УДК 536.24

Гавриш В.І., Федасюк Д.В.
Національний університет „Львівська політехніка”

МЕТОД РОЗРАХУНКУ ТЕМПЕРАТУРНИХ ПОЛІВ ДЛЯ ТЕРМОЧУТЛИВОЇ КУСКОВО-ОДНОРІДНОЇ СМУГИ ІЗ ЧУЖОРІДНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ

Розглядається стаціонарна нелінійна задача теплопровідності для кусково-однорідної ізотропної в сенсі теплофізичних властивостей смуги з чужорідним прямокутним включенням, що нагрівається внутрішніми джерелами тепла з тепловіддачею. Припускається, що на границях спряження відбувається ідеальний тепловий контакт. Запропонована методика розв’язування цієї задачі та її застосування для трьохелементної смуги з конкретною залежністю коефіцієнтів теплопровідності від температури.

Рассматривается стационарная нелинейная задача теплопроводности для кусочно-однородной изотропной в смысле теплофизических свойств полосы с инородным прямоугольным включением, нагреваемой внутренними источниками тепла с теплоотдачей. Предполагается, что на границах сопряжения осуществляется идеальный тепловой контакт. Предложена методика решения этой задачи и ее применение для трехэлементной полосы с конкретной зависимостью коэффициентов теплопроводности от температуры.

The steady state nonlinear problem of thermal conduction for piecewise homogeneous isotropic , in the sense of thermophysical properties, strip with foreign rectangular inclusion which heats at internal thermal source with heat dissipation has been considered. It is supposed that on the contact edge the ideal thermal contact takes place. The methodology of this problem solution and its application for the 3-D strip with the specific dependence of the thermal-conductivity coefficients on temperature has been offered.

$i = \sqrt{-1}$ – уявна одиниця;
q_0 – потужність внутрішніх джерел тепла;
$S_{\pm}(\zeta)$ – асиметричні одиничні функції;
$t(x,y)$ – температура;
t_c – температура зовнішнього середовища;
α_0, α_n – коефіцієнти тепловіддачі з країв смуги K_0, K_n відповідно;
Δ – оператор Лапласа;
λ_0, λ_k – коефіцієнти теплопровідності включення та k-го елемента смуги відповідно;
$\delta\_(\zeta)$ – асиметрична дельта-функція Дірака.

Вступ

Проектування складних електронних пристроїв, що мають кусково-однорідну структуру і часто функціонують в умовах інтенсивного нагрівання чи охолодження, що спричиняє залежність теплофізичних параметрів від температури, полягає не лише в оптимізації їх параметрів, але й у забезпеченні їх стабільної роботи та захисту від різноманітних збоїв, високої надійності та теплової стійкості устаткування. Із ростом потужностей та інтеграції електронних схем ускладнюється проблема термостійкості до теплових навантажень конструкцій електронних пристроїв, які частково або цілком виходять із ладу у результаті теплових перевантажень. І тому, хоча врахування залежності теплофізичних параметрів від температури значно ускладнює побудову математичних моделей теплових процесів, однак дозволяє точніше досліджувати термостійкість конструкцій.

Наближений аналітичний розв'язок лінійної граничної задачі теплопровідності для багатошарового півпростору із тепловиділяючим циліндричним включенням малих розмірів в одному із шарів побудовано в роботі [1]. Лінеаризацію нелінійної граничної задачі теплопровідності для багатошарового півпростору з внутрішніми джерелами тепла запропоновано в праці [2]. Аналітичний розв'язок лінійної задачі теплопровідності для ізотропної кусково-однорідної смуги із включенням прямокутної форми довільних розмірів наведено в роботі [3]. У праці [4] побудовано математичну модель теплових процесів для ізотропної термочутливої кусково-однорідної смуги, яка нагрівається внутрішніми джерелами тепла. Загальні рівняння теплопровідності для кусково-однорідних термочутливих тіл наведено в роботах [5, 6].

Постановка задачі

Оскільки у наведених роботах не розглядалися термочутливі конструкції з двовимірною кусково-однорідною структурою, а вузли та окремі елементи конструкцій мікроелектронної апаратури весь час ускладнюються, то виникла потреба у побудові математичних моделей для такого роду структур.

У зв'язку з цим розглянемо кусково-однорідну термочутливу ізотропну в сенсі теплофізичних характеристик смугу, яка складається з n однорідних елементів, що відрізняються геометричними та теплофізичними параметрами. Дана система належить до прямокутної декартової системи координат Oxy із початком на одному з країв смуги (рисунок). У j-му $(j=\overline{2,n-1})$ елементі смуги знаходиться включення прямокутної форми, в області $\Omega_0=\{(x,y):|x|\le h, y_{j-1}\le y<y_j\}$ якого діють рівномірно розподілені внутрішні джерела тепла потужністю q_0. На прямих спряження $y=y_k$ $(k=\overline{1,n-1})$ та відрізках спряження $L_{\pm}=\{(\pm h,y): y_{j-1}\le y<y_j\}$ виконуються умови ідеального теплового контакту, а на краях смуги $K_0=\{(x,0):|x|<\infty\}, K_n=\{(x,y_n):|x|<\infty\}$ відбувається конвективний теплообмін із

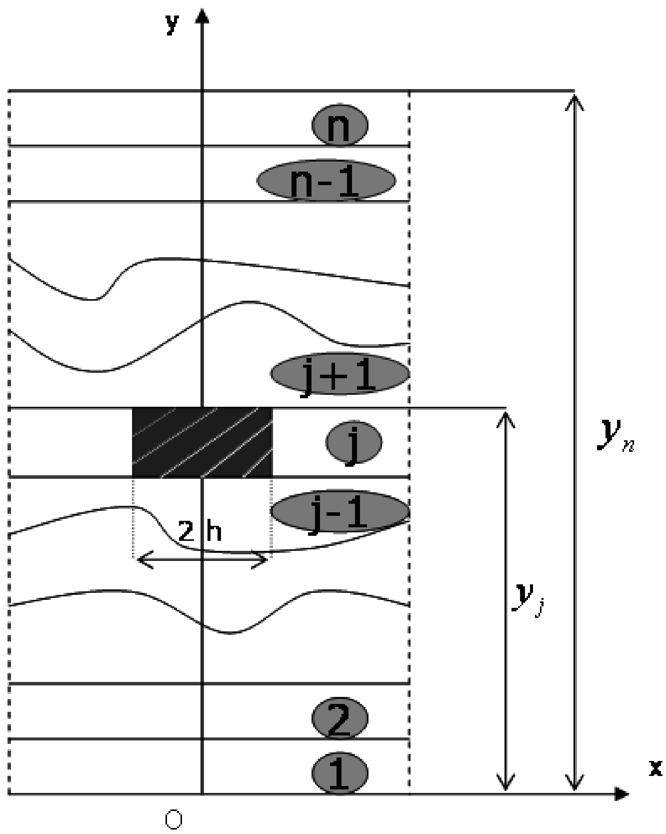

Рис. Кусково-однорідна ізотропна термочутлива смуга з прямокутним тепловиділяючим включенням.

зовнішнім середовищем зі сталою температурою t_c.

Частково лінеаризована вихідна гранична задача

Розподіл стаціонарного температурного поля $t(x,y)$ в кусково-однорідній термочутливій смузі отримується шляхом розв'язування нелінійного рівняння теплопровідності [5, 6]

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda(x,y,t)\frac{\partial}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\lambda(x,y,t)\frac{\partial}{\partial y}\right]=-q_0\cdot N\left(x,h\right)\cdot N\left(y,y_{j-1}\right) \tag{1}$$

із врахуванням таких граничних умов:

$$\lambda_1\left(t\right)\cdot\left.\frac{\partial t}{\partial y}\right|_{y=0}=\alpha_0\cdot\left(\left.t\right|_{y=0}-t_c\right),\ \lambda_n\left(t\right)\cdot\left.\frac{\partial t}{\partial y}\right|_{y=y_n}=\alpha_n\cdot\left(t_c-\left.t\right|_{y=y_n}\right),\ \left.t\right|_{|x|\to\infty}=0,\ \left.\frac{\partial t}{\partial x}\right|_{|x|\to\infty}=0, \tag{2}$$

де $\lambda\left(t,x,y\right)=\lambda_1\left(t\right)+\sum\limits_{k=1}^{n-1}\left[\lambda_{k+1}\left(t\right)-\lambda_k\left(t\right)\right]\cdot S_-\left(y-y_k\right)+\left[\lambda_0\left(t\right)-\lambda_j\left(t\right)\right]\cdot N\left(x,h\right)\cdot N\left(y,y_{j-1}\right)$ – коефіцієнт теплопровідності кусково-однорідної смуги; $N(x,h)=S_-(x+h)-S_+(x-h); N(y,y_{j-1})=S_-(y-y_{j-1})-S_-(y-y_j)$.

Введемо функцію [7]

$$\begin{aligned}\vartheta=&\int\limits_0^{t(x,y)}\lambda_1(\zeta)d\zeta+\sum_{k=1}^{n-1}S_-(y-y_k)\cdot\int\limits_{t(x,y_k)}^{t(x,y)}\left[\lambda_{k+1}(\zeta)-\lambda_k\left(\zeta\right)\right]d\zeta+\\&+\left\{\int\limits_{t(\pm h,y)}^{t(x,y)}\left[\lambda_0(\zeta)-\lambda_j\left(\zeta\right)\right]d\zeta\cdot N(y,y_{j-1})-\int\limits_{t(\pm h,y_{j-1})}^{t(x,y_{j-1})}\left[\lambda_0(\zeta)-\lambda_j\left(\zeta\right)\right]d\zeta\cdot S_-(y-y_{j-1})+\right.\\&\left.+\int\limits_{t(\pm h,y_j)}^{t(x,y_j)}\left[\lambda_0(\zeta)-\lambda_j\left(\zeta\right)\right]d\zeta\cdot S_-(y-y_j)\right\}\cdot S_-(h-|x|),\end{aligned} \tag{3}$$

продиференціювавши яку по x та y, отримаємо

$$\begin{aligned}\frac{\partial\vartheta}{\partial x}=&\lambda\left(t,x,y\right)\cdot\frac{\partial t}{\partial x}-\sum_{k=1}^{n-1}\left.\left\{\left[\lambda_{k+1}\left(t\right)-\lambda_k\left(t\right)\right]\cdot\frac{\partial t}{\partial x}\right\}\right|_{y=y_k}\cdot S_-\left(y-y_k\right)+\\&+\left\{\left.\left[\left(\lambda_0\left(t\right)-\lambda_j\left(t\right)\right)\frac{\partial t}{\partial x}\right]\right|_{y=y_j}\cdot S_-\left(y-y_j\right)-\right.\\&\left.-\left.\left[\left(\lambda_0\left(t\right)-\lambda_j\left(t\right)\right)\cdot\frac{\partial t}{\partial x}\right]\right|_{y=y_{j-1}}\cdot S_-\left(y-y_{j-1}\right)\right\}\cdot S_-\left(h-|x|\right),\end{aligned} \tag{4}$$

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial y}=\lambda\left(t,x,y\right)\frac{\partial t}{\partial y}-\left.\left\{\left(\lambda_0\left(t\right)-\lambda_{\mathrm{j}}\left(t\right)\right)\cdot\frac{\partial t}{\partial y}\right\}\right|_{|x|=h}\cdot S_-\left(h-|x|\right)\cdot N\left(y,y_{j-1}\right).$$

Із врахуванням виразів (4) рівняння (1) запишеться так:

$$\begin{aligned}\Delta\vartheta=&\frac{\partial}{\partial x}\cdot\left\{-\sum_{k=1}^{n-1}\left.\left[\left[\lambda_{k+1}\left(t\right)-\lambda_k\left(t\right)\right]\cdot\frac{\partial t}{\partial x}\right]\right|_{y=y_k}\cdot S_-\left(y-y_k\right)+\right.\\&\left.\left[\left.\left(\left(\lambda_0\left(t\right)-\lambda_j\left(t\right)\right)\cdot\frac{\partial t}{\partial x}\right)\right|_{y=y_j}\cdot S_-\left(y-y_j\right)-\left.\left(\left(\lambda_0\left(t\right)-\lambda_j\left(t\right)\right)\cdot\frac{\partial t}{\partial x}\right)\right|_{y=y_{j-1}}\cdot S_-\left(y-y_{j-1}\right)\right]\cdot S_-\left(h-|x|\right)\right\}-\\&-\frac{\partial}{\partial y}\cdot\left\{\left.\left[\left(\lambda_0\left(t\right)-\lambda_j\left(t\right)\right)\cdot\frac{\partial t}{\partial x}\right]\right|_{|x|=h}\cdot N(y,y_{j-1})\right\}\cdot S_-\left(h-|x|\right)-q_0\cdot S_-\left(h-|x|\right)\cdot N(y,y_{j-1}).\end{aligned} \tag{5}$$

Граничні умови (2) із використанням введеної функції (3) набудуть такого вигляду:

$$\left.\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right|_{y=0}=\alpha_0\cdot\left(t\big|_{y=0}-t_c\right),\left.\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right|_{y=y_n}=\alpha_n\cdot\left(t_c-t\big|_{y=y_n}\right),\vartheta\big|_{|x|\to\infty}=0,\left.\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right|_{|x|\to\infty}=0. \quad (6)$$

Отже нелінійна гранична задача (1), (2) із використанням введеної функції (3) зведена до частково лінеаризованої граничної задачі (5), (6).

Повністю лінеаризована гранична задача

Апроксимуємо функції $t(\pm h, y)$, $t(x, y_{j-1}), t(x, y_j)$, $t(x,0)$, $t(x, y_k)$ виразами

$$\begin{aligned}
t(x,0)&=t_1^{(0)}+\sum_{l=1}^{m-1}\left(t_{l+1}^{(0)}-t_l^{(0)}\right)\cdot S_-\left(x-x_l\right),\\
t(x,y_k)&=t_1^{(k)}+\sum_{l=1}^{m-1}\left(t_{l+1}^{(k)}-t_l^{(k)}\right)\cdot S_-\left(x-x_l\right),\\
t(\pm h,y)&=t_1^{(\pm h)}+\sum_{\alpha=1}^{p-1}\left(t_{\alpha+1}^{(\pm h)}-t_\alpha^{(\pm h)}\right)\cdot S_-\left(y-y_\alpha\right),\\
t(x,y_{j-1})&=t_1^{(-)}+\sum_{\alpha=1}^{p-1}\left(t_{\alpha+1}^{(-)}-t_\alpha^{(-)}\right)\cdot S_-\left(x-x_\alpha\right),\\
t(x,y_j)&=t_1^{(+)}+\sum_{\alpha=1}^{p-1}\left(t_{\alpha+1}^{(+)}-t_\alpha^{(+)}\right)\cdot S_-\left(x-x_\alpha\right),
\end{aligned} \quad (7)$$

де $x_l\in\left]0;x_*\right[;x_1<x_2<\ldots<x_{m-1};m$ − кількість розбиттів інтервалу $\left]0;x_*\right[;x_*$ − значення абсциси, для якої температура практично дорівнює $y_\alpha\in\left]y_{j-1};y_j\right[;\ y_1<y_2<\ldots<y_{p-1};$ $x_\alpha\in\left]-h;0\right[,\left]0,h\right[;\ x_1<x_2<\ldots<x_{p-1};\ p$ − кількість розбиттів інтервалів $]y_{j-1};y_j[,]-h;0[,]0;h[;$ $t_l^{(0)},t_l^{(k)},t_\alpha^{(\pm h)},t_\alpha^{(-)},t_\alpha^{(+)}$ − невідомі апроксимаційні значення температури.

Підставивши вирази (7) у рівняння (5) та граничні умови (6) на краях K_0, K_n смуги одержимо лінійну граничну задачу для знаходження функції υ

$$\begin{aligned}
\Delta\vartheta=&-\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{m-1}\left(t_{l+1}^{(k)}-t_l^{(k)}\right)\cdot\left[\lambda_{k+1}\left(t_{l+1}^{(k)}\right)-\lambda_k\left(t_{l+1}^{(k)}\right)\right]\delta'_-\left(x-x_l\right)\cdot S_-\left(y-y_k\right)+\\
&+\sum_{\alpha=1}^{p-1}\left(t_{\alpha+1}^{(+)}-t_\alpha^{(+)}\right)\left[\lambda_0\left(t_{\alpha+1}^{(+)}\right)-\lambda_j\left(t_{\alpha+1}^{(+)}\right)\right]\delta'_-\left(x-x_\alpha\right)\cdot S_-\left(y-y_j\right)-\\
&-\sum_{\alpha=1}^{p-1}\left(t_{\alpha+1}^{(-)}-t_\alpha^{(-)}\right)\cdot\left[\lambda_0\left(t_{\alpha+1}^{(-)}\right)-\lambda_j\left(t_{\alpha+1}^{(-)}\right)\right]\delta'_-\left(x-x_\alpha\right)\cdot S_-\left(y-y_{j-1}\right)-\\
&-\sum_{\alpha=1}^{p-1}\left(t_{\alpha+1}^{(\pm h)}-t_\alpha^{(\pm h)}\right)\cdot\left[\lambda_0\left(t_{\alpha+1}^{(\pm h)}\right)-\lambda_j\left(t_{\alpha+1}^{(\pm h)}\right)\right]\delta'_-\left(y-y_\alpha\right)\cdot S_-\left(h-|x|\right)-\\
&-q_0\cdot S_-\left(h-|x|\right)\cdot N\left(y,y_{j-1}\right),
\end{aligned} \quad (8)$$

$$\left.\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right|_{y=0} = \alpha_0\cdot\left[t_1^{(0)} + \sum_{l=1}^{m-1}\left(t_{l+1}^{(0)} - t_l^{(0)}\right)\cdot S_-\left(x - x_l\right) - t_c\right],$$

$$\left.\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right|_{y=y_n} = -\alpha_n\cdot\left[t_1^{(n)} + \sum_{l=1}^{m-1}\left(t_{l+1}^{(n)} - t_l^{(n)}\right)\cdot S_-\left(x - x_l\right) - t_c\right], \tag{9}$$

$$\left.\vartheta\right|_{|x|\to\infty} = 0;\ \left.\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right|_{|x|\to\infty} = 0.$$

Побудова аналітичного розв'язку лінійної граничної задачі (8), (9)

Застосувавши інтегральне перетворення Фур'є за координатою x до граничної задачі (8), (9), приходимо до звичайного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$\begin{aligned}\frac{d^2\overline{\vartheta}}{dy^2} - \xi^2\vartheta = {}& i\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\left\{\xi\left[-\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{m-1}e^{i\xi x_l}\left(t_{l+1}^{(k)} - t_l^{(k)}\right)\left[\lambda_{k+1}\left(t_{l+1}^{(k)}\right) - \lambda_k\left(t_{l+1}^{(k)}\right)\right]S_-\left(y - y_k\right) - \right.\right.\\
&-\sum_{\alpha=1}^{p-1}e^{i\xi x_\alpha}\left(t_{\alpha+1}^{(+)} - t_\alpha^{(+)}\right)\cdot\left[\lambda_0\left(t_{\alpha+1}^{(+)}\right) - \lambda_j\left(t_{\alpha+1}^{(+)}\right)\right]\cdot S_-\left(y - y_j\right) +\\
&+\sum_{\alpha=1}^{p-1}e^{i\xi x_\alpha}\left(t_{\alpha+1}^{(-)} - t_\alpha^{(-)}\right)\cdot\left[\lambda_0\left(t_{\alpha+1}^{(-)}\right) - \lambda_j\left(t_{\alpha+1}^{(-)}\right)\right]\cdot S_-\left(y - y_{j-1}\right) +\\
&\left.\left.+\frac{2\operatorname{sh} i\xi h}{\xi}\left[\sum_{\alpha=1}^{p-1}\left(t_{\alpha+1}^{(\pm h)} - t_\alpha^{(\pm h)}\right)\cdot\left[\lambda_0\left(t_{\alpha+1}^{(\pm h)}\right) - \lambda_j\left(t_{\alpha+1}^{(\pm h)}\right)\right]\cdot\delta'_-\left(y - y_\alpha\right) + q_0\cdot N(y, y_{j-1})\right]\right]\right\}\end{aligned} \tag{10}$$

і таких граничних умов:

$$\begin{aligned}\left.\frac{d\overline{\vartheta}}{dy}\right|_{y=0} &= \frac{i\alpha_0}{\xi\sqrt{2\pi}}\cdot\sum_{l=1}^{m-1}\left(t_{l+1}^{(0)} - t_l^{(0)}\right)\cdot e^{i\xi x_l},\\
\left.\frac{d\overline{\vartheta}}{dy}\right|_{y=y_n} &= -\frac{i\alpha_{\text{n}}}{\xi\sqrt{2\pi}}\cdot\sum_{l=1}^{m-1}\left(t_{l+1}^{(n)} - t_l^{(n)}\right)\cdot e^{i\xi x_l},\end{aligned} \tag{11}$$

де $\overline{\vartheta} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\xi x}\vartheta dx$ – трансформанта функції ϑ .

Загальний розв'язок рівняння (10) має вигляд

$$\begin{aligned}\bar{\vartheta} = {}& C_1e^{\xi y} + C_2e^{-\xi y} - \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\cdot\frac{i}{\xi}\left\{\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{m-1}e^{i\xi x_l}\cdot\left(t_{l+1}^{(k)} - t_l^{(k)}\right)\cdot\left[\lambda_{k+1}\left(t_{l+1}^{(k)}\right) - \lambda_k\left(t_{l+1}^{(k)}\right)\right](1 - \operatorname{ch}\xi(y - y_k))\cdot S_-\left(y - y_k\right) - \right.\\
&-\sum_{\alpha=1}^{p-1}e^{i\xi x_\alpha}\left(t_{\alpha+1}^{(+)} - t_\alpha^{(+)}\right)\cdot\left[\lambda_0\left(t_{\alpha+1}^{(+)}\right) - \lambda_j\left(t_{\alpha+1}^{(+)}\right)\right]\cdot(1 - \operatorname{ch}\xi(y - y_j))\cdot S_-\left(y - y_j\right) +\\
&+\sum_{\alpha=1}^{p-1}e^{i\xi x_\alpha}\left(t_{\alpha+1}^{(-)} - t_\alpha^{(-)}\right)\cdot\left[\lambda_0\left(t_{\alpha+1}^{(-)}\right) - \lambda_j\left(t_{\alpha+1}^{(-)}\right)\right]\cdot(1 - \operatorname{ch}\xi(y - y_{j-1}))\cdot S_-\left(y - y_{j-1}\right) -\\
&-2\operatorname{sh} i\xi h\left[\sum_{\alpha=1}^{p-1}\left(t_{\alpha+1}^{(\pm h)} - t_\alpha^{(\pm h)}\right)\cdot\left[\lambda_0\left(t_{\alpha+1}^{(\pm h)}\right) - \lambda_j\left(t_{\alpha+1}^{(\pm h)}\right)\right]\cdot\operatorname{ch}\xi\left(y - y_\alpha\right)\cdot S_-\left(y - y_\alpha\right) - \right.\\
&\left.\left.-\frac{q_0}{\xi^2}\cdot\left(N\left(y, y_{j-1}\right) - \operatorname{ch}\xi\left(y - y_{j-1}\right)\cdot S_-\left(y - y_{j-1}\right) + \operatorname{ch}\xi\left(y - y_j\right)\cdot S_-\left(y - y_j\right)\right)\right]\right\}.\end{aligned}$$

Тут C_1, C_2 – сталі інтегрування.

Використавши граничні умови (11), отримаємо такий частковий розв'язок задачі (10), (11):

$$\begin{aligned}\bar{\vartheta} = &-\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\cdot\frac{i}{\xi}\left\{\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{m-1} e^{i\xi x_l}\cdot\left(t_{l+1}^{(k)}-t_l^{(k)}\right)\cdot\left[\lambda_{k+1}\left(t_{l+1}^{(k)}\right)-\lambda_k\left(t_{l+1}^{(k)}\right)\right]\cdot\left[\left(1-\operatorname{ch}\xi\left(y-y_k\right)\right)\cdot S_-\left(y-y_k\right)+\operatorname{ch}\xi y\cdot\frac{\operatorname{sh}\xi\left(y_n-y_k\right)}{\operatorname{sh}\xi y_n}\right]-\right.\\ &-\sum_{\alpha=1}^{p-1} e^{i\xi x_\alpha}\left(t_{\alpha+1}^{(+)}-t_\alpha^{(+)}\right)\cdot\left[\lambda_0\left(t_{\alpha+1}^{(+)}\right)-\lambda_j\left(t_{\alpha+1}^{(+)}\right)\right]\cdot\left[\left(1-\operatorname{ch}\xi\left(y-y_j\right)\right)S_-\left(y-y_j\right)+\operatorname{ch}\xi y\cdot\frac{\operatorname{sh}\xi\left(y_n-y_j\right)}{\operatorname{sh}\xi y_n}\right]+\\ &+\sum_{\alpha=1}^{p-1} e^{i\xi x_\alpha}\left(t_{\alpha+1}^{(-)}-t_\alpha^{(-)}\right)\cdot\left[\lambda_0\left(t_{\alpha+1}^{(-)}\right)-\lambda_j\left(t_{\alpha+1}^{(-)}\right)\right]\cdot\left[\left(1-\operatorname{ch}\xi\left(y-y_{j-1}\right)\right)S_-\left(y-y_{j-1}\right)+\operatorname{ch}\xi y\cdot\frac{\operatorname{sh}\xi\left(y_n-y_{j-1}\right)}{\operatorname{sh}\xi y_n}\right]-\\ &-2\operatorname{sh}i\xi h\left[\sum_{\alpha=1}^{p-1}\left(t_{\alpha+1}^{(\pm h)}-t_\alpha^{(\pm h)}\right)\cdot\left[\lambda_0\left(t_{\alpha+1}^{(\pm h)}\right)-\lambda_j\left(t_{\alpha+1}^{(\pm h)}\right)\right]\cdot\left(\operatorname{ch}\xi\left(y-y_\alpha\right)S_-\left(y-y_\alpha\right)-\operatorname{ch}\xi y\cdot\frac{\operatorname{sh}\xi\left(y_n-y_\alpha\right)}{\operatorname{sh}\xi y_n}\right)-\right.\\ &-\frac{q_0}{\xi^2}\cdot\left(N\left(y,y_{j-1}\right)-\operatorname{ch}\xi\left(y-y_{j-1}\right)\cdot S_-\left(y-y_{j-1}\right)+\operatorname{ch}\xi\left(y-y_j\right)S_-\left(y-y_j\right)+\operatorname{ch}\xi y\cdot\frac{\operatorname{sh}\xi\left(y_n-y_{j-1}\right)-\operatorname{sh}\xi\left(y_n-y_j\right)}{\operatorname{sh}\xi y_n}\right)\left.\right]+\\ &\left.+\frac{1}{\xi\operatorname{sh}\xi y_n}\left[\alpha_n\cdot\sum_{l=1}^{m-1}e^{i\xi x_l}\cdot\left(t_{l+1}^{(n)}-t_l^{(n)}\right)\cdot\operatorname{ch}\xi y+\alpha_0\cdot\sum_{l=1}^{m-1}e^{i\xi x_l}\cdot\left(t_{l+1}^{(0)}-t_l^{(0)}\right)\cdot\operatorname{ch}\xi\left(y-y_n\right)\right]\right\}.\end{aligned}\tag{12}$$

Застосувавши обернене перетворення Фур'є до співвідношення (12), знаходимо вираз для функції ϑ

$$\begin{aligned}\vartheta = &-\frac{1}{\pi}\cdot\left\{\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{m-1}(t_{l+1}^{(k)}-t_l^{(k)})\cdot\left[\lambda_{k+1}(t_{l+1}^{(k)})-\lambda_k(t_{l+1}^{(k)})\right]\cdot\int_0^\infty\frac{\sin\xi(x-x_l)}{\xi}\cdot\left[(1-\operatorname{ch}\xi(y-y_k))\cdot S_-(y-y_k)+\frac{\operatorname{sh}\xi(y_n-y_k)}{\operatorname{sh}\xi y_n}\operatorname{ch}\xi y\right]d\xi-\right.\\ &-\sum_{\alpha=1}^{p-1}(t_{\alpha+1}^{(+)}-t_\alpha^{(+)})\left[\lambda_0(t_{\alpha+1}^{(+)})-\lambda_j(t_{\alpha+1}^{(+)})\right]\cdot\int_0^\infty\frac{\sin\xi(x-x_\alpha)}{\xi}\cdot\left[1-\operatorname{ch}\xi(y-y_j))\cdot S_-(y-y_j)+\frac{\operatorname{sh}\xi(y_n-y_j)}{\operatorname{sh}\xi y_n}\operatorname{ch}\xi y\right]d\xi+\\ &+\sum_{\alpha=1}^{p-1}(t_{\alpha+1}^{(-)}-t_\alpha^{(-)})\cdot\left[\lambda_0(t_{\alpha+1}^{(-)})-\lambda_j(t_{\alpha+1}^{(-)})\right]\cdot\int_0^\infty\frac{\sin\xi(x-x_\alpha)}{\xi}\cdot\left[(1-\operatorname{ch}\xi(y-y_{j-1}))\cdot S_-(y-y_{j-1})+\frac{\operatorname{sh}\xi(y_n-y_{j-1})}{\operatorname{sh}\xi y_n}\operatorname{ch}\xi y\right]d\xi-\\ &-\sum_{\alpha=1}^{p-1}(t_{\alpha+1}^{(\pm h)}-t_\alpha^{(\pm h)})\cdot\left[\lambda_0(t_{\alpha+1}^{(\pm h)})-\lambda_j(t_{\alpha+1}^{(\pm h)})\right]\cdot\int_0^\infty\frac{\sin\xi(x-h)-\sin\xi(x+h)}{\xi}\left(\operatorname{ch}\xi(y-y_\alpha)S_-\left(y-y_\alpha\right)+\operatorname{ch}\xi y\frac{\operatorname{sh}\xi(y_n-y_\alpha)}{\operatorname{sh}\xi y_n}\right)d\xi+\\ &+q_0\int_0^\infty\frac{\sin\xi(x-h)-\sin\xi(x+h)}{\xi^3}\cdot\left(N(y,y_{j-1})-\operatorname{ch}\xi(y-y_{j-1})\cdot S_-\left(y-y_{j-1}\right)+\operatorname{ch}\xi(y-y_j)\cdot S_-\left(y-y_j\right)+\right.\\ &\left.+\operatorname{ch}\xi y\frac{\operatorname{sh}\xi\left(y_n-y_{j-1}\right)-\operatorname{sh}\xi\left(y_n-y_j\right)}{\operatorname{sh}\xi y_n}\right)d\xi+\alpha_n\cdot\sum_{l=1}^{m-1}(t_{l+1}^{(n)}-t_l^{(n)})\cdot\int_0^\infty\frac{\sin\xi(x-x_l)}{\xi^2\cdot\operatorname{sh}\xi y_n}\cdot\operatorname{ch}\xi y d\xi+\\ &\left.+\alpha_0\cdot\sum_{l=1}^{m-1}(t_{l+1}^{(0)}-t_l^{(0)})\cdot\int_0^\infty\frac{\sin\xi(x-x_l)}{\xi^2\cdot\operatorname{sh}\xi y_n}\cdot\operatorname{ch}\xi(y-y_n)d\xi\right\}.\end{aligned}\tag{13}$$

Підставивши конкретні залежності коефіцієнтів теплопровідності матеріалів кожного з елементів смуги та включення у співвідношення (3), (13) та зрівнявши отримані вирази функції ϑ на прямих $y=0$, $y=y_k\,(k=\overline{1,n-1})$, K_0, K_n та відрізках $L_\pm, L_j=\left\{\left(x,y_j\right):|x|\le h\right\}, L_{j-1}=\left\{\left(x,y_{j-1}\right):|x|\le h\right\}$, приходимо до системи нелінійних алгебраїчних рівнянь для визначення невідомих значень температури $t_l^{(k)}(k=\overline{0,n}; l=\overline{1,m-1})$, $t_\alpha^{(\pm h)}, t_\alpha^{(-)}, t_\alpha^{(+)}, \left(\alpha=\overline{1,p}\right)$.

Шукане температурне поле для нелінійної граничної задачі теплопровідності (1), (2) визначається з нелінійного алгебраїчного рівняння, отриманого з використанням співвідношень (3), (13) після підстановки в них конкретних виразів залежностей коефіцієнтів теплопровідності матеріалів елементів смуги та включення.

Частковий приклад та аналіз числових результатів

Для прикладу, розглянемо смугу, яка складається з трьох елементів із чужорідним включенням, в області якого діють рівномірно розподілені внутрішні джерела тепла, розміщеним у другому елементі. В цьому випадку $n = 3$, $j = 2$. У багатьох практичних випадках [8, 9] існує така залежність коефіцієнтів теплопровідності від температури:

$$\lambda = \lambda^0 t^3 (\lambda^0 - \mathrm{const}).$$

Тоді із використанням (3), (13), отримаємо формули для визначення температури t в областях

$$\Omega_1 = \{(x, y): \quad |x| < \infty, \qquad 0 \le y < y_1\}$$

$$t = \sqrt[4]{\frac{4\vartheta}{\lambda_1^0}},$$

$$\Omega_2 = \{(x, y): \quad |x| > h, \qquad y_1 \le y < y_2\}$$

$$t = \sqrt[4]{\frac{4\vartheta}{\lambda_2^0} + \left(1 - \frac{\lambda_1^0}{\lambda_2^0}\right) t^4\Big|_{y=y_1}},$$

$$\Omega_3 = \{(x, y): \quad |x| > h, \qquad y_2 \le y \le y_3\}$$

$$t = \sqrt[4]{\frac{4\vartheta}{\lambda_3^0} + \frac{\lambda_2^0 - \lambda_1^0}{\lambda_3^0} t^4\Big|_{y=y_1} + \left(1 - \frac{\lambda_2^0}{\lambda_3^0}\right) t^4\Big|_{y=y_2}},$$

$$\Omega_0 = \{(x, y): \quad |x| \le h, \qquad y_1 \le y < y_2\}$$

$$t = \sqrt[4]{\frac{4\vartheta}{\lambda_0^0} + \left(1 - \frac{\lambda_2^0}{\lambda_0^0}\right)\left(t^4 - t^4\Big|_{y=y_1}\right)\Big|_{|x|=h} - \left(1 - \frac{\lambda_1^0}{\lambda_2^0}\right) t^4\Big|_{y=y_1}},$$

$$\Omega_3^* = \{(x, y): \quad |x| \le h, \qquad y_2 \le y \le y_3\}$$

$$t = \sqrt[4]{\frac{1}{\lambda_3^0 + \lambda_0^0 - \lambda_2^0} \cdot \left[4\vartheta + \left(\lambda_0^0 - \lambda_2^0\right) t^4\Big|_{y=y_1} + \left(\lambda_3^0 + \lambda_0^0\right) t^4\Big|_{y=y_2} + \left(\lambda_2^0 - \lambda_0^0\right)\left(t^4\Big|_{y=y_1} - t^4 - t^4\Big|_{y=y_2}\right)\Big|_{|x|=h}\right]},$$

де $t^4\Big|_{y=y_1} = \dfrac{4}{\lambda_1^0}\vartheta\Big|_{y=y_1}$; $\qquad t^4\Big|_{y=y_2} = \dfrac{4}{\lambda_2^0}\vartheta\Big|_{y=y_2} + \left(1 - \dfrac{\lambda_1^0}{\lambda_2^0}\right) t^4\Big|_{y=y_1}$;

$$t^4\Big|_{|x|=h} = \left[\frac{4}{\lambda_2^0}\vartheta + \left(1 - \frac{\lambda_1^0}{\lambda_2^0}\right) t^4\Big|_{y=y_1}\right]\Bigg|_{|x|=h}; \; t^4\Big|_{\substack{|x|=h \\ y=y_1}} = \frac{4}{\lambda_1^0}\vartheta\Big|_{\substack{|x|=h \\ y=y_1}}; \; t^4\Big|_{\substack{|x|=h \\ y=y_2}} = \left[\frac{4\vartheta}{\lambda_2^0}\Big|_{y=y_2} + \left(1 - \frac{\lambda_1^0}{\lambda_2^0}\right) t^4\Big|_{y=y_1}\right]\Bigg|_{|x|=h}.$$

За наведеними формулами проведено числові розрахунки температурного поля для окремого вузла мікроелектронної апаратури, який моделюється кусково-однорідною смугою із чужорідним тепловиділяючим прямокутним включенням.

На основі числового аналізу встановлено, що достатньо вибрати кількість розбиттів m інтервалу $]0;x_*[$ такою, що дорівнює одинадцяти, а кількість розбиттів p інтервалів $]y_{j-1};y_j[$, $]-h;0[$, $]0;h[$; такими, що дорівнюють дев'яти. Числові розрахунки проведено для таких матеріалів: 1-ий шар – вольфрам, 2-ий – молібден, 3-ій – кераміка ВК-94-1, включення – срібло. Вони показують, що врахування залежності коефіцієнтів теплопровідності від температури приводить до зменшення температурного поля порівняно з нетермочутливою системою (теплофізичні параметри не залежать від температури) на 4,5 % для вибраних матеріалів трьохелементної структури з тепловиділяючим включенням у другому елементі.

Висновки

За допомогою нової введеної функції, яка описується виразом (3), вихідне нелінійне рівняння теплопровідності (1) частково лінеаризується. Із використанням кусково-лінійної апроксимації температури на границях $L_{\pm}$, $L_j = \{(x,y_j): |x| \le h\}$, $L_{j-1} = \{(x,y_{j-1}): |x| \le h\}$ включення, прямих $y = 0$, $y = y_k$ $(k = \overline{1, n-1})$ спряження та краях K_0, K_n смуги цілком лінеаризується нелінійна гранична задача теплопровідності (5), (6) для термочутливої системи із двохвимірною кусково-однорідною структурою. На основі цього побудовано аналітичний розв'язок (13), який дозволяє для довільної точки обчислювати значення температури на основі побудованих нових алгоритмів та створених програмних засобів і прогнозувати режими роботи конструкцій електронних пристроїв та ідентифікувати невідомі параметри, а також підвищити термостійкість окремих конструкційних елементів та вузлів вказаних пристроїв, що приводить до збільшення їх терміну експлуатації.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Коляно Ю.М., Кричевец Ю.М., Иваник Е.Г., Гаврыш В.И.* Температурное поле в многослойном полупространстве с инородним тепловыделяющим цилиндрическим включением // Пром. теплотехника. – 1994. – Т.16, № 4 – 6. – С. 30 – 34.
2. *Коляно Ю.М., Волос В.А., Иваник Е.Г., Гаврыш В.И.* Температурное поле в термочувствительном многослойном полупространстве // ИФЖ. – 1994. – Т. 66, № 2. – С. 226 – 234.
3. *Гавриш В.І.* Задача теплопровідності для кусково-однорідної смуги із включенням прямокутної форми // Вісник Держ. у-ту “Львівська політехніка”: Прикладна математика. – 1999. – № 364. – С. 67 – 74.
4. *Гавриш В., Федасюк Д.* Моделювання теплових режимів в термочутливій кусково-однорідній смузі з внутрішніми джерелами тепла // Вісник Нац. у-ту “Львівська політехніка”: Комп΄ютерні системи проектування.Теорія і практика. – 2009. – № 651. – С. 50 – 54.
5. *Подстригач Я.С., Ломакин В.А., Коляно Ю.М.* Термоупругость тел неоднородной структуры. – М.: Наука, 1984. – 386 с.
6. *Коляно Ю.М.* Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. – К.: Наукова думка, 1992. – 280 с.
7. *Федасюк Д., Гавриш В., Кузьмін А.* Нелінійна задача теплообміну для кусково-однорідної смуги з чужорідним включенням // Нелінійні проблеми аналізу: IV Всеукраїнська наукова конференція. Тези доповідей. – Івано-Франківськ: Плай, 2008. – С. 98.
8. *Ломакин В.А.* Теория упругости неоднородных тел. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. – 376 с.
9. *Берман Р.* Теплопроводность твердых тел. – М. : Мир, 1979 . – 288 с.

Получено 25.03.2010 г.