УДК 536.25

Фиалко Н.М., Блинов Д.Г., Прокопов В.Г., Шеренковский Ю.В., Юрчук В.Л., Сариогло А.Г.

Институт технической теплофизики НАН Украины

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ И ИДЕНТИФИКАЦИИ НА ОСНОВЕ МАЛОМОДОВОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ПРОЦЕССОВ ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ

Розглянуто питання побудови маломодових моделей для задач вільної конвекції. Показана ефективність та перспективність застосування методу поліаргументних систем та методу декомпозиції по ортогональним власним функціям для вирішення задач ідентифікації та управління.

Рассмотрены вопросы построения маломодовых моделей для задач естественной конвекции. Показана эффективность и перспективность применения методов полиаргументных систем и ортогональной декомпозиции для решения задач идентификации и управления.

The issues of low-dimensional models construction for natural convection problems are discussed. It is shown effectiveness and perspective applying the method of polyargumental systems and method of proper orthogonal decomposition for inverse and control problems .

a – коэффициент температуропроводности жидкости,
g – ускорение силы тяжести,
l – длина зоны теплоподвода,
L – размер полости,
p – давление,
q – плотность подводимого теплового потока,
T – температура,
u, v – компоненты вектора скорости,
x, y – координаты,
X, Y – безразмерные координаты,
β – коэффициент объемного расширения,
ε – безразмерная длина зоны теплоподвода,
λ – теплопроводность,
ν – кинематическая вязкость,
θ – безразмерная температура,
ρ – плотность жидкости,
POD – метод ортогональной декомпозиции (proper orthogonal decomposition),
Pr – число Прандтля,
Ra – число Релея,
ММ – маломодовая модель,
МПС – метод полиаргументных систем.

Индексы верхние:

* – размерный.

Индексы нижние:

ст – стенки.

Решение задач управления и идентификации, основанное на многократно решаемых «полных» моделях, представляет значительные трудности даже при современном уровне вычислительной техники. Так, время численного решения может на порядки превышать время протекания собственно физического процесса, что создает непреодолимые трудности при решении задачи регулирования работы устройства в реальном режиме времени [1].

Один из эффективных путей уменьшения ресурсоемкости решаемых задач состоит в замене громоздких «полных» управляющих уравнений приближенной постановкой, адекватно описывающей изучаемый объект. Такой цели служит формулировка маломодовой модели (ММ) изучаемой задачи. Эффективными методами построения ММ являются метод полиаргументных систем (МПС) [2] и метод ортогональной декомпозиции (POD) [3].

В настоящей работе рассмотрена задача естественной конвекции в замкнутой полости. Такого рода задачи часто встречаются в различных приложениях – строительной теплофизике, задачах охлаждения радиоэлектронных устройств, системах солнечного нагрева, пищевой промышленности и т.д. Простейшим примером (своего рода модельной постановкой) может служить задача конвекции в прямоугольной полости с боковым теплоподводом (рис. 1), описываемая следующей системой уравнений в приближении Буссинеска

$$u\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+v\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mathrm{Pr}\cdot\nabla^2 u,$$

$$u\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+v\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial y}+\mathrm{Pr}\cdot\nabla^2 v+\mathrm{Ra}\cdot\mathrm{Pr}\cdot\Theta,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0, \tag{1}$$

$$u\cdot\frac{\partial\theta}{\partial x}+v\cdot\frac{\partial\theta}{\partial y}=\nabla^2\Theta,$$

где x, y безразмерные координаты: $x = x^*/L$, $y = y^*/L$, $u=\dfrac{u^*}{a/L}$, $\nu=\dfrac{v^*}{a/L}$, $p=\dfrac{L^2}{\rho\cdot a^2}p^*$,

$\Theta=\dfrac{T^*-T_{\text{ст}}}{\Delta T}$, $\Delta T=\dfrac{q\cdot L}{\lambda}$, $\mathrm{Pr}=\dfrac{\nu}{a}$, $\mathrm{Ra}=\dfrac{g\beta L^3\Delta T}{\nu a}$,

$\varepsilon=\dfrac{l}{L}$, $h=\dfrac{L-l}{2}$,

при следующих граничных условиях

$\dfrac{\partial\Theta}{\partial y}=0$, $u = v = 0$ при $y = 0$, $0 \le x \le 1$;
$y = 1$, $0 \le x \le 1$;

$\Theta = 0$, $u = v = 0$ при $0 \le y \le 1$, $x = 1$;

$u = v = 0$ при $0 \le y \le 1$, $x = 0$;

$\dfrac{\partial\Theta}{\partial x}=0$ при $0 \le y \le (1-\varepsilon)/2$, $(1+\varepsilon)/2 \le y \le 1$, $x = 0$;

$\dfrac{\partial\Theta}{\partial x}=-1$ при $(1-\varepsilon)/2 < y < (1+\varepsilon)/2$, $x = 0$.

Параметрами задачи выберем величины ε, Ra, характеризующие размер и мощность теплоподвода.

Моделирование этой задачи с помощью стандартных вычислительных программ в принципе не составляет труда. Однако уже решение задачи идентификации или задачи управления наталкивается на необходимость многократного решения прямой постановки (системы Буссинеска), двойственной постановки для сопряженной функции и проведения оптимизации целевого функционала плохо обусловленного в пространстве

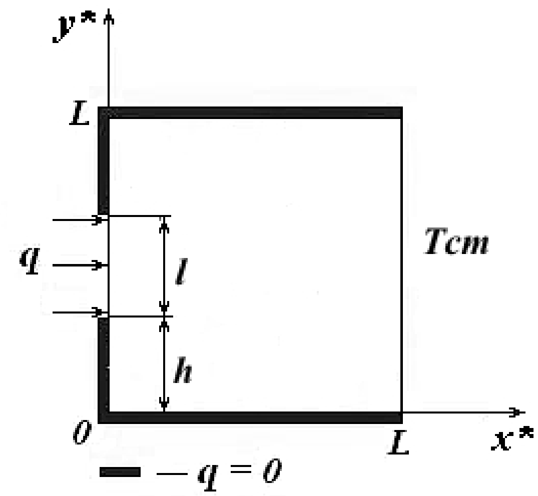

Рис. 1. К постановке задачи.

задачи. Для решения таких задач (ввиду их некорректности) применяют различные алгоритмы регуляризации. Один из таких алгоритмов, так называемой естественной регуляризации, состоит в рассмотрении обратной задачи (или задачи управления) в пространстве функций, в которых эта задача не является плохо обусловленной. Составление маломодовой модели с меньшим числом свободных параметров является также шагом в этом направлении.

В качестве базового метода составления ММ выберем метод POD [3] в параметрической постановке. Первым шагом этого метода является составление так называемого набора «снепшотов» (от англ. snapshot – моментальный снимок) $\{u,v\}$, $\{\Theta\}$ – набора скоростных и температурных полей, полученных при различных значениях параметров задачи (в данном случае ε, Ra). Для этого приведенная ранее постановка была решена в диапазоне чисел Релея $10^3 < \mathrm{Ra} < 10^6$ и разных размерах зоны теплоподвода $0 < \varepsilon < 1$ – всего 200 вариантов. Качественное сходство гидродинамических и тепловых полей при различных значениях параметров позволило надеяться на возможность выявления базисных функций, описывающих характер температурных полей во всем рассматриваемом диапазоне.

Представим анализируемые поля в виде разложения по пространственным базисам:

$$\mathbf{U} = \sum_i a_i(\varepsilon, \mathrm{Ra})\mathbf{F}_i(\mathrm{x,y}),\ \Theta = \sum_i b_i(\varepsilon, \mathrm{Ra})\varphi_i(\mathrm{x,y}),\ (2)$$

где $\mathbf{U}$, $\mathbf{F}_i$ – векторы скорости и базисных функций для компонентов скорости соответственно, Θ, φ_i – температура и базисные функции для нее.

Для определения $\mathbf{F}_i(x,y)$, $\varphi_i(x,y)$ в методе POD надо решить интегральное уравнение на собственные функции [3]. В более простой формулировке Сировича учитывается тот факт, что в силу вырожденности ядра интегрального уравнения искомую собственную функцию представляют в виде разложения по наборам «снепшотов» [4]:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_i(x,y) &= \sum_{k=1}^{N} a_{i,k}(\varepsilon_k, \mathrm{Ra}_k)\mathbf{U}_k(x,y),\\ \varphi_i(x,y) &= \sum_{k=1}^{N} b_{i,k}(\varepsilon_k, \mathrm{Ra}_k)\Theta_k(x,y).\end{aligned} \qquad (3)$$

Подставив эти разложения в основное интегральное уравнение метода POD получим алгебраическую задачу на собственные вектора матрицы вида $\mathbf{C}b_i = \lambda_i \cdot b_i$, где $b_k = \left\{b_{i,k}\right\}_{i=1}^{i=N}$ – k-тый собственный вектор матрицы. Здесь $C_{k,i} = \frac{1}{N}\iint \mathbf{U}_k \cdot \mathbf{U}_i dxdy$ для скоростного поля и $C_{k,i} = \frac{1}{N}\iint \Theta_k \cdot \Theta_i dxdy$ для температурного поля (N – число снепшотов).

Для определения зависимости амплитудных коэффициентов от параметров выписываются следующие соотношения:

$$a_k = \iint \mathbf{U} \cdot \mathbf{F}_k dxdy,\ b_k = \iint \Theta \cdot \varphi_k dxdy. \qquad (4)$$

Проведенные по описанной методологии расчеты показали, что использование уже четырех членов в приближении (2) обеспечивает среднеквадратичную погрешность порядка 1 % (рис. 2). Можно сказать, что для представления всей картины движения и теплообмена (включая структуру вихревых образований и особенности погранслоя) в проанализированном диапазоне параметров достаточно четырех пространственных и амплитудных функций вместо 200 исходных полей.

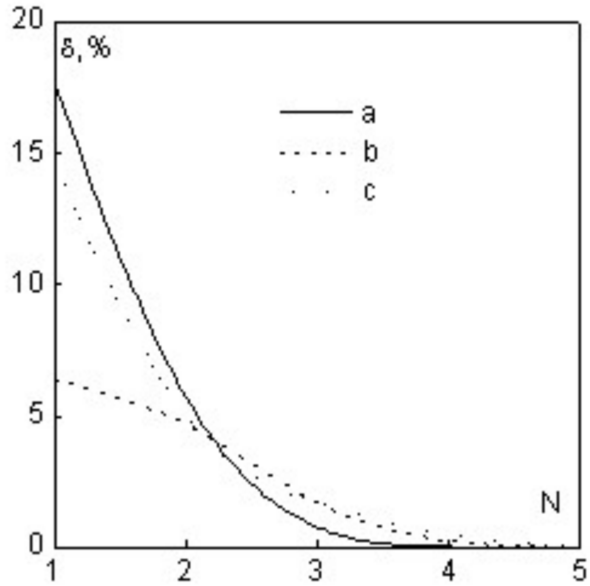

Рис. 2. Зависимость среднеквадратичной погрешности δ в % от числа членов N в ММ для различных Ra: a – Ra = 10^3, b – Ra = 10^5, c – Ra =10^6.

Фактически первый этап анализа состоял в решении задачи аппроксимации. Для получения ММ справедливой при значениях параметров (ε, Ra), отличающихся от «реперных» (т.е. тех значений, при которых были получены снепшоты), возможны несколько путей. Наиболее простой и алгоритмически и вычислительно метод интерполяционного POD. В этом методе для анализа в промежуточных точках (по ε, Ra) проводят интерполяцию коэффициентов, a(ε, Ra), b(ε, Ra) и затем пересчет ряда (2) с новыми значениями амплитуд и теми же пространственными функциями. Такой метод можно назвать методом физической интерполяции, т.к. пересчет полевых величин происходит путем предварительного выделения главных пространственных особенностей полей, описывающих задачу. Более трудоемкий (и в общем случае более корректный) подход заключается в использовании метода Галеркина для проецирования исходной системы уравнений (системы Буссинеска) на построенный при аппроксимации пространственный базис. В данном приложении ограничимся первым подходом.

Перейдем к решению задач управления и идентификации для рассматриваемой ситуации. Один из возможных вариантов обратной задачи (задачи идентификации) формулируется следующим образом. Пусть задано температурное поле в исследуемой области (рис. 1) $t_z(x_i, y_i)$; необходимо восстановить подводимый к ее боковой грани тепловой поток q, т.е., в безразмерных переменных, определить значение параметра Ra, при котором было получено это поле. Целевой функцией, характеризующей отклонение поля от заданного, является функционал

$$J = \sum_{i=1}^{K} [\Theta(x_i, y_i) - t_z(x_i, y_i)]^2 \to \min, \qquad (5)$$

где x_i, y_i – точки, в которых задано температурное поле t_z (например, измеренное в эксперименте), K – число точек.

Фактически к такому же виду целевого функционала можно привести и задачу управления, заключающуюся в определении теплового потока, при котором температура в заданной точке не превышает некоторого значения $t_{z,\max}$.

Целевая функция (5), переписанная в терминах базисных функций имеет вид

$$J = \sum_{m=1}^{K} \left[\sum_{i=1}^{M} b_i \cdot \varphi(x_m, y_m) - t_{z,\max}(x_m, y_m) \right]^2 \to \min. \qquad (6)$$

Таким образом, задачи идентификации и управления, построенные на ММ, свелись к достаточно простой проблеме конечномерной оптимизации, в отличие от полной постановки, представляющей собой систему уравнений в частных производных (прямой и двойственной формулировки), которую необходимо многократно решить в процессе минимизации функционала.

В качестве примера рассматривается задача восстановления мощности теплоподвода. Рис. 3 иллюстрирует изменение погрешности восстановления в зависимости от числа членов в модели. Как видно, достаточно уже пяти членов ряда в модели (2) для обеспечения погрешности восстановления в 1 %. Показательным является также сравнение времени решения задачи на основе ММ и «полных» уравнений Буссинеска. Оценки показывают, что время счета сокращается в 50…100 раз.

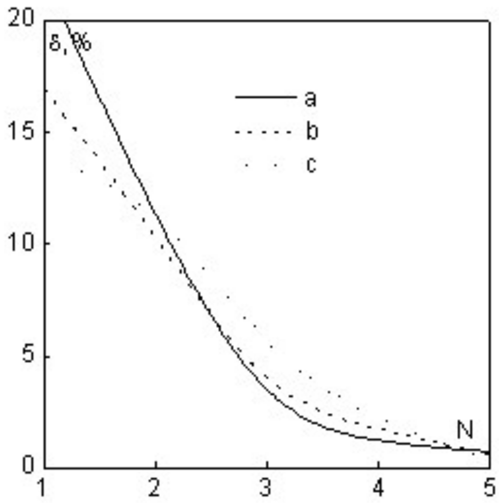

Рис. 3. Зависимость среднеквадратичной погрешности восстановления* δ *в % от числа членов N для различных* Ra*:
a* – Ra *=* $1{,}2\cdot10^3$*, b* – Ra *=* $9\cdot10^4$*, c* – Ra *=* $4{,}5\cdot10^5$*.

Выводы

Результаты, приведенные в статье, свидетельствуют о том, что использование ММ позволяет эффективно решать задачи идентификации и управления, возникающие при изучении процесса естественной конвекции.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Моисеев Н.Н.* Математические задачи системного анализа. – М.: Наука, 1981. – 488 с.
2. *Прокопов В.Г., Беспалова Е.И., Шеренковский Ю.В.* Метод разделения переменных Фурье и методы полных систем для решения многомерных задач теплофизики // Пром. теплотехника. – 1981. – Т. 3, № 3. – С. 57-63.
3. *Berkooz G., Holmes P., Lumley J.L.* The proper orthogonal decomposition in the analysis of turbulent flow // Annu. Rev. Fluid Mech. 1993. – T. 25. – С. 539-575.
4. *Sirovich L., Rodriguez J.D.* Coherence structures and chaos: a model problem // Physics Letters A. 1987. – V. 120, № 5. – P. 211.

Получено 10.06.2010 г.