. Z. – 1962. – **78**. – P. 205–221.
6. *Agrawal R. K.* Finite groups whose subnormal subgroups permute with all Sylow subgroups // Proc. Amer. Math. Soc. – 1975. – **47**. – P. 77–83.
7. *Alejandre V. J., Ballester-Bolinches A., Pedraza-Aguilera M. C.* Finite soluble groups with permutable subnormal subgroups // J. Algebra. – 2001. – **240**. – P. 705–722.
8. *Ballester-Bolinches A., Esteban-Romero R.* Sylow permutable subnormal subgroups of finite groups // Bull. Austral Math. Soc. – 2001. – **64**, No 3. – P. 479–486.
9. *Ballester-Bolinches A., Esteban-Romero R.* Sylow permutable subnormal subgroups of finite groups // J. Algebra. – 2002. – **251**, No 2. – P. 727–738.

Дніпропетровський національний університет

Надійшло до редакції 31.03.2008

УДК 519.41/47

М. М. Семко, М. М. Пискун

Про деякі узагальнення наближено нормальних підгруп

(Представлено академіком НАН України А. М. Самойленком)

A subgroup H *of the group* G *is called almost polycyclically approximate to a normal one (in* G*), if* H *includes a subgroup* L *normal in* H^G *such that a factor-group* H^G/L *is almost polycyclic. A group* G *is said to be an anti* PC*-group, if every its non-polycyclic-by-finite subgroup is almost polycyclically approximate to a normal one. The study of generalized soluble anti* PC*- groups is finished in the present paper.*

Нехай G — група. Її підгрупа H називається наближено нормальною в G, якщо H має скінченний індекс у своєму нормальному замиканні $K = H^G$. У цьому випадку H включає нормальну в K підгрупу L, для якої факторгрупа K/L скінченна. Такого роду підгрупи були введені в розгляд Б. Нейманом [1]. У вказаній роботі він описав групи, усяка підгрупа яких