УДК 669.162.23

Басок Б.И., Гоцуленко В.В.

Институт технической теплофизики НАН Украины

ТЕРМОАКУСТИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ В ДИСКРЕТНО - РАСПРЕДЕЛЕННОМ КОЛЕБАТЕЛЬНОМ КОНТУРЕ ПРИ ТЕПЛОПОДВОДЕ

Розглядається дискретно-розподілений коливальний контур, що складається з вертикальної труби з теплопідводом в нижній її частині. Припускаючи, що в контурі із зосередженими параметрами генеруються автоколивання з формою близькою до гармонійних коливань, отримані співвідношення, які встановлюють характер їх перетворення в розподіленій частині динамічної системи, що розглядається.

Рассматривается дискретно-распределенный колебательный контур, состоящий из вертикальной трубы с теплоподводом в нижней ее части. Предполагая, что в контуре с сосредоточенными параметрами генерируются автоколебания по форме близкие к гармоническим колебаниям, получены соотношения, устанавливающие характер их преобразования в распределенной части рассматриваемой динамической системе.

It is considered discretely-distributed oscillatory contour consisting of a vertical pipe with heat supply in her bottom part. Assuming, that in a contour with the concentrated parameters self-oscillations under the form close to harmonious fluctuations are generated, expressions their transformations establishing character to the distributed part considered to dynamic system are received.

C – акустическая гибкость колебательного контура с распределенными параметрами;

$H(Q)$ – напорная характеристика теплоподвода распределенного контура;

L – акустическая масса колебательного контура с распределенными параметрами;

$P_{\Gamma}(t)$ – давление в сосредоточенном контуре;

$P(x,t)$ – давление в распределенном контуре;

$Q_{\Gamma}(t)$ – объемный расход в сосредоточенном контуре;

$Q(x,t)$ – объемный расход в распределенном контуре;

$\mathrm{Re}[F]$ – вещественная часть комплексной величины $F=f_1+if_2$;

ξ – стационарное значение расхода в колебательном контуре с сосредоточенными параметрами.

Введение

Известно, что автоколебания феномена Рийке моделируют закономерности вибрационного горения, которое возбуждается и поддерживается теми же механизмами неустойчивости, которые не связаны с запаздыванием сгорания топлива [1]. Описание этого нестационарного режима хорошо изучено для вертикальной трубы [2-3], которая моделируется колебательным контуром с сосредоточенными параметрами.

В практике вертикальные камеры горения воздухонагревателей доменных печей, дымовые трубы промышленных нагревательных печей, печи по типу трубы Рийке, сжигающие бытовые отходы, являются системами с распределенными параметрами.

Постановка задачи и алгоритм ее решения

В данной работе труба Рийке моделируется как динамическая система, состоящая из двух колебательных контуров (рис.1). В зоне теплоподвода расположен колебательный контур с сосредоточенными параметрами. Из-за действия известных [1-3] механизмов неустойчивости в этом контуре возбуждаются термоакустические автоколебания, которые далее передаются в верхнюю часть трубы – распределенный колебательный контур. Предполагая, что колебания в сосредоточенном колебательном контуре по форме близки к гармоническим колебаниям, задачей данной работы является аналитическое определение форм колебаний в распределенном колебательном контуре.

Динамика в распределенной части, рассматриваемой колебательной системы, описывается следующей нелинейной системой телеграфных уравнений [2]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = H(Q) - L\dfrac{\partial Q}{\partial t}, \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = -C\dfrac{\partial P}{\partial t}, \end{cases} \quad (1)$$

которая дополняется граничными условиями:

$$P(x,t)\big|_{x=0} = P_{\Gamma}(t)\;, Q(x,t)\big|_{x=0} = Q_{\Gamma}(t), \quad (2)$$

где $P_{\Gamma}(t)$ и $Q_{\Gamma}(t)$ – периодические решения, соответствующие предельному циклу в колебательном контуре с сосредоточенными параметрами. Природа и причины возбуждения автоколебаний в этом контуре хорошо изучены [1-3]. Как в случае естественного движения (рис.1, а), так и создаваемого нагнетателем (рис.1, б), термоакустические автоколебания в этом контуре по форме близкие к гармоническим, могут быть аналитически представлены в виде:

$$Q_{\Gamma}(t) = \mathrm{Re}\left[Q_0 \exp(i\omega\, t)\right],$$

$$P_{\Gamma}(t) = \mathrm{Re}\left[P_0 \exp(i\omega\, t)\right],$$

где Q_0, P_0 – комплексные амплитуды, $\omega>0$ – частота.

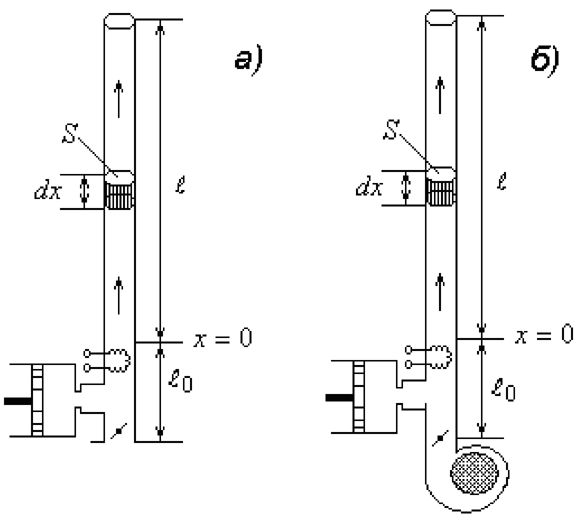

Рис. 1. Схема рассматриваемого дискретно-распределенного колебательного контура: а) при естественном движении; б) при напорном движении создаваемым нагнетателем.

Дифференцируя первое уравнение (1) по t, а второе − по x, и исключая смешанную производную $\dfrac{\partial^2 P}{\partial x \partial t}$, получим следующее уравнение второго порядка

$$a^2\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} + b\frac{\partial Q}{\partial t} = 0\,, \quad (3)$$

где положено: $a = 1/\sqrt{LC}$, .

Выполняя линеаризацию характеристики $H(Q) \approx k(Q-\xi) + H_0$ получим $b=k/L$. Рассматривая решения $Q(x,t)=Q(t)$, не зависящие от пространственной переменной x, легко получить, что $Q = C_1 + C_2\exp(bt)$, и следовательно при положительном коэффициенте $b>0$, т.е. на восходящей ветви $\mathrm{d}H/\mathrm{d}Q>0$ характеристики $H(Q)$ колебания нарастают, а при $b<0$ убывают.

Будем искать решения $Q(x,t)$ из класса $C^{2,2}(\Omega\times\mathrm{R})$, где $\Omega = [0,\ell]$, $\Gamma = \partial\Omega = \{0,\ell\}$.

Предполагаем, что граничные условия являются следующими:

$$Q\big|_{\Gamma} = \mathrm{Re}\left[\Phi(x)\exp(i\omega\, t)\right], \Phi = \Phi_1 + i\Phi_2\,, \quad (4)$$

где $\Phi_i\ \left(i=\overline{1,2}\right)$ не зависят от времени t .

Решение будем искать в виде [7]:

$$Q(x,t) = \mathrm{Re}\left[\upsilon(x)\exp(i\omega\, t)\right], \upsilon = \upsilon_1 + i\upsilon_2, \quad (5)$$

т.е. $Q(x,t) = \upsilon_1(x)\cos(\omega\, t) - \upsilon_2(x)\sin(\omega\, t)$.

Подставляя (5) в (3) получим:

$$\cos(\omega\, t)\left[\Delta\upsilon_1 + \frac{\omega^2 + c}{a^2}\upsilon_1 - \frac{b\omega}{a^2}\upsilon_2\right] -$$

$$-\sin(\omega\, t)\left[\Delta\upsilon_2 + \frac{\omega^2 + c}{a^2}\upsilon_2 + \frac{b\omega}{a^2}\upsilon_1\right] = 0.$$

Откуда, в силу линейной независимости функций

$\cos(\omega\, t)$ и $\sin(\omega\, t)$ следует, что:

$$\Delta\upsilon_1 + \frac{\omega^2 + c}{a^2}\upsilon_1 - \frac{b\omega}{a^2}\upsilon_2 = 0\,,$$

$$\Delta\upsilon_2 + \frac{\omega^2 + c}{a^2}\upsilon_2 + \frac{b\omega}{a^2}\upsilon_1 = 0,$$

или в комплексной форме:

$$\Delta\upsilon + \lambda\upsilon = 0, \qquad (6)$$

где положено $\lambda = \dfrac{\omega^2}{a^2}\left(1 + i\dfrac{b}{\omega}\right)$. Таким образом, функция $\upsilon(x) = \upsilon_1(x) + i\upsilon_2(x)$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца (уравнению амплитуд) (6) тогда и только тогда, когда функция $Q(x,t) = \mathrm{Re}\left[\upsilon(x)\exp(i\omega t)\right]$ является решением телеграфного уравнения (3). Из граничного условия (4) получаем условие на комплексную амплитуду $\upsilon|_\Gamma = \Phi(x)$. (7)

Следовательно, мы получили, что внутренняя задача Дирихле об установившихся колебаниях (3)-(4) эквивалентна краевой задаче (6)-(7). Рассматривая любую дважды непрерывно дифференцируемую функцию $U(x)$, такую, что $U(x)\,|_\Gamma = \Phi(x)$, например, $U(x) = \Phi(0)\dfrac{\ell - x}{\ell} + \Phi(\ell)\dfrac{x}{\ell}$, замена $\upsilon' = \upsilon - U$ приводит к задаче с нулевыми граничными условиями:

$$\Delta\upsilon' + \lambda\upsilon' = -\frac{F}{a^2},\ \ \upsilon'|_\Gamma = 0, \qquad (8)$$

где $F = a^2(\Delta U + \lambda U) \equiv f_1 + if_2$.

Далее, обозначим через $G(x,\xi)$ функцию Грина [4] следующей внутренней однородной задачи Дирихле для уравнения Лапласа:

$$\Delta\upsilon = 0,\ \upsilon|_\Gamma = 0. \qquad (9)$$

Тогда решение однородной задачи для уравнения Пуассона $\Delta\upsilon = -F,\ \upsilon|_\Gamma = 0$ представляется в виде следующего интеграла $\upsilon(x) = \int\limits_\Omega G(x,\xi)F(\xi)d\xi$ и, следовательно, для решения задачи (8) получаем представление: $\upsilon'(x) = J(x) + \lambda\int\limits_\Omega G(x,\xi)\upsilon'(\xi)d\xi$,

где $J(x) = \dfrac{1}{a^2}\displaystyle\int_0^\ell G(x,\xi)F(\xi)d\xi.$ (10)

В нашем случае ядро $G(x,\xi)$ полученного интегрального уравнения Фредгольма второго рода (10) можно вычислить явно:

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \xi\left(1 - \dfrac{x}{\ell}\right), & \text{при } 0 \le \xi \le x, \\ x\left(1 - \dfrac{\xi}{\ell}\right), & \text{при } \xi \ge x. \end{cases} \qquad (11)$$

Положим далее $\Phi(0)=A$, $\Phi(l)=0$, т.е. будем считать, что на входе в распределенную трубу колебания имеют амплитуду A, а на выходе колебательный процесс за счет диссипации энергии прекратился. Тогда $U(x) = \dfrac{A}{\ell}(\ell - x)$, $F' = a^2\lambda U$,

$$J(x) = \frac{1}{a^2}\int_0^\ell G(x,\xi)F'(\xi)d\xi = \frac{A\lambda}{6\ell}x\left(x^2 - 3x\ell + 2\ell^2\right).$$

Мы далее воспользуемся теоремой Гильберта-Шмидта [5]: пусть интегральное уравнение Фредгольма второго рода:

$$\varphi(x) - \lambda\int_0^\ell G(x,\xi)\varphi(\xi)d\xi = f(x),$$

имеет непрерывную правую часть $f(x)$ и непрерывное ограниченное симметричное ядро $G(x,\xi)=G(\xi, x)$, тогда справедливо разложение:

$$\varphi(x) = f(x) - \lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\lambda - \lambda_n}\varphi_n(x),$$

де $a_n = \displaystyle\int_0^\ell f(x)\varphi_n(x)dx$, λ_n – собственные числа, $\varphi_n(x)$ – соответствующие им ортонормированные в пространстве $L_2(0,l)$ собственные функции однородного уравнения:

$$\varphi(x) - \lambda\int_0^\ell G(x,\xi)\varphi(\xi)d\xi = 0.$$

В случае нашего ядра $G(x,\xi)$ определяемого выражением (11), можно показать, что [5]:

$\lambda_n = \dfrac{\pi^2 n^2}{\ell^2}$, $\varphi_n(x) = \sin\left(\dfrac{\pi n x}{\ell}\right)$. Поэтому для функции $\upsilon`(x)$ получаем представление:

$$\upsilon'(x) = J(x) - \lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\lambda - \lambda_n}\varphi_n(x), \qquad (12)$$

где:

$$\lambda = \frac{\omega^2}{a^2}\left(1 + i\frac{b}{\omega}\right),$$

$$a_n = \int_0^\ell J(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{\ell}\right)dx = \lambda A \frac{\ell^3}{\pi^3 n^3}.$$

Таким образом:

$$\upsilon'(x) = \frac{A\lambda x}{6\ell}\left(x^2 - 3x\ell + 2\ell^2\right) - \frac{\lambda^2 A \ell^3}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^3\left(\lambda - \frac{\pi^2 n^2}{\ell^2}\right)}\sin\left(\frac{\pi n x}{\ell}\right),$$

откуда:

$$\upsilon(x) = \frac{A}{\ell}(\ell - x) + \frac{A\lambda x}{6\ell}\left(x^2 - 3x\ell + 2\ell^2\right) - \frac{\lambda^2 A \ell^3}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^3\left(\lambda - \frac{\pi^2 n^2}{\ell^2}\right)}\sin\left(\frac{\pi n x}{\ell}\right). \quad (13)$$

Для решения $Q(x,t)$ необходимо согласно (5) найти

$$\mathrm{Re}\left[\upsilon(x)\exp(i\omega t)\right] = \upsilon_1(x)\cos(\omega t) - \upsilon_2(x)\sin(\omega t),$$

где $\upsilon = \upsilon_1 + i\upsilon_2$.

Положим $\beta(x) = \frac{x}{6\ell}\left(x^2 - 3x\ell + 2\ell^2\right)$, $\tilde\lambda_1 = \frac{\omega^2}{a^2}$, $\tilde\lambda_2 = \frac{\omega b}{a^2}$,

тогда $\lambda = \tilde\lambda_1 + i\tilde\lambda_2$,

$$\frac{\lambda}{\lambda - \lambda_n} = \frac{\tilde\lambda_1\left(\tilde\lambda_1 - \lambda_n\right) - \tilde\lambda_2^2}{\left(\tilde\lambda_1 - \lambda_n\right)^2 + \tilde\lambda_2^2} + i\frac{\tilde\lambda_2\left(\tilde\lambda_1 - \lambda_n\right) - \tilde\lambda_1\tilde\lambda_2}{\left(\tilde\lambda_1 - \lambda_n\right)^2 + \tilde\lambda_2^2} \equiv \nu_{1,n} + i\nu_{2,n},$$

$$\upsilon'(x) = \frac{A\lambda x}{6\ell}\left(x^2 - 3x\ell + 2\ell^2\right) - \frac{\lambda^2 A\ell^3}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^3\left(\lambda - \frac{\pi^2 n^2}{\ell^2}\right)}\sin\left(\frac{\pi n x}{\ell}\right) = A\left(\tilde\lambda_1 + i\tilde\lambda_2\right)\cdot\left[\beta(x) - \frac{\ell^3}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(x)}{n^3}\left(\nu_{1,n} + i\nu_{2,n}\right)\right],$$

откуда:

$$\upsilon_1(x) = \frac{A}{\ell}(\ell - x) + A\tilde\lambda_1\left[\beta(x) - \frac{\ell^3}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\nu_{1,n}}{n^3}\varphi_n(x)\right] + A\tilde\lambda_2\frac{\ell^3}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\nu_{2,n}}{n^3}\varphi_n(x), \quad (14)$$

$$\upsilon_2(x) = A\tilde\lambda_2\left[\beta(x) - \frac{\ell^3}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\nu_{1,n}}{n^3}\varphi_n(x)\right] - A\tilde\lambda_1\frac{\ell^3}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\nu_{2,n}}{n^3}\varphi_n(x). \quad (15)$$

Таким образом, подставляя формулы (14) и (15) в (5) получаем окончательное выражение для решения

$$Q(x,t) = \upsilon_1(x)\cos(\omega t) - \upsilon_2(x)\sin(\omega t).$$

Выводы

Аналитически получены решения телеграфного уравнения, определяющие установившиеся термоакустические колебания в вертикальной трубе с теплоподводом в нижней ее части, рассматриваемой как дискретно-распределенную динамическую систему.

Показано, что в случае, когда стационарный режим находится в области восходящей ветви $dH/dQ>0$ напорной характеристики теплоподвода $H(Q)$, то колебания в распределенном контуре нарастают по амплитуде, а при $dH/dQ<0$ убывают.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гоцуленко В.В.* Управление автоколебаниями колеблющегося пламени при одновременном действии механизмов их возбуждения / В. В. Гоцуленко, Б.И. Басок // Промышленная теплотехника. − 2009. − Т. 31, № 3. − С. 101−107.

2. *Гоцуленко В.В.* Самовозбуждающиеся автоколебания в вертикальных трубах, включающих элемент с распределенными параметрами, при конвективном теплоподводе / В.В. Гоцуленко / Металургія (Наукові праці ЗДІА). – Запоріжжя: РВВ ЗДІА, 2009. – Вип. 20. – С. 91 – 97.

3. *Гоцуленко В.В.* Автоколебания в вертикальной трубе, обусловленные конвективным теплообменом / В.В. Гоцуленко // Вісник двигунобудування. – 2009. – № 2. – С. 15 – 17.

4. *Положий Г.Н.* Уравнения математической физики / Положий Г. Н. – М.: Высшая школа, 1964. – 559 с.

5. *Цлаф Л.Я.* Вариационное исчисление и интегральные уравнения / Цлаф Л.Я. – М.: Наука, 1970. – 191 с.

Получено 09.12.2009 г.