УДК 521.21/22

М.М. Фис, В.І. Нікулішин

АНАЛІЗ ВПЛИВУ ЕЛІПСОЇДАЛЬНОСТІ ФІГУРИ ЗЕМЛІ НА ЇЇ ВНУТРІШНЮ СТРУКТУРУ НА ПРИКЛАДІ МОДЕЛІ PREM

Для існуючих одновимірних розподілів мас для еліпсоїдальної планети не розроблені методи обчислення її гравітаційного потенціалу V та гравітаційної енергії E, тому є актуальним отримання формул для одночасного знаходження густини розподілу мас, потенціалу та енергії для еліпсоїдального тіла.

Ключові слова: гравітаційне поле; поліноми Лежандра; потенціальна енергія; внутрішній потенціал; модель PREM.

Вступ

Зовнішнє гравітаційне поле Землі має тривимірну структуру, яка є наслідком неоднорідності розподілу мас планети та відхилення її фігури від форми кулі.

Дослідимо спочатку вплив другого чинника – еліпсоїдальності на визначення значень V та E на прикладі еліпсоїдального тіла. Методика, яка наводиться в роботі [Муратов, 1986], дає змогу отримувати як зовнішній, так і внутрішній потенціал, проте у випадку еліпсоїдального тіла для кусково-неперервних функцій формули стають дуже громіздкими і на відміну від кульової планети отримання практичних співвідношень для величини E фактично неможливе**,** хоча для неперервних функцій така можливість все ж існує. Тому логічно подати функцію $\delta(\rho)$ у вигляді суми неперервних функцій, наприклад, рядами по поліномах Лежандра, для яких просто обчислюється спочатку потенціал, а далі і значення *E*.

Аналіз останніх досліджень та публікацій

Фундаментальні дослідження з цієї тематики зроблені Г. Моріцом у монографії [Мориц, 1994], в якій на основі формул для потенціалу сферично-симетричних моделей і апроксимації поверхні еліпсоїда поліномами Лежандра другого порядку наводяться формули для еліпсоїдальної планети.

Це дає можливість обчислювати другу важливу її характеристику: гравітаційну (потенціальну) енергію сферично-симетричнх розподілів мас Землі. У роботі [Marchenko, Zayats, 2008] О.М. Марченко та О.С. Заяць навели детальні співвідношення для обчислення величин V та E, а також дали оцінку переходу від кулі до еліпсоїда.

Існує інший підхід до визначення потенціалу та його енергії, який широко використовується в астрономії та астрофізиці [Чанрасекахар, 1973] під час дослідження фігур рівноваги. У монографії [Картвелишвили, 1983] він використаний для отримання алгоритмів знаходження внутрішнього потенціалу і прискорення сили ваги для еліпсоїда, при цьому сферично-симетрична модель PREM трактувалась як одновимірний розподіл еліпсоїдальної планети.

Постановка завдання

Мета цих досліджень – адаптація класичної теорії потенціалу еліпсоїда для її практичного використання до обчислення внутрішнього потенціалу V та потенціальної енергії E кульових та еліпсоїдальних планет шляхом апроксимації кусково-неперервних функцій многочленами Лежандра.

Виділення не вирішених раніше частин загальної проблеми

Для еліпсоїдальної планети зовнішній та внутрішній потенціали можна розраховувати, використовуючи алгоритми, наведений, наприклад, у [Фис, Нікулішин, 2009], проте такі обчислення є об'ємними і фактично не реалізованими, а знаходження E_e^T (точного значення для еліпсоїда) фактично неможливе. Тобто не вирішеним є питання створення простих алгоритмів визначення внутрішнього потенціалу та гравітаційної енергії несферичних тіл та їхня практична реалізація.

Виклад основного матеріалу

Нехай радіальний розподіл мас моделі PREM $\delta(\rho)$ представлений кусково-неперервними функціями $\delta_i(\rho)$ (див. (1) та табл. 1) всередині еліпсоїдальної планети $\tau\left\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right\}\le 1$ або кулі К радіусом R (R=6371 км):

$$\delta(\rho)=\begin{cases}\delta_0(\rho), & 0\le\rho<\rho_0\\ \delta_1(\rho), & \rho_0\le\rho<\rho_1\\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \delta_m(\rho), & \rho_{m-1}\le\rho\le 1\end{cases} \tag{1}$$

Розкладемо функцію $\delta(\rho)$ за поліномами Лежандра парних степенів [Фис, Нікулішин, 2009]:

$$\delta(\rho)=\delta_c\sum_{n=0}^{\infty}C_{2n}P_{2n}(\rho), \tag{2}$$

де

$$C_n=(4n+1)\int_0^1\frac{\delta(\rho)}{\delta_c}P_{2n}(\rho)d\rho=$$

$$=\delta_c\sum_{k=0}^{n}d_k^n\int_0^1\frac{\delta(\rho)}{\delta_c}\rho^{2k}d\rho\,. \tag{3}$$

Тут $\delta_c=\dfrac{M}{V}=5.514$ г/см^3 – середня густина

Таблиця 1

Коефіцієнти многочленів $\delta_i(\rho)=\sum_{j=0}^{n}a_{ij}\rho^j$

i \ ρ	ρ_{i-1}	ρ_i	a_{i0}	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}
1	0	1221.5	13.0885	0	-8.8381	0
2	1221.5	3480	12.5815	-1.2638	-3.6426	-5.5281
3	3480	5701	7.9565	-6.4761	5.5283	-3.0807
4	5701	5771	5.3197	-1.4836	0	0
5	5771	5971	11.2494	-8.0298	0	0
6	5971	6151	7.1089	-3.8045	0	0
7	6151	6346.6	2.691	0.6924	0	0
8	6346.6	6356	2.9	0	0	0
9	6356	6368	2.6	0	0	0
10	6368	6371	1.02	0	0	0

Землі, а $\mu_{2l}=\int_0^1\frac{\delta(\rho)}{\delta_c}\rho^{2k}d\rho$ – степеневі моменти густини.

Потенціал притягання V визначається рядом, який збігається рівномірно:

$$V=f\int_\tau\frac{\delta(\rho)}{r}d\tau=\delta_c f\sum_{n=0}^{\infty}C_n\int_\tau\frac{P_{2n}(\rho)}{r}d\tau= \\ =\delta_c f\sum_{n=0}^{\infty}C_nV_n(P). \tag{4}$$

Встановимо вигляд членів

$$V_n(P)=f\int_\tau\frac{P_{2n}(\rho)}{r}d\tau=f\sum_{k=0}^{n}d_k^n\int_\tau\frac{\rho^{2k}}{r}d\tau\,, \tag{5}$$

для чого обчислимо вираз

$$U_k(P)=\int_\tau\frac{\rho^{2k}}{r}d\tau\,. \tag{6}$$

Користуючись результатом, отриманим у роботі [Фис, Нікулішин, 2009], можна записати:

$$U_k(P)=f\frac{\pi abc}{k+1}\int_{\xi(0)}^{\infty}\left[1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^{k+1}\right]\frac{du}{Q(u)}\,, \tag{7}$$

де ξ – еліпсоїдальна координата [Фис, Нікулішин, 2009].

Для двоосного еліпсоїда (a=b) одержимо:

$$U_k(P)= \\ =\frac{3fV}{4(k+1)}\int_{\xi(0)}^{\infty}\left[1-\rho^{2k+2}\left(\frac{a^2\sin^2\theta}{a^2+u}+\frac{c^2\cos^2\theta}{c^2+u}\right)^{k+1}\right]\frac{du}{Q(u)} \tag{8}$$

$$U_k(P)=\frac{3fV}{4(k+1)}(M_{00}(\xi)- \\ -(k+1)!\rho^{2k+2}\sum_{il=0}^{k+1}\frac{\sin^{2il}\theta\cdot\cos^{2k+2-2l}\theta}{il!(k+1-il)!}M_{lt}(\xi)), \tag{9}$$

де введені величини

$$M_{lt}(\xi)=a^{2l}c^{2t}\int_{\xi(0)}^{\infty}\frac{du}{(a^2+u)^{l+1}(c^2+u)^{t+\frac{1}{2}}} \tag{10}$$

можна визначити при $\xi=0$ так:

$$M_{lt}=\frac{2}{a\alpha}\left\{\frac{1}{2l+2t+1}+\right. \\ +(2l+2)!\sum_{S=0}^{2l+2}\frac{(1-\alpha^2)^S}{S!(l+1-S)!}+ \\ \left.+\sum_{S=2l+2}^{\infty}\frac{(1-\alpha^2)^S(S-l-2)!}{S!}\right\}. \tag{11}$$

У разі сферично-симетричної моделі маємо:

$$M_{lt}=\frac{2}{R(2l+2t+1)}, \tag{12}$$

а

$$U_k(P)=\frac{3V_l}{2(k+1)R}\left(1-\frac{\rho^{2k+2}}{2k+3}\right), \tag{13}$$

і, своєю чергою, для неї внутрішній потенціал визначається так:

$$V_l(P)=V^l{}_z(P)+V_в{}^l(P)+V_p{}^l(P), \tag{14}$$

$$V_z{}^l(P)=(\sum_{i=1}^{l-1}M_{G_i}-M_{\tau_l})/\rho\,,$$

$$M_{l-1}=\sum_{i=1}^{l-1}M_{G_i}\,,$$

де M_G – маса i-го сферичного кільця радіусами ρ_i, ρ_{i-1}; M_{τ_l} – маса кулі з радіусом $\rho_в$ з розподілом $\delta_l(\rho)$; τ_l – куля радіуса ρ_i; G_i – шар, обмежений сферами радіуса ρ_i, ρ_{i-1}.

$$V_в{}^l(P)=3fM\sum_{i=1}^{4}\frac{a_{l,i+2}}{i+2}\left(\rho_l^{i+2}-\rho_{l-1}^{i+2}-\frac{\rho^{i+2}}{i+3}\right), \tag{15}$$

Таблиця 2

Точне та апроксимаційне значення потенціалу кулі та еліпсоїдальної планети

ρ	Потенціал кулі V* $* \dfrac{fM}{R} = 0.62564825 \cdot 10^8 \ \dfrac{м^2}{c^2}$		Потенціал еліпсоїдальної планети $* \dfrac{fM}{a} = 0{,}6249482 \cdot 10^8 \ \dfrac{м^2}{c^2}$				
	Точне значення V_k^T	Апроксимов. значення V_k^T	0^0	45^0	90^0	135^0	180^0
0.0	1.781048	1.780988	1.783517	1.783517	1.783517	1.783517	1.783517
0.1	1.769258	1.769143	1.771538	1.771477	1.771416	1.771477	1.771538
0.2	1.733995	1.733910	1.735917	1.735680	1.735443	1.735680	1.735917
0.3	1.677677	1.677546	1.678978	1.678606	1.678043	1.678606	1.678978
0.4	1.601924	1.601690	1.602408	1.601849	1.600809	1.601849	1.602408
0.5	1.507864	1.507891	1.507713	1.506503	1.505014	1.506503	1.507713
0.6	1.401883	1.401777	1.400610	1.399198	1.397807	1.399198	1.400610
0.7	1.298741	1.298904	1.296984	1.295139	1.293824	1.295139	1.296984
0.8	1.197723	1.197633	1.194469	1.192664	1.190989	1.192664	1.194469
0.9	1.096413	1.096013	1.092164	1.090494	1.088204	1.090494	1.092164
1.0	0.995080	0.994818	0.990038	0.988103	0.985919	0.987967	0.990038

$$V^l{}_P(P) = 3fM \sum_{j=l+1}^{n_k} \sum_{i=1}^{4} \frac{a_{l,i+2}}{i+1}\left(\rho_j^{i+1} - \rho_{j-1}^{i+1}\right), \quad (16)$$

за умови, що $P \in G_l$.

Обчислимо точне значення внутрішнього потенціалу кулі V_k^T за формулами (14)–(16), а далі – апроксимаційну величину V_k^a з використанням (4), (5), (13). Аналогічні обчислення зробимо для еліпсоїда та визначимо апроксимаційне значення потенціалу еліпсоїда V_e^a. Наведені в табл. 2 результати обчислень показують, що нехтувати еліпсоїдальністю не можна, бо, змінюючись з широтою, числа відрізняються у другому знаку від основної величини і є співвимірними з внеском у потенціал обертової складової.

Продовжуючи дослідження, визначимо точне та апроксимаційне значення гравітаційної енергії кулі (E_k^T і E_k^a), а також апроксимаційне значення потенціальної енергії для еліпсоїда E_e^a, для чого скористаємось співвідношенням

$$\begin{aligned} E &= -\frac{1}{2}\int_\tau \delta U d\tau = \\ &= -\frac{\delta_c^2}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} C_n C_m \int_\tau P_{2n}(\rho) U_m(P) d\tau = \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} C_n C_m E_{nm}. \end{aligned} \quad (17)$$

Визначимо елементи E_{nm} спочатку для двоосного еліпсоїда:

$$E_{nm} = \frac{3}{4}\frac{fM}{(k+1)}\delta_c \sum_{m=0}^{n} d_k^m \int_\tau P_{2n}(\rho) \int_0^\infty \left(1 - \rho^{2k}\left(\frac{a^2\sin^2\theta}{a^2+u} + \frac{c^2\cos^2\theta}{c^2+u}\right)^{k+1}\right)\frac{du}{Q(u)} = \frac{3(fM)^2}{4f(k+1)}\sum_{k=0}^{m} d_k^m (r_0 - t_n^k), \quad (18)$$

$$\begin{aligned} t_n^k &= \int_\tau \int_0^\infty P_{2n}(\rho)\rho^{2k+4}\left(\frac{a^2\sin^2\theta}{a^2+u} + \frac{c^2\cos^2\theta}{c^2+u}\right)^{k+1} \sin\theta \frac{du}{Q(u)} = \\ &= \frac{1}{2^m n!}\frac{(2k+4)!}{(2k+4-2n)!}\int_0^\infty \left(\rho^2 - 1\right)^{2n} \rho^{2k+4-2n} d\rho \cdot S_k = \frac{(2k+4)!(2k+4-2n-1)!}{(2k+2n+5)!!}; \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} S_k &= \int_0^\pi \int_0^\infty \left(\frac{a^2\sin^2\theta}{a^2+u} + \frac{c^2\cos^2\theta}{c^2+u}\right)^{k+1} \frac{du}{Q(u)} = \sum_{il=0}^{3N_{llk+1}} \frac{(k+1)!}{il!(k+1-il)!}\int_0^\pi \sin^{2il+1}\theta \cos^{2k+2-il}\theta \cdot d_0 \cdot M_{lt} = \\ &= (k+1)!\sum_{il=0}^{k+1}\frac{2il!!(2k-2il-1)!!}{(2k+3)!!} M_{lt}, \end{aligned}$$

де

$$d_0 = \begin{cases} \frac{1}{3}, & n = 0 \\ \frac{2}{15}, & n = 1 \\ 0, & n > 1 \end{cases}$$

У випадку кулі $S_k = \frac{1}{2k+3}$ і формули (1) і (3) спрощуються, а саме:

$$E'_{nm} = \frac{9 fV^2}{4 fR} \sum_{k=0}^{m} d_k^m \left(r_0 - t_n^{'k}\right), \quad t_n^{'k} = \frac{(2k+4)!(2k+4-2n)!!}{(2k+2n+5)!!}. \tag{20}$$

Для кульової планети енергія визначається за формулою

$$E = -\frac{1}{2}\frac{fV}{R}\int_{\tau_?} u\delta d\tau = -\frac{1}{2}\frac{fV}{R}\sum_{m=1}^{n_k}\int_{\tau_m} u_m(P)\delta_m(P)d\tau_m ,$$

яка після підстановки виразів (14)–(16) набуде вигляду:

$$E = -\frac{9}{2}\frac{(fM)^2}{fR}\sum_{l=1}^{n_k}\left\{\sum_{j=1}^{4} a_{lj+2}\left(\frac{\rho_l^{j+2}}{j+2} - \frac{\rho^{j+2}}{j+2}\right)V_P^l + \right.$$
$$+\frac{M_{l-1} - M_{\tau_l - 1}}{j+1}\left(\rho_l^{j+1} - \rho_{l-1}^{j+1}\right) + \tag{21}$$
$$+\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}\frac{a_{l,i+2}a_{l,j+2}}{(j+2)(i+2)}\left[\left(\rho_l^{j+2} - \rho_{l-1}^{j+2}\right)\cdot\left(\left(\rho_l^{j+1} - \rho_{l-1}^{j+1}\right) + \right.\right.$$
$$\left.\left.\left. + \frac{1}{i+j+2}\left(\rho_l^{j+i+2} - \rho_{l-1}^{j+i+2}\right)\right)\right\}\right].$$

Обчислені за наведеними формулами точне значення для E_k^T, а також апроксимаційні – E_k^a і E_e^a подано у табл. 3.

Таблиця 3

Точне та апроксимаційне значення енергії для кулі та еліпсоїда

Фігура	Апроксимаційне значення енергії	Точне значення енергії
Куля	-2.4692036680 10^{39} ergs	-2.4696997141 10^{39} ergs
Еліпсоїд	-2.4270418572 10^{39} ergs	–

Висновки

Аналіз отриманих результатів дає підстави стверджувати, що вони добре узгоджуються з даними попередніх досліджень. Так, величина потенціалу (V=111421690 м/с^2) в центрі планети вписується у допустимі межі його зміни, отримані проф. Г.О. Мещеряковим (V<=116250000 м/с^2), а на поверхні (V=622557000 м/с^2) корелює з обчисленим (V=62636790 м/с^2) за іншим алгоритмом у монографії [Муратов, 1976]. Отже, на основі результатів табл. 2 можна стверджувати, що апроксимаційні формули можуть використовуватись для знаходження величин V як для сферично-симетричної кульової планети, так і для еліпсоїдальної, бо для останнього випадку розраховувати як зовнішній, так і внутрішній потенціали можна, використовуючи алгоритми, наведені, наприклад, у [Фис, Нікулішин, 2009], проте такі обчислення є об’ємними і фактично не реалізованими.

Абсолютне значення обчисленої другої характеристики – потенціальної енергії також добре узгоджується з результатами, одержаними іншими авторами. Так, проф. О.М. Марченко та О.С. Заєць провели детальні дослідження з обчислення значення E для різних розподілів мас Землі, зокрема і для моделі PREM. Розрахована за наведеними у цій роботі методиками величина гравітаційної енергії не суперечить цим результатам. А оскільки необхідно враховувати еліпсоїдальність планети, особливо для помітно витягнутих фігур (це підтверджується даними табл. 2), а знаходження точного значення E_e^T для еліпсоїда фактично неможливе, бо еліпсоїдальна координата ζ є змінною меж інтегрування, то єдиним способом обчислити E_e^T є апроксимаційний підхід, тому в подальшому ми його ототожнюємо з величиною E_e^a.

Література

Картвелишвили К.М. Планетарная плотностная модель и нормальное поле Земли. – М.: Наука, 1983. – 93 с.

Мориц Г. Фигура Земли: Теоретическая геодезия и внутреннее строение Земли. – К., 1994. – 240 с.

Муратов Р.З. Потенциалы эллипсоида. – М.: Атомиздат, 1976. – 144 с.

Фис М.М., Нікулішин В.І. Про єдиний алгоритм визначення значень густини, потенціалу та енергії одновимірного розподілу мас еліпсоїдальної планети // Геодезія, картографія та аерофотознімання. – 2009. – № 71.

Чанрасекахар С. Эллипсоидальные фигуры равновесия. – М.: Мир, 1973. – 288 с.

Dziewonski A.M., Anderson D.L. Preliminary reference Earth model. – Physics of the Earth and Planet. Inter. – 1981. – 25. – P. 297–356.

Marchenko A.N. Zayats A.S. Estimation of the potential gravitational energy of the Earth based on reference density models // Геодинамика. – 2008. – № 1 (7). – С. 5–24.

АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ЕЛИПСОИДАЛЬНОСТИ ФИГУРЫ ЗЕМЛИ НА ЕЕ ВНУТРЕННЮЮ СТРУКТУРУ НА ПРИМЕРЕ МОДЕЛИ PREM

М.М. Фыс, В.И. Никулишин

Для существующих одномерных распределений масс для эллипсоидальной планеты не разработаны методы вычисления ее гравитационного потенциала V и гравитационной энергии E, в связи с чем является актуальным получение формул для одновременного вычисления плотности распределения масс, потенциала и энергии для эллипсоидального тела.

Ключевые слова: гравитационное поле; полиномы Лежандра; потенциальная энергия; внутренний потенциал; модель PREM.

THE ANALYSIS OF IMPACT OF EARTH'S FIGURE ELLIPTICITY ON ITS INTERNAL STRUCTURE IN IMITATION OF PREM MODEL

M.M. Fys, V.I. Nikulishyn

The methods of calculation of gravity potential V and potential energy E for ellipsoidal planet for existing one-dimensional mass distribution were not worked out. That’s why now the derivation of formulas for simultaneous calculation of density mass’s distribution and potential and energy for the ellipsoidal body is actual.

Key words: gravitational field; Legendre polynomials; the potential energy; inner potential, model PREM.

Національний університет “Львівська політехніка”, м. Львів Надійшла 25.05.2011