

УДК 621.186.1

Авраменко А.А., Сорокина Т.В., Блинов Д.Г., Дмитренко Н.П.

Институт технической теплофизики НАН Украины

ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ЭЛАСТИЧНОЙ ЖИДКОСТИ С ПАМЯТЬЮ

На основі методу лінійних збурень отримано рівняння для знаходження критерія гідродинамічної нестійкості еластичної рідини. Дослідження даного рівняння на власні значення методом колокацій дозволило проаналізувати вплив збурюючих факторів на критерій стійкості.

На основе метода линейных возмущений получено уравнение для определения критерия гидродинамической неустойчивости эластичной жидкости. Исследование данного уравнения на собственные значения методом коллокаций позволило проанализировать влияние возмущающих факторов на критерий устойчивости.

On the basis of method of linear disturbance the equation for determination of hydrodynamic instability of elastic liquid is obtained. Investigation this equation to eigenvalue by the collocation method is allowed to analyze influence of disturbance factors on stability criterion.

D – тензор напряжения;
 h – половина ширины канала;
 \tilde{p} – давление основного течения;
 P – безразмерное давление;
 \tilde{t} – время;
 t – безразмерное время;
 \tilde{u}_∞ – скорость в центре канала;
 \tilde{U} – скорость;
 U – безразмерная скорость;
 \tilde{u}, \tilde{v} – компоненты вектора скорости;
 \tilde{x}, \tilde{y} – координаты;

x, y – безразмерные координаты;
 $\tilde{\alpha}$ – волновое число;
 $\tilde{\gamma}$ – время релаксации по тензору деформации;
 $\tilde{\lambda}$ – время релаксации по тензору напряжения,
 μ – динамический коэффициент вязкости;
 ν – кинематический коэффициент вязкости;
 ρ – плотность;
 $\tilde{\sigma}_x, \tilde{\sigma}_y, \tilde{\tau}$ – компоненты напряжения;
 σ_x, σ_y, τ – безразмерные компоненты напряжения;
 $\tilde{\phi}$ – амплитуда;
 ϕ – безразмерная амплитуда.

Введение

Исследованиям неустойчивости неньютоновской эластичной жидкости посвящено ряд публикаций [1-5]. В работе [1] рассмотрено неустойчивость коротких волн в потоке концентрированной полимерной жидкости с помощью модели Максвелла. Показано, что короткие волны неустойчивости в сильновязких жидкостях пропорциональны для больших волновых чисел и доказано, что такого рода неустойчивость появляется в системах с низким значением поверхностного натяжения, таких как растворы полимеров.

Авторами работы [2] изучена поверхностная линейная неустойчивость между слоями

эластичной жидкости типа UCM в канале при больших значениях числа Вейзенберга (Wi) с незначительной инерцией. По данным исследования определено эластичную неустойчивость для коротких волн возмущений при отсутствии поверхностного натяжения. Пульсации течения такой жидкости распадались по экспоненциальному закону в направлении от поверхности. Показано, что такого рода неустойчивость при больших числах Wi сохраняется во всем канале. В [3, 4] рассмотрено неустойчивость Oldroyd-B жидкости течения Пуазеля. В работе [5] представлено аналитическое описание вязкого течения в каналах прямолинейной и цилиндрической конфигурации, а также пока-

зано изменение решения уравнения Кармана для пластины и расширено вывод нелинейных уравнений для тонкой цилиндрической оболочки.

Авторами работы [6] рассмотрена термоэластичная динамическая неустойчивость (TEDI) в скользящих фракциях потока. Сначала рассмотрены отдельно на примере одномерных моделей термоэластичная и динамическая неустойчивости, а затем изучено их совместное влияние на основании созданной так называемой TEDI модели.

В последнее время в различных аппаратах и технологических процессах получил широкое распространение принцип дискретно-импульсного ввода энергии (ДИВЭ), важной

особенностью которого является турбулизация потока. Рабочей средой в технологиях и аппаратах ДИВЭ часто бывают неьютоновские жидкости, в том числе и эластичные, такие как эластичные растворы полимеров. Для корректного проектирования и эксплуатации аппаратов подобного рода важно уметь определить значение критерия, характеризующего начало перехода ламинарного течения в турбулентное.

Основные уравнения

Для определения критерия гидродинамической неустойчивости используем метод линейных возмущений. Согласно этому методу параметры течения представим в следующем виде:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y}) &= U(y) + u'(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y}), & \tilde{v}(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y}) &= v'(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y}), & \tilde{p}(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y}) &= P(x, y) + p'(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y}), \\ \tilde{\sigma}_x(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y}) &= \sigma_x(y) + \sigma'_x(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y}), & \tilde{\sigma}_y(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y}) &= \sigma_y(y) + \sigma'_y(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y}), & \tilde{\tau}(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y}) &= \tau(y) + \tau'(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y}) \end{aligned} \quad (1)$$

Форма возмущающего движения выбирается в виде продольной волны (волны Толлмина-Шлихтинга), удовлетворяющей уравнению неразрывности:

$$u' = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v' = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \psi = \tilde{\varphi}(y) \exp\left[i(\tilde{\alpha}\tilde{x} - \tilde{\beta}\tilde{t})\right], \quad (2)$$

где $\tilde{\beta} = \tilde{\beta}_r + i\tilde{\beta}_i$, $\tilde{\beta}_r$ – круговая частота колебания, $\tilde{\beta}_i$ – коэффициент нарастания колебаний. Параметры со штрихом указывают на возмущенные составляющие. Зависимость между тензорами напряжения и деформации для данного типа жидкости выглядит так:

$$\tilde{\lambda} \frac{\partial \tilde{\tau}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\tau} = 2\mu \left(D + \tilde{\gamma} \frac{\partial D}{\partial \tilde{t}} \right). \quad (3)$$

После подстановки выражения (1) в уравнение Навье-Стокса

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} &= -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{\sigma}_x}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{\tau}}{\partial \tilde{y}} \right), \\ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{t}} + U \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} &= -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial \tilde{\sigma}_y}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial \tilde{\tau}}{\partial \tilde{x}} \right), \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

и пренебрежения квадратичными членами относительно малых возмущений получено:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t} + \tilde{U} \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{\partial \tilde{U}}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau'}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial v'}{\partial t} + \tilde{U} \frac{\partial v'}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p'}{\partial y} + \frac{\partial \sigma'_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau'}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

С учетом (2), а также последующим обезразмериванием получаем аналог уравнения Orra-Зоммерфельда для неньютоновской эластичной жидкости:

$$\varphi(-c\alpha^2 + \alpha^2 U + U'') + (c - U)\varphi'' + \frac{1}{\text{Re}\alpha} \left(4i\alpha^2 \varphi'' + \frac{1 - i c \alpha \gamma}{i + c \alpha \lambda} (\alpha^4 \varphi + 2\alpha^2 \varphi'' + \varphi''''') \right) = 0, \quad (6)$$

где $\tilde{c} = \tilde{\beta} / \tilde{\alpha} = \tilde{c}_r + i\tilde{c}_i$, \tilde{c}_r – скорость распространения волн возмущений, \tilde{c}_i – инкремент нарастания возмущений. $\tilde{c}_i < 0$ соответствует затуханию, $\tilde{c}_i > 0$ – нарастанию возмущений в потоке,

$\text{Re} = \frac{\tilde{u}_\infty h}{\nu}$ – безразмерное число Рейнольдса, $\alpha = \tilde{\alpha} h$ – безразмерное волновое число,

$$U = \frac{\tilde{U}\mu}{h^2 \left(-\frac{\partial P}{\partial x} \right)} = \frac{\tilde{U}\mu l}{h^2 \Delta P}, \quad c = \frac{\tilde{c}}{\tilde{U}}, \quad \varphi = \frac{\tilde{\varphi}}{\tilde{U}h}, \quad \lambda = \frac{\tilde{\lambda}\tilde{\nu}}{h^2}, \quad \gamma = \frac{\tilde{\gamma}\tilde{\nu}}{h^2}.$$

Значение $c_i = 0$ соответствует смене режимов течения. При значениях $\lambda = 0$, $\gamma = 0$ выражение (6) трансформируется в классическое уравнение Orra-Зоммерфельда.

Как видно, в выражении (6) отсутствуют члены, учитывающие касательные и нормальные напряжения. Они были заменены на выражения, полученные из уравнений для каждой отдельной составляющей тензора скорости деформации.

Для определения области устойчивости уравнение (6) исследовалось на собственные значения при нулевом инкременте нарастания возмущений, который отвечает нейтральной кривой. Граничные условия соответствуют нулевым пульсациям скорости и на стенках канала и имеют вид

$$\varphi = \varphi' = 0 \text{ при } \tilde{y} = \pm 1. \quad (7)$$

Результаты расчета

Невозмущенные профили скорости получены на основе численного решения уравнения Навье-Стокса методом контрольных объемов

[7] и представлены на рис. 1.

Из рис. 1 видно, что профили скорости для ньютоновской жидкости менее заполнены по сравнению с профилями для неньютоновской жидкости. С течением времени заполненность профилей убывает для данных типов жидкости с указанными параметрами λ и γ .

Решение задачи на собственные значения производилось, используя метод коллокаций. Это обусловлено тем, что воздействие на поток возмущающих факторов приводит к увеличению области устойчивости (растет критерий устойчивости), а это в свою очередь влечет за собой необходимость увеличения количества пробных функций в расчетах. При этом возникают трудности в расчете при использовании метода Галеркина [8], связанные с необходимостью интегрирования рядов, содержащих большое количество слагаемых. Метод коллокаций имеет меньшую точность расчета, по сравнению с классическим методом Галеркина, но за счет использования дельта функции удается избежать интегрирования и сразу перейти к по-

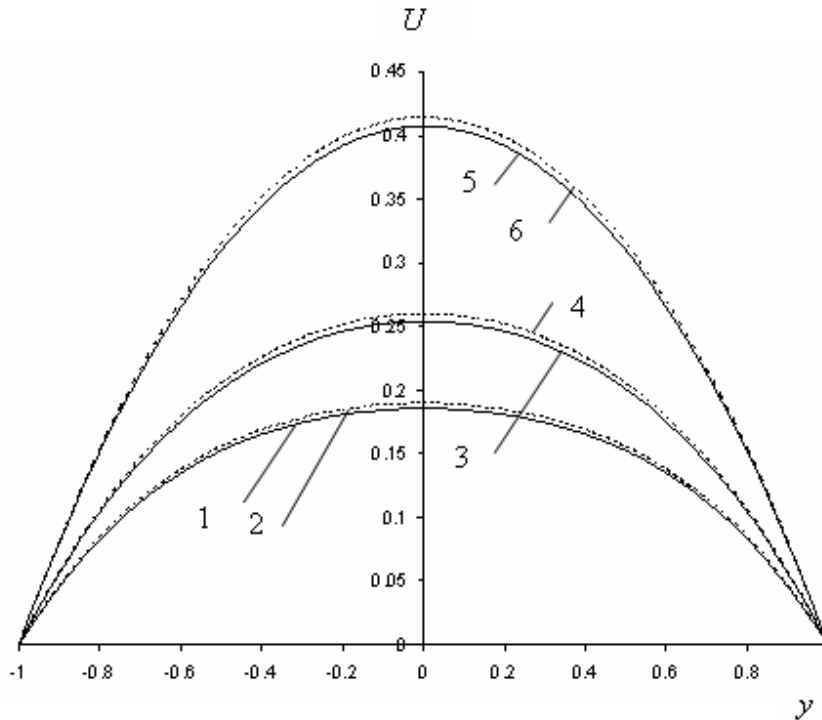


Рис. 1. Сравнение профилей скорости для ньютоновской ($\lambda = 0, \gamma = 0$) и неньютоновской жидкости ($\lambda = 1,37, \gamma = 0,55$). 1, 3, 5 – соответствуют неньютоновской жидкости; 2, 4, 6 – ньютоновской; линии 1, 2 – соответствуют $t = 0,2$; 3, 4 – $t = 0,3$; 5, 6 – $t = 0,7$.

строению системы алгебраических уравнений. Наблюдается хорошее совпадение критерия устойчивости с расчетными данными других авторов [9], которые использовали для расчетов метод коллокаций при большом числе используемых уравнений.

Приближение Галеркина для данного течения взято в следующем виде [8]:

$$v = \sum_{j=1}^N a_j f_j(y). \quad (8)$$

В качестве пробных функций использовались следующее выражения:

$$f_i(y) = (1 - y^2)^2 y^{2(j-1)}, \quad (9,а)$$

$$f_j(y) = (1 - y^2)^2 T_{2j}(y), \quad (9,б)$$

которые удовлетворяют граничным условиям, приведенным выше.

$T_j(y)$ – полиномы Чебышева первого рода.

Тестирование программы расчета показало хорошее согласование с данными работы [3], которая считается классической в этой области. При тестировании задача на собственные значения решалась для уравнения (6) при условии, что $\lambda = 0$ и $\gamma = 0$.

В результате проведенных исследований получено влияние λ и γ на критерий устойчивости (рис. 2-5). Из рис. 2 видно, что с увеличением параметра λ критерий устойчивости убывает, так как увеличивается время релаксации по времени, а с ростом γ наоборот возрастает (см. также рис. 3-5).

На рис. 2 представлено зависимость критерия устойчивости от безразмерного времени, которое, по сути, является безразмерным числом Фурье $t = Fo = \frac{\tilde{t}\tilde{v}}{h^2}$. Из рисунка видно, что

при разных значениях λ и γ критическое число Рейнольдса стремительно убывает до опреде-

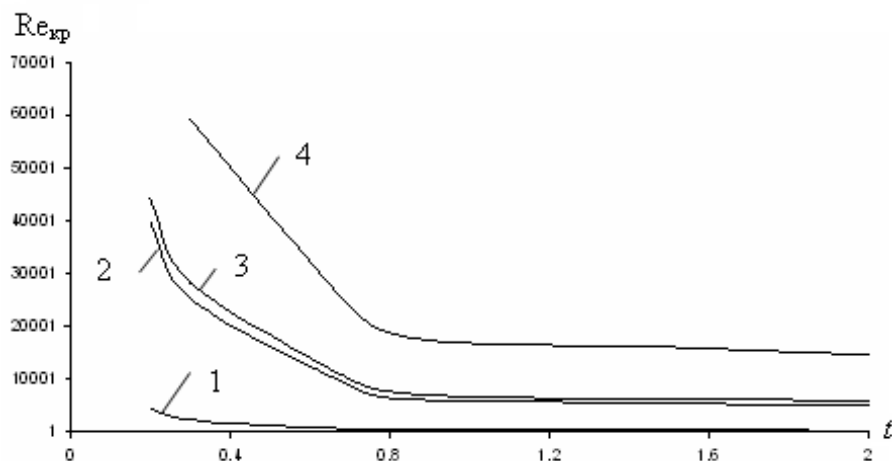


Рис. 2. Влияние λ , γ и профиля скорости на критерий устойчивости:
 1 – $\lambda = 1, \gamma = 0$; 2 – $\lambda = 0,1, \gamma = 0$; 3 – $\lambda = 0, \gamma = 0$; 4 – $\lambda = 0, \gamma = 1$.

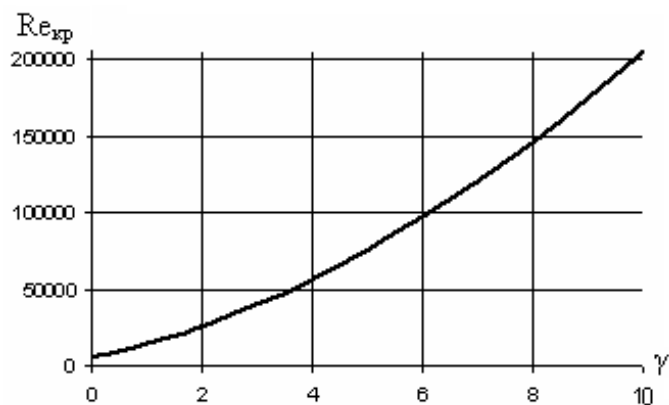


Рис. 3. Влияние γ на критерий устойчивости.

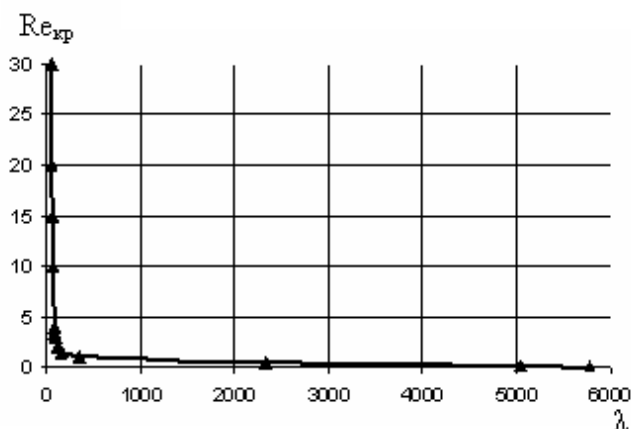


Рис. 4. Влияние λ на критерий устойчивости.

ленного значения t , лежащего в пределах от 0,8 до 0,9. Далее кривая выходит на так называемый «стационарный режим», где тенденция убывания критерия устойчивости сохраняется, но не так явно.

На рис. 3, 4 представлены зависимости γ и λ от критерия устойчивости. Рис. 3 указывает на то, что при увеличении безразмерного параметра, характеризующего время релаксации по тензору деформации, значение $Re_{кр}$ возрастает, а увеличение безразмерного параметра времени релаксации (рис. 4) приводит к резкому уменьшению критерия устойчивости. Это обусловлено тем, что при увеличении параметра

γ профиль становится более заполненным и устойчивость возрастает, а это в соответствии со второй теоремой Релея об устойчивости движения потока [10] ведет к увеличению критического числа Рейнольдса. При увеличении λ профиль скорости становится менее заполненным, что приводит к потере устойчивости.

Выводы

В работе на основе метода линейных возмущений проведен анализ влияния времен релаксации по тензору деформации λ и по тензору напряжения γ на критерий устойчивости. Данный анализ дал возможность проследить за динамикой развития профиля скорости при

разных значениях λ и γ в разные моменты времени. Получено графические зависимости показывающие, что при увеличении γ увеличивается область устойчивости течения, тогда как увеличение λ приводит к потере устойчивости.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kang Ping Chen, Daniel D. Joseph.* Elastic short wave instability in extrusion flows of viscoelastic liquids. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 42. – 1992. – P. 189 – 211.
2. *J.C. Miller, J.M. Rallison.* Interfacial instability between sheared elastic liquids in a channel. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 143. – 2007. – P. 71 – 87.
3. *S. Scotto, P. Laure.* Linear stability of three-layer Poiseuille flow for Oldroyd-B fluids. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 83. – 1999. – P. 71 – 92.
4. *P. Laure, H.Le Meur, Y. Demay, J.C. Saut, S. Scotto.* Linear stability of multilayer plane Poiseuille flows of Oldroyd B fluids. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 71. – 1997. – P. 1 – 23.
5. *H. F. Tiersten.* On the Analytical Description of the Elastic Stability of Rectilinear and Cylindrical

Configurations. 2007; 12; 277 originally published online Nov 23, 2005; *Mathematics and Mechanics of Solids*.

6. *L. Afferrante, M. Ciavarella.* Thermo-elastic dynamic instability (TEDI) in frictional sliding of two elastic half-spaces. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 55. – 2007. – P. 744 – 764.

7. *Патанкар С.* Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 152 с.

8. *Флетчер К.* Численные методы на основе метода Галеркина. – М.: Мир, 1988. – 352.

9. *Luther S., Rensen J.M., T.H. van den Berg, Lohse D.* The effect of bubbles on developed turbulence. *Advances in Turbulence X. Proceedings of the Tenth European Turbulence Conference.* H.I. Andersson & P.-A. Krogstad (Eds.). CIMNE, Barcelona 2004.

10. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. – М.: Издательство иностранной литературы, 1956. – 528 с.

Получено 12.01.2010 г.