

УДК 536.25

Фиалко Н.М., Блинов Д.Г., Прокопов В.Г., Шеренковский Ю.В., Юрчук В.Л., Саригло А.Г.*Институт технической теплофизики НАН Украины***ПОСТРОЕНИЕ МАЛОМОДОВЫХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ЗАДАЧ ЕСТЕСТВЕННОЙ
КОНВЕКЦИИ С ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ВРЕМЕНИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ**

Розглянуті питання побудови маломодових моделей для задач вільної конвекції з граничними умовами, що залежать від часової змінної. Показана ефективність та перспективність застосування методу поліаргументних систем та методу декомпозиції по ортогональним власним функціям для вирішення задач, що розглядаються в роботі.

Обсуждены вопросы построения маломодовых моделей для задач естественной конвекции с зависящими от времени граничными условиями. Показана эффективность и перспективность применения методов полиаргументных систем и ортогональной декомпозиции для решения рассматриваемого класса задач.

The issues of construction of low-dimensional models for natural convection problems with time-dependent boundary conditions are discussed. It is shown effectiveness and perspective applying the method of polyargumental systems and method of proper orthogonal decomposition for transient natural convection problems.

a – коэффициент температуропроводности жидкости;
 g – ускорение свободного падения;
 l – длина зоны теплоподвода;
 L – размер полости;
 p – давление;
 Pr – число Прандтля;
 q – плотность подводимого теплового потока;
 Ra – число Рэлея;
 T – температура;
 u, v – компоненты вектора скорости;
 x, y – координаты;
 X, Y – безразмерные координаты;
 β – коэффициент объемного расширения;

ε – безразмерная длина зоны теплоподвода;
 λ – теплопроводность;
 θ – безразмерная температура;
 ν – кинематическая вязкость;
 ρ – плотность жидкости;
 τ – безразмерное время;
 POD – метод ортогональной декомпозиции (proper orthogonal decomposition);
 ММ – маломодовая модель;
 МПС – метод полиаргументных систем.

Индексы верхние:

* – размерный.

Индексы нижние:

ст – стенки.

Корректный анализ реальных технических объектов требует совместного рассмотрения ряда различных по природе процессов, принципиально отличающихся своей математической формулировкой. Согласование этих процессов на основе полных моделей (чаще всего представляющих собой системы нелинейных уравнений в частных производных) представляет значительные трудности с вычислительной точки зрения. Еще более важной возникающей при этом проблемой является трудность системного рассмотрения анализируемого устройства в целом. Традиционным подходом

решения таких проблем является рассмотрение процессов, протекающих в элементах устройств, на основе упрощенных моделей с меньшим числом степеней свободы. Фактически все модели инженерной физики служат этим целям. Можно сказать, что модель низкой размерности является связующим звеном между системным и физическим уровнем рассмотрения устройства.

Учитывая вышесказанное, составление маломодовых моделей (ММ) для технических устройств и их элементов представляет собой актуальную прикладную задачу. В данной

работе рассмотрен один из современных подходов к составлению моделей малой размерности, опирающийся на процедуру Кархунена-Лоева (методы POD [1] и МПС [2]), состоящую в выделении главных пространственно-временных особенностей анализируемого устройства и процессов в нем.

В настоящей работе рассматривается построение ММ для процесса естественной конвекции в замкнутой полости с боковым теплоподводом, зависящим от времени. Такого рода задачи часто встречаются в различных областях техники (радиоэлектроника, строительная теплофизика и пр.). Модельной постановкой может служить задача конвекции в квадратной полости с боковым теплоподводом (рис. 1), описываемая следующей системой уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \tau} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \text{Pr} \cdot \nabla^2 u, \\ \frac{\partial v}{\partial \tau} + u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \text{Pr} \cdot \nabla^2 v + \text{Ra} \cdot \text{Pr} \cdot \theta, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + u \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \nabla^2 \theta, \end{aligned} \quad (1)$$

где x, y, τ – безразмерные координаты и время соответственно: $x = x^*/L, y = y^*/L, \tau = a \cdot \tau^*/L^2$,

$$u = \frac{u^*}{a/L}, v = \frac{v^*}{a/L}, p = \frac{L^2}{\rho \cdot a^2} p^*, \theta = \frac{T^* - T_{\text{ст}}}{\Delta T},$$

$$\Delta T = \frac{q \cdot L}{\lambda}, \text{Pr} = \frac{\nu}{a}, \text{Ra} = \frac{g \beta L^3 \Delta T}{\nu a}, \varepsilon = \frac{l}{L}, h = \frac{L-l}{2},$$

при следующих граничных условиях

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = 0, u = v = 0 \text{ при } y = 0, 0 \leq x \leq 1; y = 1, 0 \leq x \leq 1$$

$$\theta = 0, u = v = 0 \text{ при } 0 \leq y \leq 1, x = 1,$$

$$u = v = 0 \text{ при } 0 \leq y \leq 1, x = 0,$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \text{ при } 0 \leq y \leq (1-\varepsilon)/2, (1+\varepsilon)/2 \leq y \leq 1, x = 0$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -(1 + \sin(2\pi\tau)) \text{ при } (1-\varepsilon)/2 < y < (1+\varepsilon)/2, x = 0$$

и начальном

$\theta = 0, u = v = 0$ при $0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 1, \tau = 0$.

Несколько слов собственно о методе POD. В зависимости от области применения этот метод обработки данных известен под различными наименованиями – метод главных компонентов, метод сингулярного разложения, преобразование Хотеллинга (Hotelling transform), Кархунена-Лоева (Karhunen–Loeve decomposition). По своей сути это статистический метод второго порядка, позволяющий выявить доминирующую структуру в бесконечном пространстве исследуемого процесса с помощью ограниченного числа мод.

В отличие от таких широко известных методов как метод Фурье или вейвлетов этот метод не требует предварительной информации об изучаемых процессах, а целиком основан на имеющихся данных. Несмотря на линейность формы представления, основываясь на данных, которые моделировали нелинейную постановку, он автоматически включает нелинейные эффекты. В силу специфики построения базиса метод POD можно назвать эмпирическим спектральным анализом, в результате которого осуществляется декомпозиция по ортогональным базисным функциям и согласованным с ними ортогональным (некоррелированным) амплитудным коэффициентам, что позволяет говорить о членах такой аппроксимации как о невзаимодействующих в среднем модах (но это не означает отсутствие взаимодействия

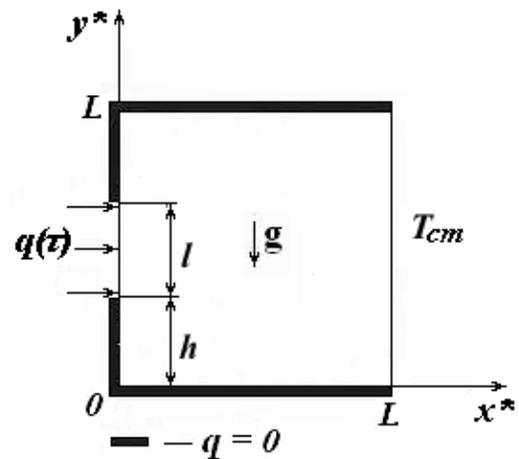


Рис. 1. К постановке задачи.

локально во времени). В отличие от традиционных подходов полученный эмпирический базис является не априорным, а индивидуальным для данной задачи.

В основе POD лежит процедура Кархунена-Лоева [3], состоящая в нахождении по имеющемуся набору полей (случайных или детерминированных) особых базисных функций, наиболее точно отражающих исследуемые данные. Первым шагом этого метода является составление так называемого набора «снэпшотов» (от англ. snapshot – моментальный снимок), в данном случае набора температурных и скоростных полей в различные моменты времени. Далее, как следует из теории метода POD [1], наиболее типичные или характерные структуры среди всего набора «снэпшотов» можно найти, решая проблему собственных функций следующего интегрального уравнения

$$\int_{\Omega} K(x, y, x', y') \cdot \varphi(x', y') \cdot dx' dy' = \lambda \varphi(x, y), \quad (2)$$

где $K(x, y, x', y')$ – ядро интегрального уравнения, определяемое как $K(x, y, x', y') = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \theta_i(x, y) \cdot \theta_i(x', y')$, θ_i – поле температур в момент времени i (для краткости приводим выкладки только для температурного поля), M – число «снэпшотов» по температурным полям. Учитывая вырожденность ядра, собственная функция φ_k может быть определена путем разложения по «снэпшотам» θ_i :

$\varphi_k(x, y) = \sum_{i=1}^M a_{i,k} \theta_i(x, y)$. Подставив это соотношение в (2), получим алгебраическую задачу на собственные вектора:

$$C \cdot a_i = \lambda_i \cdot a_i, \text{ где } a_k = \{a_{ik}\}_{i=1}^M - k\text{-тый собственный вектор матрицы } C_{k,i} = \frac{1}{N} \iint \theta_k \cdot \theta_i dx dy.$$

Матрица C по построению симметричная и положительно определенная. Ввиду этого $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq 0$, $\lim_{i \rightarrow \infty} \lambda_i = 0$. Наибольшему собственному числу соответствует наиболее типичная структура в анализируемом наборе «снэпшотов». Так как ядро интегрального уравнения симметричное, найденные собственные

функции являются взаимно ортогональными.

Используя собственные функции в качестве базисных в методе Галеркина, получим маломодовую систему (или ММ), представляющую исходную задачу (систему полных уравнений) минимальным числом степеней свобод.

Для рассматриваемой задачи ММ имеет вид

$$u_N = \sum_{i=1}^N a_i(\tau) \mathbf{F}_i(x, y), \quad \theta_M = \sum_{i=1}^M b_i(\tau) \varphi_i(x, y), \quad (3)$$

$$\frac{d\mathbf{a}}{d\tau} = \mathbf{a}^T A1 \mathbf{a} + A2 \mathbf{a} + A3 \mathbf{b}, \quad \mathbf{a}(0) = 0, \mathbf{b}(0) = 0, \quad (4)$$

$$\frac{d\mathbf{b}}{d\tau} = \mathbf{b}^T B1 \mathbf{a} + B2 \mathbf{b} + \mathbf{s},$$

$$A1_{ip} = -(\mathbf{F}_i \times \nabla \mathbf{F}_j, \mathbf{F}_p), \quad B1_{km} = -(\mathbf{F}_i \times \nabla \varphi_k, \varphi_m),$$

$$A2_{ip} = -\text{Pr} \cdot (\nabla \mathbf{F}_i, \nabla \mathbf{F}_p), \quad B2_{km} = -(\nabla \varphi_k, \nabla \varphi_m),$$

$$A3_{kp} = \text{Pr} \cdot (\mathbf{R}a \cdot \varphi_k, \mathbf{F}_p), \quad s_m = \int_0^L q(\tau, y) \cdot \varphi_m(0, y) dy.$$

Первым этапом построения такой системы является определение базисных функций φ и \mathbf{F} . Для этого поставленная задача (1) была решена при нескольких вариантах временной зависимости бокового теплоподвода $q(\tau)$: постоянной, синусоидальной и экспоненциальной. Безразмерное время изменялось в пределах $0 \leq \tau \leq 2$. Всего было «снято» 300 «снэпшотов» (по 100 для каждого варианта) при следующих значениях безразмерных параметров $\text{Pr} = 0,72$, $\text{Ra} = 5 \cdot 10^4$, $\varepsilon = 0.4$.

После обработки набора «снэпшотов» по описанной методологии получены базисные функции. Расчеты показали, что уже 10 членов в приближении (3) ($M = N = 10$) обеспечивают среднеквадратичную погрешность аппроксимации порядка 1 % (рис. 2). При этом необходимо отметить, что погрешность уменьшается по мере увеличения времени. Это по-видимому связано с более сложной структурой решения в начальные моменты времени (типа пограничного слоя).

Отмеченная быстрая сходимость аппроксимирующих рядов и связанная с этим информационная емкость найденных базисных функций обусловила и высокую эффективность

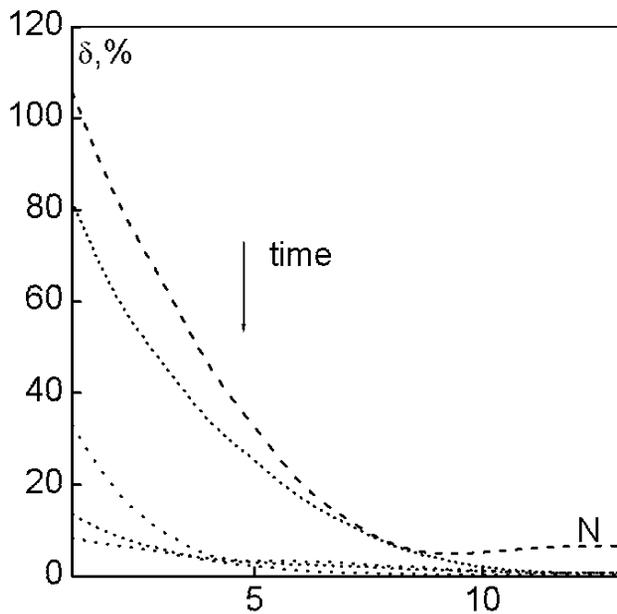
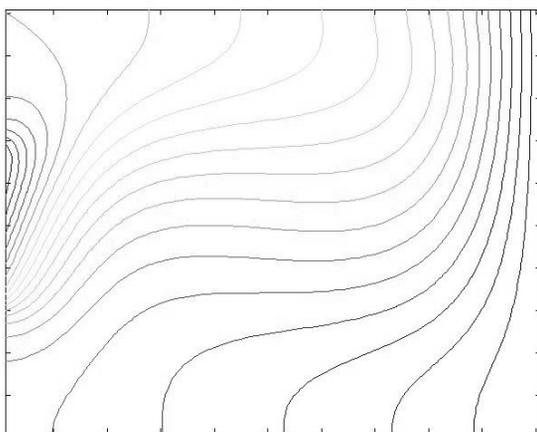


Рис. 2. Зависимость среднеквадратичной погрешности δ в % от числа членов N для различных моментов времени.

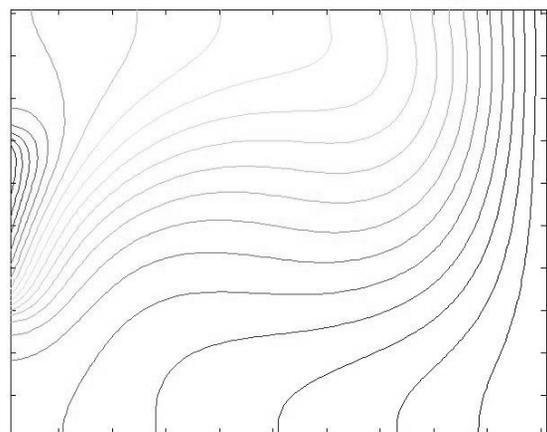
маломодовой модели (4). Проведенные по ней расчеты показали, что, например, для условий $Ra = 5 \cdot 10^4$ при $M = N$ локальная погрешность в определении максимальной температуры системы уже при $N = 9$ составляет 2,4 %, а при $N = 12$ – 1,0 %; погрешности в определении

максимальной скорости составляет при этом 1,8 % и 0,6 % соответственно.

Основной рабочей гипотезой изложенного подхода является предположение о возможности и эффективности использования модели, которая была построена на основе эмпирического базиса, найденного при каком-либо одном наборе режимных и управляющих параметров, для широкого диапазона этих параметров. Проведенные исследования подтвердили справедливость указанного предположения. В частности, расчеты, выполненные по маломодовой модели при различных значениях параметра Ra , отличающихся в 2...10 раза от номинального значения, при котором определялись базисные функции, показали хорошее согласование с точным решением соответствующих задач. Так, погрешность в определении максимальных температур и скорости при расчетах для $Ra = 5 \cdot 10^5$, проведенных на основе базиса, найденного для $Ra = 5 \cdot 10^4$, уже при $N = 12$ составляла соответственно 1,8 и 2,1 %. Соответствие температурных полей, рассчитанных при этих условиях по маломодовой модели (3) и полной модели (1) иллюстрирует рис. 3. Варьирование характера временной зависимости теплоподвода также не ухудшает возможности модели.



а)



б)

Рис. 3. Сопоставление температурных полей, полученных на основе полной (а) и маломодовой (б) моделей.

Выводы

Проведенное в работе исследование продемонстрировало эффективность и перспективность изложенного подхода к построению маломодовой модели для процесса естественной конвекции с зависящими от времени граничными условиями.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Park H.M., D.H. Cho D.H.* Low dimensional modeling of flow reactors // Int. J. Heat Mass

Trans. – 1996. – V 39, – С. 3311-3323.

2. *Прокопов В.Г., Беспалова Е.И., Шеренковский Ю.В.* Применение методов полиаргументных систем для решения нелинейных многомерных задач теплопереноса // Известия ВУЗов, «Энергетика». – 1986. – № 3, – С. 84 – 89.

3. *Lumley J.L.* Atmospheric Turbulence and Radio Wave Propagation.– М.: Nauka, – 1967. – 166 с.

Получено 26.04.2011 г.