6. *Нарежный Э.Г.* Эффективность охлаждения торцевой межпрофильной поверхности турбинной ступени при вдуве воздуха через тангенциальную щель // Энергомашиностроение. – 1978. – №11. – С. 24-25.

7. 14. *Журавлев В. А., Копелев С. З., Лихерзак Е. Е.* Характеристики турбинной решетки при вдуве по торцу // Изв. АН СРСР. Энергетика и транспорт. – 1986. – № 4. – С. 130 – 137.

Получено 21.02.2008 г.

УДК 536.25

Фиалко Н.М., Блинов Д.Г., Прокопов В.Г., Шеренковский Ю.В., Юрчук В.Л., Сариогло А.Г., Иваненко Г.В.

Институт технической теплофизики НАН Украины

МАЛОМОДОВОЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧ ГИДРОДИНАМИКИ И ТЕПЛООБМЕНА В КРИВОЛИНЕЙНЫХ КАНАЛАХ

Розглянуто питання побудови маломодових моделей процесів тепломасообміну. Проаналізовано різні аспекти використання методу поліаргументних систем та методу декомпозиції ортогональними власними функціями. Показано ефективність та перспективність застосування цих методів для аналізу задач тепломасопереносу у криволінійних каналах

Обсуждены вопросы построения маломодовых моделей процессов тепломассообмена. Проанализированы различные аспекты применения метода полиаргументных систем и метода декомпозиции по ортогональным собственным функциям. Показана эффективность и перспективность применения этих методов для анализа задачи тепломассопереноса в криволинейных каналах.

The issues of construction of low-dimensional models for heat mass transfer problems are discussed. The various aspects of applying the method of polyargumental systems and method of proper orthogonal decomposition are analysed. It is shown effectiveness and perspective of these methods for analyzing problems in a curved duct.

A - амплитуда изгиба канала,
a - амплитудная функция,
H - ширина канала,
L - шаг изгиба канала,
$\mathrm{Re} = u^*H/\nu$ - число Рейнольдса,
u - характерная скорость,
x,y – координаты,
$\gamma = A/L$ - отношение амплитуды изгиба к шагу изгиба канала,
δ - относительная интегральная погрешность,
$\varepsilon = H/A$ - отношение ширины канала к амплитуде его изгиба,
ν - коэффициент кинематической вязкости,
τ - текущее время,
φ - пространственная базисная функция.

Современные возможности компьютерной техники и экспериментального оборудования позволяют получить исследуемые распределения скоростей и температур с недоступной ранее степенью детализации и точности. Несмотря на это обработка полученной (зачастую с существенными финансовыми затратами) информации основывается на тривиальном осреднении характеристик задачи с определением соотношений в виде критериальных связей и уравнений регрессии. При этом вся детальная полевая информация теряется, т.к. хранение ее ввиду громоздкости не представляется возможным и целесообразным. С потерей же полевой информации теряется информация о погранслоях, структурах в потоках и их влиянии на характеристики задачи.

В этой связи обобщение полученных из дорогостоящих вычислений и натурных экспериментов данных, их фильтрация и выявление существенного и главного, не теряя при этом точности отражения физических закономерностей – представляет собой актуальную задачу.

В последние десятилетия одним из эффективных средств анализа задач гидродинамики и теплообмена является метод ортогональной декомпозиции (Proper orthogonal decomposition) POD, основанный на процедуре Кархунена-Лоеве (Karhunen-Loeve) [1]. Специальным образом построенный базис (называемый эмпирическим) позволяет представить данные, полученные в результате прямого численного моделирования или эксперимента, в виде малочленного ряда по этому базису. Эффективность метода POD во многом определяет идея построения базиса для аппроксимации не априорно, а на основе максимального отражения информации содержащейся в аппроксимируемой функции. Полнота отражения всей имеющейся информации и отсутствие априорностей являются ключевыми моментами и такого проекционного метода, как метод полиаргументных систем (МПС) [2]. В работе [3] была продемонстрирована эквивалентность результатов и отличие подходов к реализации метода POD и метода МПС, примененного для решения аппроксимационных задач. Одним из главных отличий метода МПС является подход к определению собственных чисел эмпирического базиса на основе последовательного самосогласования компонентов аппроксимации по пространственным и временным направлениям.

Приведем формулировки указанных методов. Пусть имеется набор реализаций (например, временных), какого либо процесса $\mathrm{U}(\mathbf{x},\tau)=\left\{\mathrm{U}_{\mathrm{i}}(\mathbf{x},\tau_{\mathrm{i}})\right\}_{\mathrm{i}=1}^{N}$. Необходимо найти такое аппроксимационное разложение $\mathrm{U}_N=\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}}\mathrm{a}_{\mathrm{i}}(\tau)\varphi_{\mathrm{i}}(\mathbf{x})$, которое оптимально в смысле заданной нормы приближения

$$\min_{\varphi_{\mathrm{i}},\mathrm{a}_{\mathrm{i}}}\left\langle\left\|\mathrm{U}-\sum_{\mathrm{i}=1}\mathrm{a}_{\mathrm{i}}(\tau)\varphi_{\mathrm{i}}(\mathbf{x})\right\|^2\right\rangle \qquad (1)$$

при дополнительном условии ортогональности

$$\left\langle a_i,a_j\right\rangle=(\varphi_i,\varphi_j)=\ 0,\ \text{при}\quad i\neq j, \qquad (2)$$

где $\| \ \|$ и $(\ , \ )$ норма и скалярное произведение в L^2 пространстве, $\|f\|^2=(f,f)$, $\langle\ \rangle$ – осреднение по набору реализаций.

Особенность настоящей формулировки состоит в том, что искомыми являются обе системы функций $\{a_i\}$, $\{\varphi_i\}$. При этом амплитудные функции $\{a_i\}$ определяются из следующих соотношений $a_i=(U,\varphi_i)$, $i=1...N$.

Используя формализм множителей Лагранжа, можно показать, что постановка (1) эквивалентна следующему интегральному уравнению

$$R\varphi_i=\lambda_i\varphi_i\ ,\ R\varphi=(\langle U(\mathbf{x},\tau)\cdot U(\mathbf{x}',\tau)\rangle,\varphi(\mathbf{x}')), \qquad (3)$$

где λ_i – собственное число, R - корреляционная функция. Решением этого интегрального уравнения является набор ортогональных функций $\{\varphi_i\}$, называемых эмпирическими собственными функциями.

Такое же интегральное уравнение (3) может быть получено и на основе МПС, однако сути метода отвечает следующая т.н. полиаргументная система [3], из решения которой определяются обе системы искомых ортогональных функций:

$$a_{\mathrm{i}}(\tau)\int\varphi_{\mathrm{i}}(\mathbf{x})\varphi_{\mathrm{i}}(\mathbf{x})d\mathbf{x}=\int U\varphi_{\mathrm{i}}(\mathbf{x})d\mathbf{x}, \qquad i=1...N,$$

$$\varphi_{\mathrm{j}}(\mathbf{x})\int a_{\mathrm{j}}(\tau)\cdot a_{\mathrm{j}}(\tau)d\tau=\int\mathrm{U}a_{\mathrm{j}}(\tau)d\tau, \qquad j=1...N.$$

Эффективность подхода POD и МПС продемонстрирована в многочисленных приложениях [3, 4, 5].

Впервые применил процедуру POD к изучению физических явлений Люмле [1]. Его идея состояла в выявлении с помощью процедуры Кархунена-Лоева в турбулентных течениях пространственных структур. Несмотря на то, что в полном объеме эта идея не подтвердилась, сам метод оказался очень эффективным, о чем свидетельствует последующее его применение многими исследователями.

Изложенные выше методы обработки данных допускают параметрическую трактовку. При этом подходе в качестве реализаций исследуемого процесса используются поля, определенные при различных значениях управляющих и режимных параметров, а в приведенных выше соотношениях аргументом амплитудных функций $\{a_i\}$ является не время, а параметры задачи. Следует отметить, что физической основой аппроксимации является выявление базисных функций $\{\varphi_i\}$, которые отражают качественное подобие полей, полученных при различных значениях параметров.

В настоящей работе рассмотрено применение изложенного параметрического подхода к анализу и обработке результатов численного моделирования течения и теплообмена в каналах S-образной формы (рис.1).

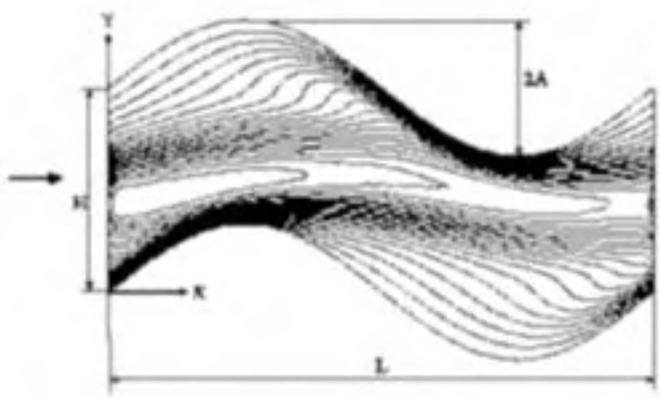

Рис.1. К постановке задачи.

Каналы такой формы представляют собой пример конструктивного решения, позволяющего достичь улучшения условий теплообмена путем генерирования вторичного течения и дестабилизации основного потока жидкости. Индуцирование вихревых структур в изгибах канала вызывает движение жидкости от стенки к центру основного потока и приводит к разрушению и утончению пограничного слоя.

На характеристики теплообмена и гидродинамики оказывают влияние геометрические (ε, γ) и режимные (Re) параметры. Качественное подобие гидродинамических и тепловых полей при различных параметрах позволяет построить для обработки и анализа данных маломодовую модель на основе изложенного выше параметрического подхода.

Рассмотрим следующее аппроксимационное приближение:

$$U_N = \sum_{i=1}^{N} a_i(\varepsilon, \gamma, \mathrm{Re})\varphi_i(x, y), \tag{4}$$

где под U понимают поля температур и компонент скорости.

Задача состоит в выявлении такого пространственного базиса $\{\varphi_i\}$ и амплитудных функций $\{a_i\}$, которые отражают основные особенности течения.

С помощью пакета вычислительной гидродинамики Fluent было промоделировано течение в канале S-образной формы в широком диапазоне параметров $\varepsilon, \gamma, \mathrm{Re}$ ($\varepsilon \in [0{,}5;2{,}5], \gamma \in [0{,}125;0{,}5], \mathrm{Re} \in [50;500]$). Полученные 128 температурных и скоростных полей были аппроксимированы с помощью изложенного подхода. Анализ результатов показывает, что уже четыре члена в приближении (4) обеспечивает среднеквадратичную погрешность порядка 2% (рис.2).

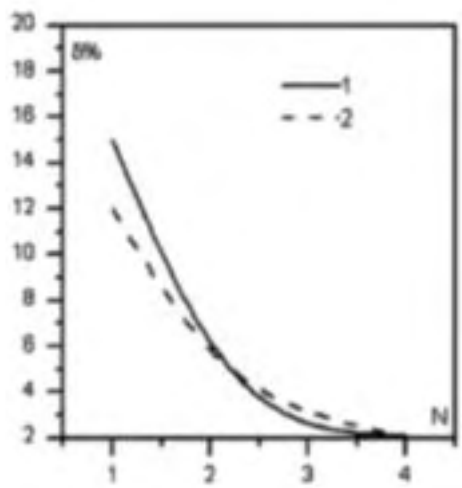

Рис.2. Зависимость интегральной среднеквадратичной погрешности δ от числа членов N в аппроксимационном представлении: 1 – для скоростного поля, 2 – для температурного поля.

Можно сказать, что для представления всей картины движения и теплообмена (включая структуру вихревых образований и особенности погранслоя) в проанализированном диапазоне параметров достаточно четырех пространственных и амплитудных функций вместо 128 исходных многомерных полей.

Достаточность такого описания подтверждает и анализ точности представления исследуемых полей при значениях параметров, отличающихся от исходных. Для получения данных в промежуточных точках (по параметрам $\varepsilon, \gamma, \mathrm{Re}$) возможна простая интерполяция $a_i(\varepsilon, \gamma, \mathrm{Re})$ и затем пересчет ряда (4) с новыми значениями амплитуд и теми же пространственными функциями $\{\varphi_i\}$. Более трудоемкий и в общем случае более корректный подход заключается в использовании метода Галеркина для проецирования исходной системы уравнений (уравнений Навье-Стокса и уравнения энергии) на построенный при аппроксимации пространственный базис [6]. Как показал анализ исследуемой задачи течения в каналах *S*-образной формы, более простой подход, основанный на интерполяции, оказывается более предпочтительным.

Выводы

1. Результаты настоящей работы демонстрируют эффективность изложенного параметрического подхода к обработке и анализу сложного по структуре течения. Присущее методам POD и МПС свойство выявлять особенности исследуемого поля позволяет построить маломодовую модель, тем самым кардинально снизив информационную емкость анализа.

2. Наличие маломодовой модели исследуемого устройства или процесса позволяет существенно упростить решение таких важных в прикладном плане задач как задачи оптимизации и идентификации, поскольку позволяет заменить многократное решение сложных управляющих уравнений (которыми в нашем примере являются дифференциальные уравнения в частных производных Навье-Стокса и энергии) решением более простых алгебраических задач.

ЛИТЕРАТУРА

1.*Lumley J.L.*, Atmospheric Turbulence and Radio Wave Propagation. – M.:Nauka, 1967. – C. 166–171.

2.*Прокопов В.Г., Беспалова Е.И., Шеренковский Ю.В.* Об одном новом методе математического исследования процессов переноса // Пром. теплотехника. – 1979, – Т.2, . – С. 33–41.

3 *Blinov D. G., Sherenkovskii Yu.V. Fialko N.M., Prokopov V. G. and Yurchuk V.L.* Construction of low-dimensional models for heat-transfer problems on the base of method of polyargumental systems // Int.Comm. Heat Mass Transfer. – 2004, –V. 31, №7–P. 963–970.

4. *Sirovich L.* Empirical eigenfunctions and low dimensional systems //In:. New Perspectives in Turbulence. –N.Y.: Springer-Verlag, 1991. – P.139.

5. *Deane A.E., Kevrekidis I.G., Kardiadakis G.E., Orszag S.A.* Low-dimensional models for complex geometry flows: application to grooved channels and circular cylinders // Phys. Fluids A. – 1991. – V. 3., № 10. – P. 2337–2354.

6. *Epureanu B.I., E.H. Dowell*, *Hall K.C.* A parametric analysis of Reduced-Order Models of Potential Flows in Turbomachinery using Proper Ortogonal Decomposition, – New Orleans.: Proceeding of ASME Turbo EXPO, 2001.

Получено 05.02.2009 г.