

ПРО ТОЧНІСТЬ ОБЧИСЛЕННЯ СКЛАДОВИХ ВІДХИЛЕННЯ ПРЯМОВИСНИХ ЛІНІЙ У РАЙОНІ ЗАХІДНИХ АЛЬП

Розглянуто точність обчислення складових відхилень прямовисних ліній для дев'яти пунктів Міжнародного геодезичного полігона Західних Альп з використанням сучасної моделі гравітаційного поля Землі EGM 2008 і даних обчислень для вказаних пунктів інших авторів. Показано, що з точністю $\sim 1''$ можна знайти гравіметричні складові відхилень прямовисних ліній, якщо враховувати перші поправки Молоденського і різновисотність спостережень для пунктів Міжнародного геодезичного полігона.

Ключові слова: відхилення прямовисних ліній; Міжнародний геодезичний полігон; модель гравітаційного поля Землі EGM 2008.

Вступ

Як відомо, гравіметричні знімання земної поверхні та акваторій морів та океанів дають необхідну вихідну інформацію для розв'язання задач фізичної геодезії, геодезичного виробництва, а також для наукових і прикладних завдань геофізики тощо.

У наш час гравіметричними зніманнями покриті значні площі як на континентах, так і на морях і океанах. Гравіметрична вивченість різних районів земної поверхні, за даними Міжнародного гравіметричного бюро (Тулуза, Франція), на 1986 р. охоплювала 3 362 575 гравіметричних пунктів і була представлена аномаліями прискорення вільного падіння з відповідними розмірами трапецій $1 \times 1''$. Зауважимо, що гравіметрична вивченість поверхні Землі до середини 80-х років XX століття була дуже нерівномірною, але за останні десятиліття ступінь такого вивчення істотно вирівнявся.

На сучасному етапі актуальним завданням є створення моделей гравітаційного поля Землі (ГПЗ) для забезпечення визначення аномалій прискорення вільного падіння і складових відхилень прямовисних ліній з середніми квадратичними помилками відповідно 3–5 мГал і $0,5\text{--}1,0''$. За останні десятиліття, завдяки досягненням у галузі космічної геодезії та гравіметрії, отримано значний обсяг нової, точнішої і детальнішої інформації про гравітаційне поле Землі. В результаті цього досягнуто істотного прогресу щодо підвищення точності й детальності як моделей ГПЗ, так і в галузі розроблення та реалізації нових форм математичного представлення гравітаційних аномалій. Серед нетрадиційних методів моделювання ГПЗ все поширенішим стає представлення гравітаційних аномалій у вигляді цифрових моделей. До цифрових моделей ГПЗ прийнято відносити такі характеристики аномального ГПЗ, як аномалії прискорення вільного падіння, висоти квазігеоїда, складові відхилень прямовисних ліній у вигляді їх значень, які задані, як правило, у вузлах рівномірної сітки координатних ліній в єдиній системі координат. Ці дані закодовані у цифровому вигляді на машинний носій інформації. Однією з вимог до цифрових моделей ГПЗ є те, що до складу моделі повинен входити певний алгоритм інтерполювання для отримання проміжних значень характеристик ГПЗ з необхідною точністю.

Аналіз останніх досліджень проблеми

У роботі [Пеллинен, 1969] наведено огляд методів, які рекомендується використовувати для обчислення відхилень прямовисних ліній в горах. Найбільшу увагу приділено методам, що уточнюють відомі формули Венінга – Мейнеса в нульовому і першому наближеннях. У роботі висвітлено тільки ті методи, які пройшли апробацію на моделях або в гірському районі.

В роботі [Аронов, Гордин, 1971] розроблено практичний ефективний алгоритм розв'язування для обчислення гравіметричних складових прямовисних ліній у центральній зоні на основі методу інтерполювання і трансформації потенціальних полів. Практичну реалізацію методу здійснено в системі програм “Редукция – Отвес” для ЕОМ типу БЭСМ – 4.

Автор роботи [Марич, 1973] показав, що поправки Молоденського до його нульового наближення аномального потенціалу впливають в основному не на висоти квазігеоїда, а на відхилення прямовисних ліній у точках фізичної поверхні Землі. Отже, для практики мають значення насамперед обчислення відхилень прямовисних ліній у першому наближенні.

В роботі [Марич та ін., 1969] виконано обчислення відхилень прямовисних ліній для моделей Землі за побудованими для них гравіметричними картами. Порівняння результатів обчислень з точними показують, що вони відрізняються від останніх приблизно на декілька десятих секунди.

Автор роботи [Аронов, 1976] запропонував метод опрацювання аномалій прискорення вільного падіння для довільної поверхні вимірювань, який можна використати для обробки цих аномалій у гірському районі, інтерполяцію значень різних дериват поля, обчислення різних трансформант поля і, зокрема, відхилень прямовисних ліній. Показано, що точність цього методу є близькою до оптимальної. Автор встановив можливість використання його методу для обчислення відхилень прямовисних ліній у випадку нерівномірної та рідкої мережі вимірювань на основі порівняння з даними, отриманими за астрономічними спостереженнями та іншими методами.

У роботі [Марич, Гудз, 1981] зроблено спробу визначити порядок величини перших поправок

Молоденського до stokсового наближення висот квазігеоїда та відхилень прямовисних ліній у гірському районі Міжнародного геодезичного полігона. Якщо обчислення виконувати за формулами Стокса і Венінг – Мейнеса з використанням топографічної карти і карти аномалій у неповній топографічній редукції, одержимо основне значення першої поправки Молоденського.

У роботі [Остач, Пеллінен, 1971] виконано обчислення гравіметричних складових відхилень прямовисних ліній для пунктів Міжнародного дослідного полігона в районі Західних Альп у нульовому наближенні. Розходження між гравіметричними і астрономіко-геодезичними складовими відхилень прямовисних ліній можна пояснити принциповими похибками формул нульового наближення і помилками астрономічних визначень. Крім цього, автори підкреслюють явну недостатність гравіметричного знімання навколо деяких астропунктів.

Постановка завдання

З питання практичних обчислень гравіметричних складових відхилень прямовисних ліній для пунктів Міжнародного дослідного геодезичного полігона в районі Західних Альп опубліковано дуже багато робіт різних дослідників. Метою цієї роботи є узагальнення деяких методів обчислення СВІР з погляду точності обчислення їх величин і можливості використання високоточних моделей геопотенціалу для обчислення відхилень прямовисних ліній з точністю 0,2–0,5"

Характеристика вихідних матеріалів

Рельєф місцевості на Міжнародному дослідному полігоні досить складний і різноманітний. Більшість гравіметричних пунктів розміщені на висотах 100–400 м. У північній і північно-західній частинах є пункти, висоти яких сягають 2–3 км над рівнем моря. Похибки визначення значень Δg на гравіметричних пунктах становлять 2–3 мГал, при середній густоті мережі 1 пункт на 100 км². На досліджуваній площі є великі ділянки (до 1600 км²), для яких не було виконане гравіметричне знімання. Амплітуда більшості локальних аномалій $|\Delta g| = 20 \div 60$ мГал. Чисті помилки інтерполяції для дослідного полігона становлять $\delta(\Delta g) = 1 \div 3$ мГал; $\delta(\xi, \eta) = 0,2 \div 0,7$ " відповідно для аномалій і відхилень прямовисних

ліній. Загалом для площі полігона похибка чистої інтерполяції становить 4–6 мГал, а похибки обчислення відхилень прямовисних ліній 1,0–1,2".

Виклад основного матеріалу

Відомо, що вирішення багатьох прикладних завдань геодезії та гравіметрії пов'язано з необхідністю точного врахування впливу таких характеристик гравітаційного поля Землі, як складові відхилень прямовисних ліній, висоти квазігеоїда та інші.

У наш час одним з основних методів аналізу гравітаційного поля Землі є метод математичного моделювання. Він одночасно є засобом зберігання, відтворення і перетворення інформації про гравітаційне поле Землі і засобом забезпечення взаємодії користувачів цієї інформації.

Розроблення моделей гравітаційного поля Землі великою мірою ґрунтується на якісних та кількісних вимогах до вихідних геодезичних і гравіметричних даних для конкретних завдань.

Методи обчислень висот квазігеоїда і складових відхилень прямовисних ліній за гравіметричною інформацією можна розділити на такі групи: методи інтегральних перетворень; методи параметричної апроксимації; методи статистичної колокації та комбіновані методи.

Методи інтегральних перетворень базуються на інтегральних формулах Стокса і Венінг – Мейнеса:

$$\zeta = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} \Delta g \cdot S(\psi) d\sigma, \quad (1)$$

$$\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix} = \frac{1}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} \Delta g \frac{dS(\psi)}{d\psi} \begin{Bmatrix} \cos A \\ \sin A \end{Bmatrix} d\sigma, \quad (2)$$

де ζ – висота квазігеоїда; ξ, η – складові відхилень прямовисних ліній у площині меридіана і першого вертикала; Δg – вихідна аномалія прискорення вільного падіння (у вільному повітрі); σ – земна сфера; R – радіус земної сфери; γ – нормальне значення прискорення вільного падіння; ψ – сферична відстань між досліджуваною і поточною точками; $S(\psi)$ – функція Стокса.

За сучасних вимог науки і практики щодо визначення ВКГ і СВІР точність формул (1) і (2) є недостатньою і необхідно використовувати теорію Молоденського за формулами Л.П. Пеллінена:

$$\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix} = \frac{1}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} (\Delta g' + 2\pi G D H + \delta g) \frac{dS(\psi)}{d\psi} \begin{Bmatrix} \cos A \\ \sin A \end{Bmatrix} d\sigma + \begin{Bmatrix} \Delta \xi \\ \Delta \eta \end{Bmatrix}, \quad (3)$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta \xi \\ \Delta \eta \end{Bmatrix} = \frac{G D R^2}{\gamma} \iint_{\sigma} \frac{H - H_0}{r_0} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right) \begin{Bmatrix} \cos A \\ \sin A \end{Bmatrix} d\sigma \quad (4)$$

$$\delta g = \frac{H_0 - H}{2\pi} R^2 \iint_{\sigma} \frac{\Delta g' - \Delta g_0}{r_0^3} d\sigma, \quad (5)$$

де $\Delta g'$ – аномалія у неповній топографічній редукції; $2\pi G D H$ – поправка Буге; $\Delta \xi, \Delta \eta$ – поправки до складових відхилень прямовисних ліній за вплив топогра-

фічних мас; r_0 – проекція r на горизонтальну площину; H, H_0 – висота поточної і досліджуваної точок; G – гравітаційна стала; D – густина топографічних мас.

Можна користуватися найзручнішим методом аналітичного продовження [Марич, 1973]:

$$\left\{ \begin{matrix} \xi \\ \eta \end{matrix} \right\} = \frac{1}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} \Delta g \frac{dS(\psi)}{d\psi} \begin{Bmatrix} \cos A \\ \sin A \end{Bmatrix} d\sigma + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} g_n \frac{dS(\psi)}{d\psi} \begin{Bmatrix} \cos A \\ \sin A \end{Bmatrix} d\sigma, \quad (6)$$

$$g_0 = \Delta g, g_n = -\sum_{m=1}^n (H - H_0)^m \cdot L_m(g_{n-m}),$$

$$L_n(\Delta g) = \frac{1}{n} L_1(\Delta g) [L_{n-1}(\Delta g)]$$

$$L_1(\Delta g) = \frac{1}{2} \iint_{\sigma} \frac{\Delta g - \Delta g_0}{r^3} d\sigma$$

Серед методів апроксимації для обчислення значень висот квазігеоїда і відхилень прямовисних ліній найпоширенішим є метод сферичних гармонік, який ґрунтується на відомих формулах розкладу характеристик гравітаційного поля Землі у ряд за сферичними функціями:

$$\zeta = \frac{GM}{\gamma r} \sum_{n=r}^N \left(\frac{a}{r}\right)^n \times \quad (7)$$

$$\times \sum_{m=0}^n (\overline{C_{nm}} \cos m\lambda + \overline{S_{nm}} \sin m\lambda) \overline{P_{nm}}(\sin \varphi)$$

$$\xi = -\frac{GM}{\gamma r^2} \sum_{n=r}^N \left(\frac{a}{r}\right)^n \times \quad (8)$$

$$\times \sum_{m=0}^n (\overline{C_{nm}} \cos m\lambda + \overline{S_{nm}} \sin m\lambda) \frac{\partial \overline{P_{nm}}(\sin \varphi)}{\partial \varphi}$$

$$\eta = -\frac{GM}{\gamma r^2 \cos \varphi} \left(\frac{a}{r}\right)^n \times \quad (9)$$

$$\times \sum_{m=0}^n (\overline{S_{nm}} \cos m\lambda - \overline{C_{nm}} \sin m\lambda) \frac{\partial \overline{P_{nm}}(\sin \varphi)}{\partial \varphi}$$

де G – гравітаційна стала; M – маса Землі; a – велика піввісь загального земного еліпсоїда; Φ, λ, γ – сферичні координати (широта, довгота, радіус-вектор); $\overline{C_{nm}}, \overline{S_{nm}}$ – повністю нормовані коефіцієнти розкладу; $\overline{P_{nm}}(\sin \varphi)$ – повністю нормовані функції Лежандра; n, m – степінь та порядок гармоніки; N – границя суми.

З підвищенням точності глобальних моделей геопотенціалу розвивається альтиметричний підхід, який називають “вилучення – відновлення”. Цим підходом користуються для обчислень висот квазігеоїда і складових відхилень прямовисних ліній.

Ми виконали такі експериментальні дослідження: для дев’яти пунктів міжнародного полігона в Західних Альпах визначено гравіметричні складові відхилень прямовисних ліній з моделі EGM 2008; для цих самих пунктів використано значення гравіметричних відхилень з роботи [Остач, Пеллинен, 1971] з урахуванням першої поправки Молоденського [Марич, 1973]; для деяких з пунктів використано і результати обчислень гравіметричних відхилень прямовисних ліній з урахуванням різновисотності цих пунктів з роботи [Аронов, Гордин, 1971]. Наступним кроком є обчислення астрономо-геодезичних складових відхилень прямовисних ліній на цих пунктах і порівняння їх з істинними значеннями.

Значення гравіметричних і астрономо-геодезичних відхилень прямовисних ліній подано в табл. 1 (знаком “*” позначені пункти, в значення відхилень прямовисних ліній яких внесено першу поправку Молоденського). Обчислені різниці відхилень прямовисних ліній, визначених різними методами, наведено в табл. 2. Похибки обчислених значень астрономо-геодезичних складових відхилень прямовисних ліній наведено в табл. 3.

Таблиця 1

Значення величин відхилень прямовисних ліній, знайдених різними методами

№ пункту	Гравіметричні складові відхилень прямовисних ліній						Астрономо-геодезичні відхилення прямовисних ліній							
	Модельні значення		За Остачем		За Ароновим		Істинні значення		Модельні значення		За Остачем		За Ароновим	
	ξ" гр	η" гр	ξ" гр	η" гр	ξ" гр	η" гр	ξ" аг	η" аг	ξ" аг	η" аг	ξ" аг	η" аг	ξ" аг	η" аг
14*	-25,5	21,5	-23,3	16,5	-20,5	15,3	-26,3	17,1	-25,2	21,5	-23,2	16,5	-19,9	15,3
20	-15,2	4,9	-15,9	1,6	-15,8	1,6	-20,9	1,0	-15,2	4,9	-15,9	1,6	-15,8	1,6
30*	-20,5	28,4	-21,9	27,5	-20,4	26,3	-24,8	23,3	-20,4	28,4	-21,9	27,5	-20,3	26,3
33*	-4,5	17,1	-4,2	17,0	-4,2	17,1	-8,3	14,4	-4,4	17,1	-4,2	17,0	-4,1	17,1
34	-8,1	27,0	-7,3	25,9	-7,0	24,2	-11,4	24,9	-8,0	27,0	-7,3	25,9	-6,9	24,2
37*	4,0	4,8	1,1	4,6	1,1	3,2	-2,9	2,2	4,0	4,8	1,2	4,6	1,2	3,2
38	11,5	-0,1	9,5	-1,4	8,7	0,0	4,0	-8,9	11,6	-0,1	9,5	-1,4	8,7	0,0
43*	12,2	17,2	12,3	18,9	10,6	17,9	13,4	23,2	12,2	17,2	12,3	18,9	10,6	17,9
45	-0,2	0,0	-2,6	-0,6	-3,4	-1,0	-5,6	-1,7	-0,1	0,0	-2,6	-0,6	-3,4	-1,0

Таблиця 2

Різниці істинних значень складових астрономо-геодезичних відхилень прямовисних ліній і обчислених за різними методами

№ пункту	Різниці істинних і модельних значень		Різниці істинних значень і значень, обчислених за Остачем		Різниці істинних значень і значень, обчислених за Ароновим	
	$\xi_{AG}^{icm} - \xi_{AG}^{mod}$	$\eta_{AG}^{icm} - \eta_{AG}^{mod}$	$\xi_{AG}^{icm} - \xi_{AG}^{Ocm}$	$\eta_{AG}^{icm} - \eta_{AG}^{Ocm}$	$\xi_{AG}^{icm} - \xi_{AG}^{Ap}$	$\eta_{AG}^{icm} - \eta_{AG}^{Ap}$
14*	-1,1	-4,4	-3,1	0,6	-6,4	1,8
20	-5,7	-3,9	-5,0	-0,6	-5,1	-0,6
30*	-4,4	-5,1	-2,9	-4,2	-4,5	-3,0
33*	-3,9	-2,7	-4,1	-2,6	-4,2	-2,7
34	-3,4	-2,1	-4,1	-1,0	-4,5	0,7
37*	-6,9	-2,6	-4,1	-2,4	-4,1	-1,0
38	-7,6	-8,8	-5,5	-7,5	-4,7	-8,9
43*	1,2	6,0	1,1	4,3	2,8	5,3
45	-5,5	-1,7	-3,0	-1,1	-2,2	-0,7

Таблиця 3

Похибки обчислених значень відхилень прямовисних ліній

Похибки модельних значень		Похибки значень, обчислених за Остачем		Похибки значень, обчислених за Ароновим	
m''_{ξ}	m''_{η}	m''_{ξ}	m''_{η}	m''_{ξ}	m''_{η}
4,90	4,65	3,86	3,46	4,42	3,79

Висновки

1. Точні перші поправки гравіметричних складових відхилень прямовисних ліній з урахуванням поправок за рельєф і за картами аномалій Буге для пунктів дослідного полігона Західних Альп можуть досягати 3".

2. Розходження між істинними й обчисленими складовими відхилень прямовисних ліній можна пояснити, в основному, помилками астрономічних визначень, оскільки гравіметричні складові відхилень прямовисних ліній враховують вплив нульового і першого наближень поля аномалій.

3. Врахування різновисотності спостережень істотно (до близько 1") підвищує точність гравіметричних складових відхилень прямовисних ліній, якщо враховувати поправку за рельєф з використанням карт аномалій Буге.

4. Різниці між модельними й істинними складовими відхилень прямовисних ліній можна пояснити неврахуванням впливу центральної і близьких зон поля аномалій.

Література

Аронов В.И., Гордин В.М. Об одном способе интерполяции аномалий и вычислений гравиметрических уклонений отвеса в районе Западных Альп // Геофизический бюллетень. – 1971. – 24. – С. 19–24.
 Аронов В.И., Гордин В.М., Белейков Н.Е., Ширгина А.И. Программа для вычисления гравиметрических уклонений отвеса в центральной зоне // Известия вузов. Геодезия и аэрофото- съемка. – 1971. – 4. – С. 41–45.

Аронов В.И. Обработка на ЭВМ значений аномалий силы тяжести при произвольном рельефе поверхности наблюдений – М.: Недра, 1976. – С. 108–124.

Марич М.И. О вычислении уклонений отвеса на физической поверхности Земли // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. – 1973. – № 18. – С. 24–28.

Марич М.И., Гудз И.Н., Дулит П.Д. Опыт вычисления уклонений отвеса на моделях Земли // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. – 1973. – № 18. – С. 29–33.

Марич М.И., Гудз И.Н. О вычислении висот квазигеоида и уклонений отвеса в горном районе // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. – 1981. – № 34. – С. 65–68.

Остач О.М., Пеллинен Л.П. Вычисление гравиметрических уклонений отвеса в нулевом приближении в районе Западных Альп // Геофизический бюллетень. – 1971. – № 24. – С. 13–18.

Пеллинен Л.П. Сравнение различных методов вычисления уклонений отвеса в горах // Bull. Geodesique. – 1968. – № 89.

Пеллинен Л.П. О вычислении уклонений отвеса и высот квазигеоида в горах // Тр. ЦНИИГАиК. – М.: Недра. – 1969. – Вып. 176. – С. 99–112.

**О ТОЧНОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЯ СОСТАВЛЯЮЩИХ ОТКЛОНЕНИЯ ОТВЕСНЫХ ЛИНИЙ
В РАЙОНЕ ЗАПАДНЫХ АЛЬП**

П.Д. Двудит, И.В. Бойко

Рассмотрено точность вычисления составляющих отклонений отвесных линий для девяти пунктов Международного геодезического полигона Западных Альп с использованием современной модели гравитационного поля Земли EGM 2008 и данных вычислений для указанных пунктов другими авторами. Показано, что с точностью $\sim 1''$ можно определить гравиметрические составляющие отклонений отвесных линий, если учитывать первые поправки Молоденского и разновысотность наблюдений для пунктов Международного геодезического полигона.

Ключевые слова: отклонение отвесных линий; Международный геодезический полигон; модель гравитационного поля Земли EGM 2008.

**ABOUT THE ACCURACY OF PLUMB LINES DEFLECTIONS COMPUTATIONS
IN WESTERN ALPS AREA**

P.D. Dvulit, I.V. Boyko

The accuracy of plumb lines deflections computation for 9 points of International geodetic polygon of Western Alps area is considered with use of modern Earth gravity model EGM 2008 and computational results for these points of other authors. It is shown that accuracy of $\sim 1''$ can be achieved in case of taking into account the first Molodensky corrections and height differences in points of International geodetic polygon.

Key words: deflections of plumb lines; International geodetic polygon; Earth gravity model EGM 2008.