оповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

10 • 2008

МАТЕМАТИКА

УДК 517.95

Г. П. Доманська

Мішана задача для одного нелінійного псевдопараболічного рівняння

(Представлено членом-кореспондентом НАН України Б. Й. Пташником)

Some sufficient conditions for the existence of a local generalized solution of the initial boundary-value problem for a nonlinear pseudoparabolic equation are obtained. Some conditions for the non-existence of a global solution are obtained too.

Рівняння та системи псевдопараболічного типу описують різноманітні фізичні процеси, зокрема фільтрацію однорідних рідин у тріщинуватих породах [1], процеси теплопровідності з урахуванням термодинамічної температури та температури провідності [2], перенесення вологи в грунті [3], процес застигання клею [4] та ін. У зв'язку з цим починаючи з 50-х років минулого сторіччя вивченню рівнянь зазначеного типу приділяється велика увага.

Задачі для нелінійних псевдопараболічних рівнянь розглядались О. Л. Гладковим [5–7], якій довів існування та єдиність класичного розв'язку задачі Коші. О. І. Кожанов [8] довів теореми порівняння для регулярного розв'язку задачі Коші для псевдопараболічних рівнянь, з допомогою яких отримав результати щодо існування та руйнування (неіснування) регулярних розв'язків, вивчив поведінку розв'язку при $t \to \infty$ і при підході до часу руйнування, дослідив класи єдиності розв'язку задачі Коші.

У цій роботі одержано умови існування локального розв'язку мішаної задачі для одного нелінійного псевдопараболічного рівняння, а також умови неіснування глобального розв'язку.

Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — обмежена область з межею $\partial\Omega \subset C^1$, $Q_\tau = \Omega \times (0,\tau)$, $\tau \in (0,T)$, $0 < T < \infty$, $\Omega_\tau = Q_T \bigcap \{t = \tau\}$.

Для просторів Лебега і Соболєва в деякій області D використовуватимемо загальноприйняті позначення $L^p(D)$ та $H^1(D)$, $W^{1,p}(D)$. Нехай $H_0^1(\Omega)$ і $W_0^{1,p}(\Omega)$ — замикання множини функцій $C_0^\infty(\Omega)$ за нормами просторів $H^1(\Omega)$ і $W^{1,p}(\Omega)$ відповідно.

Якщо X — банахів простір, то через $L^p((0,T);X)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ позначатимемо множину всіх вимірних за Бохнером функцій $v\colon (0,T) \to X$ [9], для яких

$$\|v\|_{L^p((0,T);X)} = \left(\int\limits_0^T \|v(s)\|_X^p ds\right)^{1/p} < \infty,$$

де $\|\cdot\|_X$ — норма в X. Аналогічно введемо, простір $H^1((0,T);X)$.

В області Q_T розглянемо рівняння

$$u_t - \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x)u_{x_it})_{x_j} - \sum_{i,j=1}^n (c_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} - \sum_{i=1}^n (b_i(x)|u_{x_i}|^{q-2}u_{x_i})_{x_i} +$$
$$+ a_0(x)u - b_0(x)|u|^{p-2}u = 0 \tag{1}$$

з крайовою умовою

$$u|_{S_T} = 0 \tag{2}$$

і початковою умовою

$$u(x,0) = u_0(x), \tag{3}$$

де $S_T = \partial\Omega \times (0,T)$.

Припускатимемо, що $p > q > 2$ і виконуються такі умови:

$$(A): \quad \nu_0 \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leqslant \nu_1 \sum_{i=1}^n \xi_i^2, \qquad \nu_0 > 0$$

майже для всіх $x \in \Omega$ і для всіх $\xi \in \mathbb{R}^n$;

$a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, $a_{ij} = a_{ji}$, $i,j \in \{1,\ldots,n\}$ майже для всіх $x \in \Omega$;

$a_0 \in L^\infty(\Omega)$, $a_0(x) \geqslant 0$, майже для всіх $x \in \Omega$;

(B): $b_i \in L^\infty(\Omega)$, $i \in \{0,1,\ldots,n\}$,

$\beta_0 \leqslant b_i(x) \leqslant \beta_1$, $\beta_2 \leqslant b_0(x) \leqslant \beta_3$, $i \in \{1,\ldots,n\}$

майже для всіх $x \in \Omega$, $\beta_0 > 0$, $\beta_2 > 0$;

$$(C): \quad \sum_{i,j=1}^n c_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \theta_0 \sum_{i=1}^n \xi_i^2, \qquad \theta_0 > 0$$

майже для всіх $x \in \Omega$ і для всіх $\xi \in \mathbb{R}^n$;

$c_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, $c_{ij} = c_{ji}$, $i,j \in \{1,\ldots,n\}$ майже для всіх $x \in \Omega$.

Означення. Функцію u, яка задовольняє включення

$$u \in C([0,T);H_0^1(\Omega)) \bigcap L^\infty((0,T);W_0^{1,q}(\Omega) \bigcap L^p(\Omega)),$$

$$u_t \in L^\infty((0,T); H_0^1(\Omega)), \qquad |u_{x_i}|^{q-2} u_{x_i t}^2 \in L^1(Q_T), \qquad i \in \{1, \ldots, n\},$$

та інтегральну рівність

$$\int\limits_{\Omega_t} \Bigg[u_t v + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i t} v_{x_j} + \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}(x) u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) |u_{x_i}|^{q-2} u_{x_i} v_{x_i} + \\ + a_0(x) uv - b_0(x) |u|^{p-2} uv \Bigg] dx = 0 \tag{4}$$

для майже всіх $t \in (0,T)$ і для всіх $v \in H_0^1(\Omega) \bigcap W_0^{1,q}(\Omega) \bigcap L^p(\Omega)$, а також умову (3), називатимемо розв'язком задачі (1)–(3).

Використовуючи метод монотонності, описаний у [10], доведено таку теорему.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* (A), (B), (C)*;* $q > 2$*;* $p \in \left(1 + \dfrac{q}{2}, +\infty\right)$ *при* $n \in \{1,2\}$*,* $p \in \left(1 + \dfrac{q}{2}, \dfrac{2n}{n-2}\right)$ *при* $n \in \{3, \ldots, [q]\}$*,* $p \in \left(1 + \dfrac{q}{2}, \min\left\{\dfrac{2n}{n-2}, \dfrac{2n-2q+nq}{2(n-q)}\right\}\right)$ *при* $n > [q]$*;* $u_0 \in W_0^{1,2q-2}(\Omega) \bigcap L^{2p-2}(\Omega)$*. Тоді існує розв'язок задачі* (1)–(3) *в області* Q_T*, де число* T *залежить від коефіцієнтів рівняння, початкової умови* (3) *та чисел* q*,* p*,* n*.*

Нехай u — розв'язок задачі (1)–(3). Розглянемо функцію

$$E(t) = \int\limits_{\Omega_t} \left[\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}(x) u_{x_i} u_{x_j} + \frac{1}{2} a_0(x) u^2 + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^{n} b_i(x) |u_{x_i}|^q - \frac{1}{p} b_0(x) |u|^p \right] dx.$$

Зауваження. Можна показати, що

$$\int\limits_{Q_T} \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}|^{q-2} |u_{x_i t}|^2 dx dt \leqslant M < \infty.$$

Це означає, що

$$\int\limits_{Q_T} \left(\sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}|^q dx \right)_t dt \leqslant M,$$

тобто функція $\mathcal{U}_t = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |u_{x_i}|^q \right)_t \in L^1(Q_T)$. Але $\mathcal{U} \in L^1(Q_T)$. Тому $\mathcal{U} \in C([0,T]; L^1(\Omega))$ і функція $E \colon [0,T) \to \mathbb{R}$ неперервна і майже для всіх $t \in [0,T)$ існує похідна $E'(t)$.

Лема. *Майже для всіх* $t \in [0,T)$ *справджується нерівність*

$$E'(t) = - \int\limits_{\Omega_t} \left[u_t^2 + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i t} u_{x_j t} \right] dx \leqslant 0.$$

Доведення. Зазначимо, що майже для всіх $t \in (0,T)$ існує похідна $E'(t)$, причому

$$E'(t) = \int\limits_{\Omega_t} \left[\sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}(x) u_{x_i} u_{x_j t} + a_0(x) u u_t + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) |u_{x_i}|^{q-2} u_{x_i} u_{x_i t} - b_0(x) |u|^{p-2} u u_t \right] dx. \tag{5}$$

Прийнявши в рівності (4) $v = u_t$, одержимо

$$\int\limits_{\Omega_t}\Bigg[u_t^2 + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_it}u_{x_jt} + \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_jt} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)|u_{x_i}|^{q-2}u_{x_i}u_{x_it} +$$

$$+ a_0(x)uu_t - b_0(x)|u|^{p-2}uu_t\Bigg]dx = 0 \qquad (6)$$

майже для всіх $t \in (0, T)$. З (5), (6) маємо

$$E'(t) = -\int\limits_{\Omega_t}\Bigg[u_t^2 + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_it}u_{x_jt}\Bigg]dx \leqslant 0,$$

що й доводить лему.

Теорема 2. *Якщо u — розв'язок задачі* (1)–(3) *в області Q_∞, виконуються умови* (A), (B), (C) *і, крім того, $E(0) = \lambda < 0$, $p > q > 2$, то існує таке число T_0, що*

$$\lim_{t\to T_0-0}\int\limits_{\Omega_t}|u|^p dx = +\infty.$$

Доведення. Припустимо, що такого числа T_0 не існує. Розглянемо функції $H(t) = -E(t)$ і

$$L(t) = (H(t))^{1-\alpha} + \frac{\varepsilon}{2}\int\limits_{\Omega_t}u^2 dx, \qquad 0 < \alpha < 1, \qquad \varepsilon > 0,$$

на проміжку $[0, +\infty)$. Тоді

$$L'(t) = (1-\alpha)H^{-\alpha}(t)H'(t) + \varepsilon\int\limits_{\Omega_t}uu_t dx \qquad (7)$$

для майже всіх $t \in (0, +\infty)$. Прийнявши в (4) $v = u$, одержимо

$$\int\limits_{\Omega_t}\Bigg[u_tu + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_it}u_{x_j} + \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)|u_{x_i}|^q +$$

$$+ a_0(x)u^2 - b_0(x)|u|^p\Bigg]dx = 0 \qquad (8)$$

для майже всіх $t \in (0, +\infty)$. Враховуючи (8), формулу (7) запишемо у вигляді

$$L'(t) = (1-\alpha)H^{-\alpha}(t)\int\limits_{\Omega_t}\Bigg[u_t^2 + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_it}u_{x_jt}\Bigg]dx -$$

$$-\varepsilon\int\limits_{\Omega_t}\Bigg[\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)u_{x_it}u_{x_j} + \sum_{i,j=1}^{n}c_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j} + \sum_{i=1}^{n}b_i(x)|u_{x_i}|^q + a_0(x)u^2 - b_0(x)|u|^p\Bigg]dx.$$

Нехай $A_0 = \operatorname{ess\,sup}\limits_{\Omega} \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2(x)$. Тоді

$$\int\limits_{\Omega_t} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i t} u_{x_j} dx \leqslant \frac{1}{2\varepsilon_0} H^{-\alpha}(t) A_0 \int\limits_{\Omega_t} \sum_{i=1}^{n} u_{x_i t}^2 dx + \frac{H^{\alpha}(t)\varepsilon_0}{2} \int\limits_{\Omega_t} \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2 dx$$

і

$$L'(t) \geqslant (1-\alpha) H^{-\alpha}(t) \int\limits_{\Omega_t} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i t} u_{x_j t} dx - \frac{\varepsilon A_0}{2\varepsilon_0} H^{-\alpha}(t) \int\limits_{\Omega_t} \sum_{i=1}^{n} u_{x_i t}^2 dx -$$
$$- \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{2} H^{\alpha}(t) \int\limits_{\Omega_t} \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2 dx - \varepsilon \int\limits_{\Omega_t} \Bigg[\sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}(x) u_{x_i} u_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) |u_{x_i}|^q +$$
$$+ a_0(x) u^2 - b_0(x) |u|^p \Bigg] dx. \tag{9}$$

Враховуючи умову (A), маємо

$$(1-\alpha) \int\limits_{\Omega_t} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i t} u_{x_j t} dx - \frac{\varepsilon A_0}{2\varepsilon_0} \int\limits_{\Omega_t} \sum_{i=1}^{n} u_{x_i t}^2 dx \geqslant$$
$$\geqslant \left[(1-\alpha)\nu_0 - \frac{\varepsilon A_0}{2\varepsilon_0} \right] \int\limits_{\Omega_t} \sum_{i=1}^{n} u_{x_i t}^2 dx \geqslant 0 \tag{10}$$

при $\varepsilon \leqslant 2(1-\alpha)\nu_0 \varepsilon_0 / A_0$. Крім того, (оскільки $2/(q(1-\alpha)) = 1 \Leftrightarrow \alpha = (q-2)/q$)

$$H^{\alpha}(t) \int\limits_{\Omega_t} \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2 dx \leqslant \alpha \delta_1^{1/\alpha} H(t) + \frac{1-\alpha}{\delta_1^{1/(1-\alpha)}} \left(\int\limits_{\Omega_t} \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2 dx \right)^{1/(1-\alpha)} \leqslant$$
$$\leqslant \alpha \delta_1^{1/\alpha} H(t) + \frac{(1-\alpha)\mu_0^{q/2}}{\delta_1^{1/(1-\alpha)}} (\operatorname{mes}\Omega)^{(q-2)/q} \int\limits_{\Omega_t} \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}|^q dx \leqslant$$
$$\leqslant \alpha \delta_1^{1/\alpha} H(t) + \frac{\mu_1}{\delta_1^{1/(1-\alpha)}} \int\limits_{\Omega_t} \sum_{i=1}^{n} b_i(x) |u_{x_i}|^q dx, \tag{11}$$

де $\delta_1 > 0$, $\mu_1 = \dfrac{(1-\alpha)\mu_0^{q/2} (\operatorname{mes}\Omega)^{(q-2)/q}}{\beta_0}$, $\mu_0 = n^{(q-2)/q}$.

На підставі (10) і (11) з (9) одержимо нерівність

$$L'(t) \geqslant -\frac{\alpha \delta_1^{1/\alpha} \varepsilon \varepsilon_0}{2} H(t) - \frac{\varepsilon \mu_1 \varepsilon_0}{2\delta_1^{1/(1-\alpha)}} \int\limits_{\Omega_t} \sum_{i=1}^{n} b_i(x) |u_{x_i}|^q dx -$$

$$
-\varepsilon\int\limits_{\Omega_t}\left[\sum_{i,j=1}^n c_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j}+\sum_{i=1}^n b_i(x)|u_{x_i}|^q+a_0(x)u^2-b_0(x)|u|^p\right]dx\geqslant
$$

$$
\geqslant\varepsilon\int\limits_{\Omega_t}\left[\left(\frac{\alpha\delta_1^{1/\alpha}\varepsilon_0}{4}-1\right)a_0(x)u^2+\left(\frac{\alpha\delta_1^{1/\alpha}\varepsilon_0}{4}-1\right)\sum_{i,j=1}^n c_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j}+\right.
$$

$$
\left.+\left(\frac{\alpha\delta_1^{1/\alpha}\varepsilon_0}{2q}-\frac{\mu_1\varepsilon_0}{2\delta_1^{1/(1-\alpha)}}-1\right)\sum_{i=1}^n b_i(x)|u_{x_i}|^q-\left(\frac{\alpha\delta_1^{1/\alpha}\varepsilon_0}{2p}-1\right)b_0(x)|u|^p\right]dx. \quad (12)
$$

Якщо

$$
\frac{\alpha\delta_1^{1/\alpha}\varepsilon_0}{4}-1+\frac{\delta_2}{2}\geqslant 0,\qquad \frac{\alpha\delta_1^{1/\alpha}\varepsilon_0}{2q}-\frac{\mu_1\varepsilon_0}{2\delta_1^{1/(1-\alpha)}}-1+\frac{\delta_2}{q}\geqslant 0,
$$

$$
1-\frac{\alpha\delta_1^{1/\alpha}\varepsilon_0}{2p}+\frac{\delta_2}{p}\geqslant\delta_3,\qquad q<\delta_2<p,\qquad 0<\delta_3<1-\frac{\delta_2}{p},
$$

то (при малих ε)

$$
L'(t)\geqslant\varepsilon\left[\delta_2 H(t)+\delta_3\int\limits_{\Omega_t}b_0(x)|u|^p dx\right]\geqslant\varepsilon\delta_4\left[H(t)+\int\limits_{\Omega_t}b_0(x)|u|^p dx\right], \quad (13)
$$

де $\delta_4=\min\{\delta_2,\delta_3\}$. Далі маємо

$$
[L(t)]^{1/(1-\alpha)}\leqslant\mu_3\left[H(t)+\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{1/(1-\alpha)}\left(\int\limits_{\Omega_t}u^2dx\right)^{1/(1-\alpha)}\right] \quad (14)
$$

майже для всіх $t\in(0,+\infty)$. Оскільки

$$
\left(\int\limits_{\Omega_t}u^2dx\right)^{1/(1-\alpha)}\leqslant\frac{\mu_2\mu_0(\operatorname{mes}\Omega)^{(q-2)/q}}{\beta_0}\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i=1}^n b_i(x)|u_{x_i}|^q dx,
$$

то з (14) випливає нерівність

$$
[L(t)]^{1/(1-\alpha)}\leqslant\mu_3\int\limits_{\Omega_t}\left[\left(-\frac{1}{2}\left[a_0(x)u^2+\sum_{i,j=1}^n c_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j}\right]\right)-\right.
$$

$$
\left.-\left(\frac{1}{q}-\frac{\varepsilon^{1/(1-\alpha)}\mu_2\mu_0(\operatorname{mes}\Omega)^{(q-2)/q}}{2^{1/(1-\alpha)}\beta_0}\right)\sum_{i=1}^n b_i(x)|u_{x_i}|^q+\frac{1}{p}b_0(x)|u|^p\right]dx=
$$

$$
=\mu_3\left\{-\frac{\delta_5}{2}\int\limits_{\Omega_t}\left[a_0(x)u^2+\sum_{i,j=1}^n c_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j}\right]dx-\frac{\delta_5}{p}\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i=1}^n b_i(x)|u_{x_i}|^q dx+\right.
$$

$$
+\frac{\delta_5}{p}\int\limits_{\Omega_t}b_0(x)|u|^p dx-\frac{1-\delta_5}{2}\int\limits_{\Omega_t}\left[a_0(x)u^2+\sum_{i,j=1}^n c_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j}\right]dx-
$$

$$- \left(\frac{1-\delta_5}{q} - \frac{\varepsilon^{1/(1-\alpha)} \mu_2 \mu_0 (\mathrm{mes}\,\Omega)^{(q-2)/q}}{2^{1/(1-\alpha)} \beta_0} \right) \int\limits_{\Omega_t} \sum_{i=1}^{n} b_i(x) |u_{x_i}|^q dx +$$

$$+ \frac{1-\delta_5}{p} \int\limits_{\Omega_t} b_0(x) |u|^p dx \biggr\}, \tag{15}$$

де $0 < \delta_5 < 1$.

З (15) одержуємо оцінку

$$[L(t)]^{1/(1-\alpha)} \leqslant \mu_3 \delta_6 \left[H(t) + \int\limits_{\Omega_t} b_0(x)|u|^p dx \right] \tag{16}$$

майже для всіх $t \in (0,T)$, де $\delta_6 = \max\{\delta_5, (1-\delta_5)/p\}$. На підставі оцінок (13), (16)

$$L'(t) \geqslant C_0 [L(t)]^{1/(1-\alpha)} \tag{17}$$

майже для всіх $t \in (0,T)$.

За умовою теореми $H(0) = -\lambda > 0$. Тому $L(0) = (-\lambda)^{1-\alpha} + \varepsilon \int\limits_{\Omega_0} u_0^2 dx$ і, зменшивши при потребі ε, можемо вважати, що

$$L(0) \geqslant \left(-\frac{\lambda}{2} \right)^{1-\alpha} := \alpha_0.$$

Проінтегруємо нерівність (17). Маємо

$$\frac{dL}{(L)^{1/(1-\alpha)}} \geqslant C_0 dt,$$

звідки одержимо, що

$$L(t) \geqslant \left[\frac{1-\alpha}{1-\alpha-\alpha C_0 \alpha_0^{\alpha/(1-\alpha)} t} \right]^{(1-\alpha)/\alpha} \alpha_0.$$

Отже, існує таке $T_0 \leqslant T$, що

$$\lim_{t \to T_0 - 0} L(t) = +\infty.$$

Оскільки

$$H(t) \leqslant \frac{1}{p} \int\limits_{\Omega_t} b_0(x)|u|^p dx,$$

то з (16) одержуємо твердження теореми.

1. *Баренблат Г. И., Желтов Ю. П., Кочина И. Н.* Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // Прикл. математика и механика. – 1960. – **24**, вып. 5. – С. 852–864.

2. *Chen P. J., Gurtin M. E.* On a theory of head conduction involving to temperatures // Z. angew. Math. und Phys. – 1968. – **19**. – P. 614–627.
3. *Чудновский А. Ф.* Теплофизика почв. – Москва: Наука, 1976. – 352 с.
4. *Majchrowski M.* On inverse problems with nonlocal condition for parabolic systems of partial differential equations and pseudoparabolic equations // Demonstr. math. – 1993. – **26**, No 1. – P. 255–275.
5. *Гладков А. Л.* Задачи Коши в классах растущих функций для некоторых нелинейных псевдопараболических уравнений // Дифференц. уравнения. – 1988. – **24**, № 2. – С. 277–288.
6. *Гладков А. Л.* Задачи Коши в классах растущих функций для некоторых нелинейных уравнений с частными производными третьего порядка. – Москва, 1984. – 44 с. – Деп. в ВИНИТИ 12.04.84 Эг., № 2282–84.
7. *Гладков А. Л.* Единственность решения задачи Коши для некоторых квазилинейных псевдопараболических уравнений // Мат. заметки. – 1996. – **60**, № 3. – С. 356–362.
8. *Кожанов А. И.* Теоремы сравнения и разрешимость краевых задач для некоторых классов эволюционных уравнений типа псевдопараболических и псевдогиперболических. – Новосибирск, 1990. – С. 1–30. – (Препр. / АН СССР. СО. Ин-т математики; № 17).
9. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – Москва: Мир, 1978. – 336 с.
10. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – Москва: Мир, 1972. – 608 с.
11. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1958. – 475 с.

Львівський національний університет ім. Івана Франка *Надійшло до редакції 18.03.2008*

УДК 512.547.4

А. В. Дудко

Описание характеров на обобщенных группах движений, связанных с $GL(\infty, \mathbb{F}_q)$

(Представлено академиком НАН Украины Л. А. Пастуром)

Groups $M_{n,m}$ which generalize the infinite groups of motions over a finite field are introduced. A complete classification of finite-type factor representations for the groups $M_{n,m}$ is given.

Предварительные замечания. Обозначим через $\mathbb{F}_q$ конечное поле из $q = p^l$ элементов, где $l \in \mathbb{N}$, p — простое число. Пусть $GL(\infty, \mathbb{F}_q)$ — группа всех обратимых бесконечных матриц над $\mathbb{F}_q$ вида $I + A$, где A имеет лишь конечное число ненулевых элементов. Обозначим $\mathbb{F}_q^\infty$ пространство всех бесконечных вектор-столбцов с элементами из $\mathbb{F}_q$, которые начиная с некоторого места равны 0. Пусть $\{e_i\}$ — канонический базис в $\mathbb{F}_q^\infty$. Для n, $m \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}$ положим

$$M_{n,m} = \{h \in GL(\infty, \mathbb{F}_q) \colon h^t e_i = e_i \text{ при } i \leqslant n,\ he_i = e_i \text{ при } n < i \leqslant n + m\}, \tag{1}$$

где ^{t} — обычное транспонирование. Для этих групп в работе дается полное описание фактор-представлений конечного типа.