

УДК 629.7:533.6.001

Басок Б.И., Авраменко А.А., Гоцуленко В.В.

Институт технической теплофизики НАН Украины

ОБ ОДНОЙ СХЕМЕ ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕПЛОВОЙ НАГРУЗКИ ПРИ КОНВЕКТИВНОМ НАГРЕВЕ ПОТОКА В ВЕРТИКАЛЬНОЙ ТРУБЕ

Визначено схему розподілу теплового навантаження при конвективному нагріванні у вертикальній трубі, при якій інтенсивність зміни теплового опору по витраті є найменшою. Це приводить до ослаблення механізму термоакустичної нестійкості обумовленого висхідною нестійкою гілкою напірної характеристики теплопідводу і, таким чином, до зменшення амплітуди термоакустичних автоколивань або їх повної нейтралізації.

Определена схема распределения тепловой нагрузки при конвективном нагреве в вертикальной трубе, при которой интенсивность изменения теплового сопротивления по расходу является наименьшей. Это приводит к ослаблению механизма термоакустической неустойчивости обусловленного восходящей неустойчивой ветвью напорной характеристики теплоподвода, и таким образом к уменьшению амплитуды термоакустических автоколебаний или их полной нейтрализации.

The algorithm of distribution of heat demand is determined at convectional heating in a vertical pipe at which intensity of change of thermal resistance under the charge is the least. It results in easing the mechanism thermoacoustic instability caused by an ascending unstable branch of the pressure head characteristic, and thus to reduction of amplitude thermoacoustic self-oscillations or their full neutralization.

$A(G)$ – давление подъемной силы;
 C_a – акустическая гибкость вертикальной трубы;
 G – массовый расход среды;
 $h_T(G)$ – тепловое сопротивление;
 L_a – акустическая масса вертикальной трубы;
 p_t – давление в области сгорания;
 p_z – давление на выходе из трубы;
 \vec{V} – скорость движения среды;

Z – волновое сопротивление трубы;
 τ – запаздывание сгорания топлива;
 $\vec{\tau}$ – тензор вязких напряжений;
 $\vec{\tau}_m$ – тензор теплоподвода.

Индексы нижние:

t_i – порядковый номер зоны подвода теплоты;
 др – дроссель;
 вх – на входе в трубу;
 т – тепловой.

Введение

Известно, что автоколебания вибрационного горения поддерживаются механизмом запаздывания τ сгорания топлива [1]. Образование восходящей (неустойчивой) ветви характеристики камеры горения [2] или трубы Рийке [3] составляет второй механизм вибрационного горения [4-5], который является также и механизмом термоакустических автоколебаний. Колебания вибрационного горения, поддерживаемые этими механизмами, имеют диаметрально противоположные свойства. При снижении волнового сопротивления Z колебательного

контура автоколебания, поддерживаемые механизмом запаздывания, уменьшаются по амплитуде и исчезают. При этом автоколебания обусловленные наличием восходящей ветви на напорной характеристике теплоподвода стремятся к релаксационной форме, неизменной от дальнейшего уменьшения величины Z [6]. Распределением теплоподвода по длине вертикальной камеры горения можно уменьшить интенсивность теплового сопротивления $h_T(G)$ и соответственно интенсивность напорной характеристики $F(G)$ вертикальной трубы, что позволяет существенно уменьшить амплитуду

автоколебаний или вовсе их нейтрализовать [7].

Постановка задачи

Как выше отмечалось, снижение интенсивности dh_T/dG можно осуществить путем ступенчатого сгорания топлива. Это в свою очередь должно снизить амплитуду автоколебаний, причиной которых является восходящая ветвь на характеристике $F(G)$. Увеличение объема вертикальной трубы или подключение к ней дополнительного объема снижает амплитуду колебаний обусловленных запаздыванием сгорания топлива.

При сгорании топлива под разрежением нейтрализуется действие механизма неустойчивости Л. Крокко [3]. Исходя из этого в [5] обоснована камера горения, в которой исключается действие механизма запаздывания сгорания топлива. В такой камере горения, а также при конвективном подводе теплоты в устройстве (рис. 1) основным механизмом, порождающим автоколебания, является отрицательное

тепловое сопротивление. Рассмотрим две вертикальные трубы, в которых осуществляется конвективный нагрев воздуха с конечной температурой $T = 1500$ °С на выходе из трубы и начальной температурой $T_0 = 300$ °С. В одной трубе (рис. 1, а) происходит разовая подача теплоты в нижней ее части. Во второй трубе (рис. 1, б) с сохранением величины тепловой нагрузки осуществляется ступенчатый теплоподвод – вначале достигается температура T_1 , а затем вновь устанавливается вторая ступень теплоподвода, температура становится равной T_2 , и т. д. до температуры $T_n = T$ после n -ой ступени конвективного подвода теплоты. Выбирая различные значения для температур $T_1 \leq T_2 \leq \dots \leq T_{n-1}$, в вертикальной трубе (рис. 1, б) образуется различное тепловое сопротивление $h_T(G) = h_T(G, T_i)$. Далее рассматривается задача о таком выборе значений для температур T_i ($i = \overline{1; n-1}$), при которых механизм термоакустических автоколебаний, обусловленный

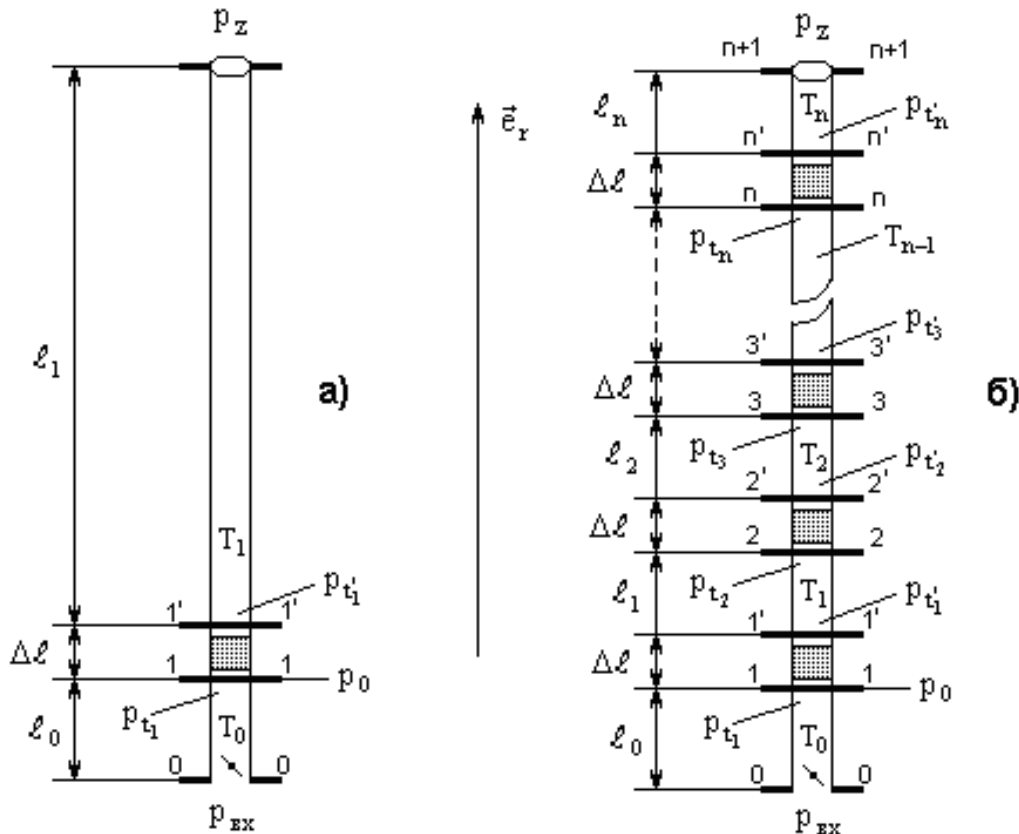


Рис. 1. Вертикальная труба с конвективным теплоподводом: а) одноступенчатым б) многоступенчатым.

тепловым сопротивлением имеет наименьшее влияние, т.е. когда его интенсивность $|\partial h_T / \partial G|$ минимальная.

1. Вывод уравнений движения в вертикальной трубе с ступенчатым распределением тепловой нагрузки

Запишем в балансной интегральной форме законы сохранения массы, импульса массы и энергии применительно к произвольно выделенному объему $\Omega_m(t)$ составленному из частиц движущейся среды фиксированной массы $m = \text{const}$:

$$\frac{dm}{dt} \equiv \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega_m(t)} \rho(x,t) d\omega = 0 \Leftrightarrow$$

$$\iiint_{\Omega_m(t)} \partial \rho / \partial t d\omega + \iint_{\partial \Omega_m(t)} \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) d\sigma = 0, \tag{1}$$

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega_m(t)} \frac{\partial(\rho \vec{V})}{\partial t} d\omega + \iiint_{\Omega_m(t)} (\nabla \cdot \vec{V})(\rho \vec{V}) d\omega = \\ & = \iiint_{\Omega_m(t)} \rho \vec{g} d\omega - \iint_{\partial \Omega_m(t)} p(x,t) \cdot \vec{n} d\sigma + \end{aligned} \tag{2}$$

$$\iint_{\partial \Omega_m(t)} \vec{\tau} \cdot \vec{n} d\sigma + \iiint_{\Omega_m(t)} \delta_{\Sigma}(x) (\vec{\tau}_T \cdot \vec{n}) d\omega,$$

$$\begin{aligned} \frac{dE(t)}{dt} &= \iiint_{\Omega_m(t)} \frac{\partial}{\partial t} \rho \left(u + \frac{1}{2} |\vec{V}|^2 \right) d\omega + \iint_{\partial \Omega_m(t)} \rho \left(u + \frac{1}{2} |\vec{V}|^2 \right) (\vec{V} \cdot \vec{n}) d\sigma = \\ &= \iiint_{\Omega_m(t)} \rho (\vec{g} \cdot \vec{V}) d\omega - \iint_{\partial \Omega_m(t)} p (\vec{n} \cdot \vec{V}) d\sigma + \iint_{\partial \Omega_m(t)} \vec{\tau}_n \cdot \vec{V} d\sigma + \iiint_{\Omega_m(t)} \vec{V} \cdot \delta_{\Sigma}(x) (\vec{\tau}_T \cdot \vec{n}) d\omega, \end{aligned} \tag{3}$$

где $E(t) = \iiint_{\Omega_m(t)} \rho \left(u + \frac{1}{2} |\vec{V}|^2 \right) d\omega$ – полная энергия частиц среды в объеме $\Omega_m(t)$.

Для получения динамической системы применим оператор дискретизации по пространственным переменным к тождествам (1)-(3), который на произвольную в общем случае тензорную величину $\theta(x,t)$ действует по правилу:

$$\langle \theta(x,t) \rangle = \begin{cases} \frac{1}{mes(\Omega_i)} \iiint_{\Omega_i} \theta(x,t) d\omega, & \text{при } x \in \Omega_i, \\ \frac{1}{mes(\Omega_0)} \iiint_{\Omega_0} \theta(x,t) d\omega, & \text{при } x \in \Omega_0. \end{cases} \tag{4}$$

Обозначим через Ω_i часть вертикальной трубы заключенную между сечениями $i - i$ и $(i+1) - (i+1)$. Учитывая тождество

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega_m(t)} \rho \vec{V} d\omega = \iiint_{\Omega_m(t)} \frac{\partial(\rho \vec{V})}{\partial t} d\omega + \iiint_{\Omega_m(t)} (\nabla \cdot \vec{V})(\rho \vec{V}) d\omega,$$

применим оператор дискретизации (4) к каждому слагаемому уравнения движения (2).

Имеем при $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\begin{aligned} & \left\langle \iiint_{\Omega_m(t)} \frac{\partial(\rho \vec{V})}{\partial t} d\omega \right\rangle_{\Omega_i} + \left\langle \iiint_{\Omega_m(t)} (\nabla \cdot \vec{V})(\rho \vec{V}) d\omega \right\rangle_{\Omega_i} = \\ & = \left\langle \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega_m(t)} \rho \vec{V} d\omega \right\rangle_{\Omega_i} = m_i \frac{dv_i}{dt} \vec{e}_r, \end{aligned}$$

где $m_i = \rho_i mes(\Omega_i)$ – масса нагретой среды заключенной между сечениями $i - i$ и $(i+1) - (i+1)$ (рис. 1, б), $v_i = \frac{1}{mes(\Omega_i)} \iiint_{\Omega_i} |\vec{V}| d\omega$ –

усредненная скорость среды в объеме Ω_i . Далее

$$\left\langle \iiint_{\Omega_m(t)} \rho \vec{g} d\omega \right\rangle_{\Omega_i} = \iiint_{\Omega_i} \rho \vec{g} d\omega = -m_i g \vec{e}_r = -\rho_i \ell_i S g \vec{e}_r,$$

$$\begin{aligned} \left\langle \iint_{\partial\Omega_m(t)} p(x,t) \cdot \vec{n} d\sigma \right\rangle_{\Omega_i} &= \left\langle \iiint_{\Omega_m(t)} \operatorname{div}\{p(x,t)\} d\omega \right\rangle_{\Omega_i} = \\ &= \vec{e}_r \iint_{\Omega_i} \partial p / \partial r d\omega = S(p_{t_{i+1}} - p_{t_i}) \vec{e}_r, \\ \left\langle \iint_{\partial\Omega_m(t)} \vec{\tau} \cdot \vec{n} d\sigma \right\rangle_{\Omega_i} &= \left\langle \iiint_{\Omega_m(t)} \operatorname{div}[\vec{\tau}] d\omega \right\rangle_{\Omega_i} = -S \cdot h_{\text{тр}} \vec{e}_r, \\ \left\langle \iiint_{\Omega_m(t)} \delta_{\Sigma}(x) (\vec{\tau}_m \cdot \vec{n}) d\omega \right\rangle_{\Omega_i} &= -S \cdot h_m \vec{e}_r. \end{aligned}$$

Следовательно, пренебрегая вязкостными потерями, окончательно приходим к следующей системе уравнений движения ($i = \overline{1;n}$)

$$L_{a_i} \frac{dG}{dt} = p'_i - \rho_i g \ell_i - h_{m_i} - p_{t_{i+1}}, \quad (5)$$

где $p'_i - p_i = h_{\tau_i}$ – тепловое сопротивление в i -ой зоне теплоподвода (рис. 1, б), $G = \rho_i v_i S$ – массовый расход, $L_{a_i} = \ell_i / S$ – акустическая масса участка вертикальной трубы заключенного между сечениями $i'-i'$ и $(i+1)-(i+1)$, $p_{t_{n+1}} = p_z$ – давление на выходе из вертикальной трубы. Будем полагать, что длина зон теплоподвода существенно меньше расстояний между источниками теплоподвода, т.е. $\Delta \ell \ll \min_{1 \leq i \leq n} \ell_i$.

Тогда $p_0 = p_z + \sum_{i=1}^n \rho_0 g \ell_i$, $\ell = \sum_{i=1}^n \ell_i$ и суммируя (5), получаем

$$L_a^{\Sigma} \frac{dG}{dt} = A^{\Sigma}(G) - h_m^{\Sigma}(G) - P, \quad (6)$$

где $L_a^{\Sigma} = \sum_{i=1}^n L_{a_i}$ – акустическая масса вертикальной трубы,

$A^{\Sigma}(G) = \sum_{i=1}^n g \ell_i (\rho_0 - \rho_i)$ – напряжение (давление) подъемной силы и $h_m^{\Sigma}(G) = \sum_{i=1}^n h_{m_i}(G)$ – тепловое сопротивление в вертикальной трубе с n – ступенчатым распределением тепловой нагрузки,

$P = p_0 - p_{t_1}$.

Применяя оператор дискретизации к уравнению (1) закона сохранения массы для участка

вертикальной трубы, получим

$$\begin{aligned} \left\langle \iiint_{\Omega_m(t)} \partial p / \partial t d\omega \right\rangle_{\Omega_1} + \left\langle \iint_{\partial\Omega_m(t)} \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) d\sigma \right\rangle_{\Omega_1} &= \\ = S \ell_1 \frac{d\rho_{t_1}}{dt} + S (\rho_0 v_{t_0} - \rho_{t_1} v_{t_1}), \text{ откуда} \\ C_{a_1} \frac{dP}{dt} &= G - G_{\text{вх}}, \end{aligned} \quad (7)$$

где использовалось соотношение $dp_{t_1} / d\rho_{t_1} = c_1^2$, $c_1 = \sqrt{kRT_1}$ – скорость звука после первой ступени подвода теплоты, $C_{a_1} = S \ell_1 / c_1^2$ – акустическая гибкость объема Ω_1 вертикальной трубы, $G_{\text{вх}}$ – входящий в трубу массовый расход воздуха, который определяется из уравнения дросселя $P = k_{\text{др}} G_{\text{вх}}^2$.

Если теплота выделяется от сгорания газообразного или жидкостного топлива, то с учетом механизма Л. Крокко запаздывания τ сгорания топлива, уравнение (7) становится с запаздывающим аргументом и принимает следующий вид

$$C_{a_1} \frac{dP}{dt} = G - G_{\text{вх}}(t - \tau).$$

Таким образом, действием оператора дискретизации по пространственным переменным на уравнения выражающие законы сохранения массы и импульса, записанных в балансной интегральной форме, получена нелинейная динамическая система (6)-(7). В отличие от процедуры линеаризации, приводящей к линейным уравнениям в вариациях, в усредненных уравнениях (6)-(7) сохранены все нелинейности и, таким образом их можно использовать для определения причин (механизмов) самовозбуждения автоколебаний.

2. Определение теплового сопротивления вертикальной трубы при ступенчатом теплоподводе

В работах [4,7] для изобарного процесса теплоподвода было получено следующее выражение для теплового сопротивления

$$h_{\tau_i}(G) = \frac{G^2}{2\rho_{i-1} S^2} \left[1 - \left(\frac{T_i}{T_{i-1}} \right)^2 \right] \quad (i = \overline{1;n}).$$

Воспользовавшись также соотношением между параметрами состояния для изобарного процесса $\rho_i/\rho_{i-1} = T_{i-1}/T_i$ ($i = \overline{1;n}$), для теплового сопротивления получаем следующее выражение

$$h_r^\Sigma(G) = \frac{G^2}{2S^2\rho_0 T_0} \sum_{i=1}^n T_{i-1} \left[1 - \left(\frac{T_i}{T_{i-1}} \right)^2 \right]. \quad (8)$$

Следовательно, задача минимизации абсолютной величины $|h_r^\Sigma(G)|$ теплового сопротивления при $G = \text{const}$ (рис. 1, б) сводится к минимизации функции

$$\min_{\{T_i\}_{i=0}^n \in \Delta} \varphi(T_0, \dots, T_n),$$

$$\varphi(T_0, \dots, T_n) = \sum_{i=1}^n T_{i-1} \left[\left(\frac{T_i}{T_{i-1}} \right)^2 - 1 \right] \quad (9)$$

на следующем симплексе:

$$(T_0, \dots, T_n) \in \Delta,$$

$$\Delta = \{T_0, T_n = \text{const}, T_{i-1} \leq T_i (i = \overline{1;n})\}. \quad (10)$$

Для получения критических точек задачи условной минимизации (9)-(10) применяем принцип Ферма:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial T_i} = 2 \frac{T_i}{T_{i-1}} - \left(\frac{T_{i+1}}{T_i} \right)^2 - 1 = 0 \quad (i = \overline{1;n-1}). \quad (11)$$

Введением новых переменных $x_i = T_i/T_{i-1}$ ($i = \overline{1;n}$) система уравнений (11) приводится к виду

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2^2 - 1 = 0, \\ 2x_2 - x_3^2 - 1 = 0, \\ \dots\dots\dots \\ 2x_{n-1} - x_n^2 - 1 = 0, \\ x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n = a. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \sqrt{2x_1 - 1}, \\ x_3 = \sqrt{2x_2 - 1}, \\ \dots\dots\dots \\ x_n = \sqrt{2x_{n-1} - 1}, \\ x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n = a, \end{cases} \quad (12)$$

где $a = T_n/T_0 = \text{const} \geq 1$.

Следовательно, имеем следующий итерационный алгоритм решения системы (12). Фиксируем $x_1 = 1 + \delta(a)$ и последовательно вычисляем $x_k = \sqrt{2x_{k-1} - 1}$ ($k = \overline{2;n}$). Далее находим произведение

$f(a, \delta) = \prod_{k=1}^n x_k$ и проверяем, если $f(a, \delta) = a$, то найденные значения неизвестных x_k являются корнями системы уравнений (12). Если же окажется, что $f(a, \delta) > a$, то полагаем $\delta_{\text{новое}} = 2\delta_{\text{старое}}$, а иначе, т.е. когда $f(a, \delta) < a$ полагаем $\delta_{\text{новое}} = 1/2\delta_{\text{старое}}$ и возобновляем процесс вычислений неизвестных x_k . В конце концов, при заданной погрешности $\varepsilon > 0$ и конечном числе шагов найдем такое значение δ^* , что $|f(a, \delta^*) - a| < \varepsilon$. Действительно, т.к. при $x \geq 1$ справедливо неравенство $\sqrt{2x-1} \geq \sqrt{x}$, то легко

проверяется соотношение $x_k \geq x_1^{\frac{1}{2^{k-1}}} \quad \forall k \geq 1$. Итак, справедлива оценка

$$f(a, \delta) = \prod_{k=1}^n x_k \geq x_1^\beta,$$

где $\beta = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2^n} \right)$.

Откуда получаем, $f(a, 0) = 1 \leq a$, $f(a, \delta_a) \geq (1 + \delta_a)^\beta = a$ при $\delta_a = a^{1/\beta} - 1$ и по теореме Больцано-Коши о промежуточном значении непрерывной на отрезке функции, функция $f(a, \delta)$ на отрезке $\delta \in [0; \delta_a]$ имеет корень δ_a^* . Полагая $x_1 = 1 + \delta_a^*$ и $x_k = \sqrt{2x_{k-1} - 1}$ ($k = \overline{2;n}$), получим решение системы (12).

На рис. 2 представлен геометрически рассматриваемый итерационный процесс вычисления корней.

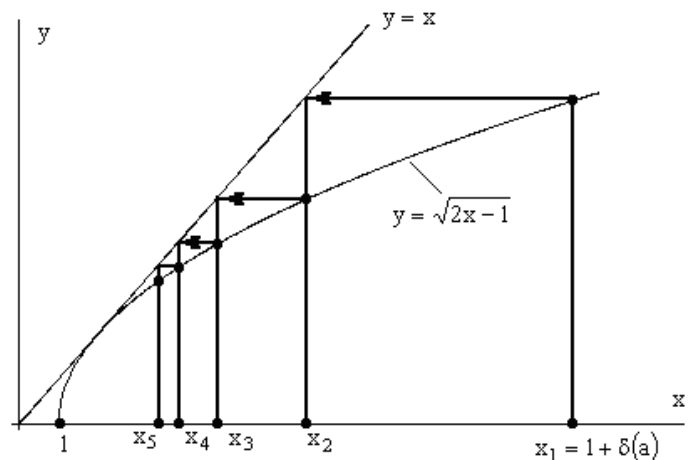


Рис. 2. Лестница Ламерея итерационного вычисления корней системы (12) при $n = 5$ ступеней распределения теплоподвода.

3. Пример определения оптимальной схемы трехступенчатого распределения тепловой нагрузки

В данном случае экстремальная задача (9)-(10) сводится к минимизации функции двух переменных

$$\psi(T_1, T_2) = T_0 \left[\left(\frac{T_1}{T_0} \right)^2 - 1 \right] + T_1 \left[\left(\frac{T_2}{T_1} \right)^2 - 1 \right] + T_2 \left[\left(\frac{T_3}{T_2} \right)^2 - 1 \right]$$

при ограничениях $T_0 \leq T_1 \leq T_2 \leq T_3$.

Пусть для определенности начальная температура на входе в трубу (рис. 1, б) с трехступенчатым распределением теплоподвода равна $T_0 = 300$ °С, а на выходе $T_3 = 1500$ °С. Тогда в данном случае $a = T_3/T_0 = 5$ и рассмотренный выше итерационный процесс дает: $x_1 = 1,924$, $x_2 = 1,688$ и $x_3 = 1,541$. Следовательно, оптимальная схема распределения тепловой нагрузки по температуре после каждой ступени теплоподвода определяется значениями: $T_1 = x_1 T_0 = 577$ °С и $T_2 = x_2 T_1 = 974$ °С. При таком распределении температур после каждой ступени теплоподвода по длине вертикальной трубы, механизм термоакустической неустойчивости, обусловленный отрицательным тепловым сопротивлением, имеет наименьшее действие, что приводит к фактически стабилизации стационарного режима движения. На рис. 3 приведен график функции $\psi(T_1, T_2)$ с помощью которой определялись оптимальные значения температур T_1 и T_2 .

Выводы

Получен алгоритм оптимального многоступенчатого распределения тепловой нагрузки по длине вертикальной трубы при которой интенсивность теплового сопротивления является наименьшей. Это приводит к минимизации интенсивности неустойчивой (восходящей) ветви напорной характеристики теплоподвода, что в свою очередь [4-5] позволяет нейтрализовать термоакустические автоколебания в рассматриваемой установке (рис. 1, б).

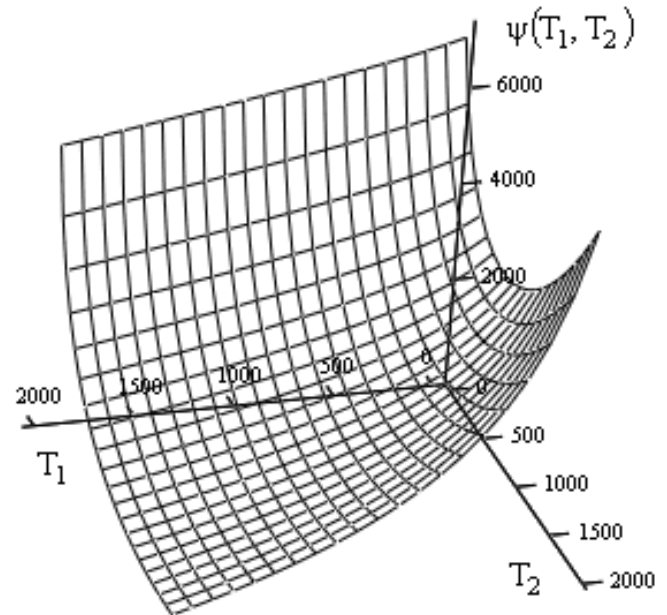


Рис. 3. Зависимость, определяющая интенсивность теплового сопротивления при трехразовом распределении тепловой нагрузки.

При устранении автоколебаний вибрационного горения, обусловленных механизмом Л. Крокко запаздывания сгорания топлива [5], путем повышения волнового сопротивления Z колебательного контура автоколебания, порождаемые механизмом отрицательного теплового сопротивления, преобразуются к релаксационной форме не зависящей от Z , амплитуду которых можно уменьшить минимизируя интенсивность $|\partial h_t^\Sigma(G)/\partial G|$ теплового сопротивления $h_t^\Sigma(G)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крокко Л. О роли времени запаздывания в возбуждении продольных высокочастотных колебаний в камере сгорания ЖРД / Л. Крокко, Д. Грей, Д. Гарри // Вопросы ракетной техники. – 1959. – № 5. – С. 24 – 29.
2. Гоцуленко В.В. Особенности внутрикамерной неустойчивости горения в жидкостных реактивных двигателях / В.В. Гоцуленко // Ин-

женерно – физический журнал. – 2008. – Т. 81, – № 5. – С. 897 – 902.

3. *Гоцуленко В.В.* Математическое моделирование особенностей феномена Рийке / В.В. Гоцуленко // Математическое моделирование, РАН. – 2004. – Т.16, № 9. – С. 23 – 28.

4. *Гоцуленко В.В.* Тепловое сопротивление как механизм возбуждения автоколебаний / В.В. Гоцуленко, В. Н. Гоцуленко // Сборник научн. трудов Днепродзержинского гос. техн. ун-та. – Днепродзержинск, 2009. – Вып. 1(11). – С. 95 – 100.

5. *Басок Б.И.* Проблема термоакустических колебаний и вибрационного горения / Б.И. Басок, В.В. Гоцуленко // Техническая теплофизи-

ка и промышленная теплоэнергетика: сборник научных трудов.– Д., 2009. – Выпуск 1. – С. 5 – 15.

6. *Гоцуленко В.В.* К проблеме управления релаксационными колебаниями “поющего” пламени / В.В. Гоцуленко // Инженерно – физический журнал. – 2007. – Т. 80, – № 3. – С. 129 – 135.

7. *Басок Б.И.* Уменьшение амплитуды “поющего” пламени Хиггинса с помощью ступенчатого сгорания топлива / Б.И. Басок, В.В. Гоцуленко // Промышленная теплотехника. – 2010. – Т.32, № 2. – С. 73 – 81.

Получено 25.05.2010 г.