

УДК 662.61; 532.517.4; 533.6.013.4

Авраменко А.А., Басок Б.И., Новицкая М.П., Алексеенко В.В., Демченко В.Г., Блинов Д.Г.

Институт технической теплофизики НАН Украины

## НЕСТАЦИОНАРНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ЗАКРУЧЕННОГО ПОТОКА С УЧЕТОМ ПРОЦЕССОВ ГОРЕНИЯ

Розглянуто декілька моделей, що описують нестійкість у процесах горіння з закрученими потоками. Проведено порівняння теоретичних профілей швидкості з експериментальними даними. Отримано аналітичний вираз для залежності частоти нестационарної тривимірної когерентної структури, що виникає за закручуючими пристроями з тангенціальним підводом потоку. Ця структура істотно впливає на стійкість факелу, інтенсивність процесу горіння, та інші характеристики факелу.

Рассмотрено ряд моделей для описания неустойчивости в процессах горения с закрученными потоками. Проведено сравнение полученных теоретических профилей скоростей с экспериментальными данными. Получено аналитическое выражение для частоты нестационарной трехмерной когерентной структуры, возникающей за закручивающими устройствами с тангенциальным подводом потока. Данная структура существенно влияет на устойчивость факела, интенсивность процесса горения и другие характеристики пламени.

Some models for instability of combustion with swirl flows were discussed. Theoretical velocity profiles were compared with experimental data. Analytic expression for frequency of unsteady three-dimensional coherent structure, which arises in front of swirling devices with tangential supply of flow is obtained. This structure have significant influence on stability of flame, intensity of combustion and another flame characteristics.

$a$  – коэффициент из второго закона Фурье;

$a_v$  – коэффициент пропорциональности из закона вязкости;

$A_{wc}, A_{vc}, A_{vv}, A_{wv}, B_{vc}, B_{wc}, B_{vv}, B_{wv}, C_{mn}$  – константы;

$b$  – параметр, влияющий на коэффициент трения;

$c_f$  – коэффициент трения;

$c_p$  – удельная теплоемкость при постоянном давлении;

$D, D^*, D_n$  – линейные операторы;

$Da_i$  – число Дамкёлера для  $i$ -го компонента смеси;

$E_0$  – энергия активации;

$F(x)$  – функция от координаты  $x$ , полученная из вариационного принципа;

$G_e, G$  – параметры, определяющие вязкостные характеристики системы;

$H$  – форм-параметр;

$h$  – высота входного отверстия;

$i$  – мнимая единица;

$j$  – индекс, входящий в функцию Бесселя;

$J_k$  – функция Бесселя первого рода  $k$ -го порядка;

$k$  – волновое число;

$k_B$  – постоянная Больцмана;

$m$  – целочисленный параметр, входящий в Гамма-функцию;

$n$  – целочисленный параметр, входящий в профиль средней невозмущенной тангенциальной скорости;

$P$  – давление;

$R, \bar{R}$  – радиус и нормированный радиус нестационарной трехмерной когерентной структуры;

$r, \bar{r}$  – радиальная координата и нормированная радиальная координата;

$r_c$  – радиус канала;

$\bar{r}_m$  – максимальный нормированный радиус нестационарной когерентной структуры;

$Re, Re_R$  – числа Рейнольдса;

$s_1$  – второй ноль функции Бесселя первого рода  $k$ -го порядка;

$Sh$  – число Струхала;

$T$  – температура;

$t$  – время;

$V, \bar{V}$  – тангенциальная скорость и нормированная тангенциальная скорость;

$V_{in}$  – тангенциальная скорость на входе;

$W, \bar{W}$  – осевая скорость и нормированная осевая скорость;

$W_{mn}$  – среднее значение осевой скорости;  
 $W_0^*$  – отношение невозмущенной осевой скорости к среднему значению осевой скорости;  
 $Y_i$  – массовая доля  $i$ -го компонента смеси;  
 $Y_k$  – функция Бесселя второго рода  $k$ -го порядка;  
 $z$  – осевая координата;  
 $\alpha$  – волновое число;  
 $\alpha^*, \bar{\alpha}$  – величины, пропорциональные  $\alpha$ ;  
 $\beta_i$  – константа;  
 $\Gamma(x)$  – Гамма-функция с аргументом  $x$ ;  
 $\gamma_i$  – параметр, пропорциональный числу Дамкёлера для  $i$ -го компонента смеси;  
 $\delta^*, \delta^{**}$  – толщина вытеснения и толщина потери импульса;  
 $\delta(\bar{r})$  – signum-функция;  
 $\theta$  – угловая координата;

$\lambda$  – коэффициент теплопроводности смеси;  
 $\mu_e, \mu_e$  – эффективная динамическая вязкость и нормированная эффективная динамическая вязкость;  
 $\nu, \nu_e$  – кинематическая вязкость, эффективная кинематическая вязкость и нормированная эффективная кинематическая вязкость;  
 $\xi$  – безразмерный параметр, пропорциональный нормированной радиальной координате;  
 $\rho, \bar{\rho}$  – плотность и нормированная плотность;  
 $\Phi(\bar{r})$  – произвольная функция, удовлетворяющая граничным условиям;  
 $\omega$  – угловая частота.

#### Индексы:

$0$  – невозмущенная величина;  
 $p$  – возмущенная величина;  
 $A$  – максимальное значение.

### Введение

В процессах горения, при наличии закрученных потоков, образование приосевой рециркуляционной зоны при сверхкритических значениях параметра закрутки является одним из наиболее важных факторов, существенно влияющих на стабилизацию факела. Путем усреднения по большому интервалу времени, границу рециркуляционной зоны и зон обратных токов можно определить довольно точно. Мгновенное же положение границ и точек торможения претерпевает значительные колебания в пространстве, поскольку обычно в таких потоках уровень турбулентных сдвиговых напряжений и интенсивности турбулентности очень высок [1].

Наличие обратных потоков играет важную роль в стабилизации пламени, поскольку обеспечивает рециркуляцию горячих продуктов, а также приводит к уменьшению длины факела и уменьшению расстояния от горелки, на котором происходит стабилизация пламени. Размер и форма рециркуляционной зоны и соответствующей области с повышенным уровнем турбулентности оказывает решающее влияние

на устойчивость факела, интенсивность процесса горения и другие характеристики пламени.

В рециркуляционной зоне интенсивность турбулентности достигает очень высокого уровня. На границе обратного течения, где средняя скорость равна нулю, величина локальной интенсивности турбулентности стремится к бесконечности. Измерения всех шести компонент тензора турбулентных напряжений показывают, что распределение кинетической энергии турбулентности сильно неоднородно, а напряжение и соответственно тензор коэффициентов турбулентной вязкости сильно неизотропны. Высокие уровни турбулентности в рециркуляционной зоне объясняют наличием трехмерного нестационарного возмущения закрученного течения.

В ряде работ показано, что течения за закручивающими устройствами с тангенциальным подводом не являются осесимметричными. В настоящее время имеется достаточно данных, показывающих, что после того как происходит распад вихря, центральная часть потока становится неустойчивой и начинает прецессировать вокруг оси симметрии, таким образом возника-

ет трехмерная когерентная структура [2, 3].

### Математическая модель

В данной работе предполагается, что нестационарная когерентная структура, возникающая за закручивающимися устройствами имеет дуальную природу. С одной стороны эту структуру можно рассматривать как трехмерную когерентную структуру, прецессирующую вокруг оси симметрии на постоянном расстоянии  $R$  от этой оси до определенной плоскости ( $z = \text{const}$ ). В то же время, эту же структуру можно рассматривать как группу волн с набором волновых чисел и частот.

Для исследования была выбрана цилиндрическая система координат. В данной работе

было использовано несколько обоснованных приближений: 1) невозмущенные скорости и невозмущенная турбулентная вязкость – величины, зависящие только от радиальной координаты; 2) радиальная составляющая вектора скорости значительно меньше осевой и тангенциальной составляющей вектора скорости.

Компоненты скорости, давление, температура и массовые доли компонентов смеси рассматривались в первом порядке теории возмущений ( $V = V_0 + V_p$ , аналогично для других величин). После линеализации полной системы уравнений Навье-Стокса, учитывая что индекс 'p' соответствует возмущенной компоненте, а индекс '0' – невозмущенной, полученную систему можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial V_p}{\partial \theta} + \frac{\partial W_p}{\partial z} &= 0; \\ \rho \left( \frac{\partial V_p}{\partial t} + \frac{V_0}{r} \frac{\partial V_p}{\partial \theta} + W_0 \frac{\partial V_p}{\partial z} \right) &= -\frac{1}{r} \frac{\partial P_p}{\partial \theta} + \frac{\mu_e}{r^2} \frac{\partial^2 V_p}{\partial \theta^2} + \mu_e D D^* V_p + \mu_e \frac{\partial^2 V_p}{\partial z^2} + D \mu_e \left( D V_p - \frac{V_p}{r} \right); \\ \rho \left( \frac{\partial W_p}{\partial t} + \frac{V_0}{r} \frac{\partial W_p}{\partial \theta} + W_0 \frac{\partial W_p}{\partial z} \right) &= -\frac{1}{r} \frac{\partial P_p}{\partial z} + \mu_e \frac{\partial^2 W_p}{\partial z^2} + \mu_e \left[ D^2 + \frac{1}{r} D \right] W_p + D \mu_e D W_p + \frac{\mu_e}{r^2} \frac{\partial^2 W_p}{\partial \theta^2}; \\ \rho \left( \frac{\partial T_p}{\partial t} + \frac{V_0}{r} \frac{\partial T_p}{\partial \theta} + W_0 \frac{\partial T_p}{\partial z} \right) &= a \left( \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 T_p}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T_p}{\partial z^2} + D^* D T_p \right); \\ \rho \left( \frac{\partial Y_{ip}}{\partial t} + W_0 \cdot \frac{\partial Y_{ip}}{\partial z} + V_0 \cdot D Y_{ip} + Y_{i0} \cdot D V_p \right) &+ \frac{1}{r} \cdot (V_0 \cdot Y_{ip} + V_p \cdot Y_{ip} + V_p \cdot Y_{i0}) = \\ &= \rho \cdot \gamma_i \left( 1 + \frac{E_0}{k_B \cdot T_0} \right) \cdot \left( \frac{\partial^2 Y_{ip}}{\partial z^2} + D^* D Y_{ip} \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $D = \frac{\partial}{\partial r}$ ,  $D^* = D + \frac{1}{r}$ ,  $a = \frac{\lambda}{\rho \cdot c_p}$ ,  $\gamma_i = \beta_i D a_i$ ,  $D a_i$  – число Дамкёлера для  $i$ -го компонента.

Решения системы (1) могут быть представлены как в вещественной форме, так и в комплексной. Для начала рассмотрим решение системы в вещественной форме:

$$\begin{aligned} V_p &= V_A(r) [\cos(k\theta + \alpha z - \omega t) + \sin(k\theta + \alpha z - \omega t)]; \\ W_p &= W_A(r) [\cos(k\theta + \alpha z - \omega t) + \sin(k\theta + \alpha z - \omega t)]; \\ P_p &= P_A(r) [\cos(k\theta + \alpha z - \omega t) + \sin(k\theta + \alpha z - \omega t)]; \\ T_p &= T_A(r) [\cos(k\theta + \alpha z - \omega t) + \sin(k\theta + \alpha z - \omega t)]; \end{aligned}$$

$$Y_{ip} = i_{iA}(r) [\cos(k\theta + \alpha z - \omega t) + \sin(k\theta + \alpha z - \omega t)]. \quad (2)$$

Подставляя выражения (2) в систему (1), и приравнявая коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях в левой и правой части уравнений были получены обыкновенные дифференциальные уравнения. После перехода к безразмерной форме, исключения давления, получено дифференциальное уравнение второго порядка относительно амплитуды возмущенной тангенциальной скорости:

$$D_{\Pi}^2 \bar{V}_A + \left( \frac{D\bar{v}_e}{\bar{v}_e} - \frac{1}{r} \frac{1-\zeta}{1+\zeta} \right) D_{\Pi} \bar{V}_A + \bar{V}_A \left[ \pm \frac{R_0}{\bar{v}_e} - \left( \pm \frac{\text{Re} k \bar{V}_0}{\bar{v}_e r} + \alpha^{*2} + \frac{k^2}{r^2} \pm \frac{\bar{W}_0 \alpha^* \text{Re}}{\bar{v}_e} - \frac{1}{r^2} \frac{1-\zeta}{1+\zeta} + \frac{1}{r} \frac{D\bar{v}_e}{\bar{v}_e} \right) \right] = 0. \quad (3)$$

Здесь  $\text{Re} = \frac{V_m r_c}{\nu}$  – число Рейнольдса,  $\bar{v}_e = \frac{v_e}{v_0}$ ,  $D_{\Pi} = \frac{\partial}{\partial r}$ ,  $\alpha^* = \alpha \cdot R$ .

Полученное уравнение невозможно решить в общем виде аналитически. В работе рассмотрены два частных случая. Предполагая наличие возмущений только в угловом направлении ( $\zeta = 0$ ) имеем  $\bar{V}_0 = \bar{r}$ , в этом случае уравнение (3) можно представить в виде:

$$D_{\Pi}^2 \bar{V}_A + \left( \frac{D\bar{v}_e}{\bar{v}_e} - \frac{1}{r} \right) D_{\Pi} \bar{V}_A + \bar{V}_A \left[ \frac{G}{\bar{v}_e} - \left( \frac{k^2 - 1}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{D\bar{v}_e}{\bar{v}_e} \right) \right] = 0, \quad (4)$$

где

$$G = \pm (R_0 - k \cdot \text{Re}). \quad (5)$$

Таким образом, следующим этапом анализа является определение влияния турбулентной вязкости на возмущенные скорости и частоту нестационарной трехмерной когерентной структуры.

### Модели

#### Первая модель

Рассматривая частный случай, когда турбулентная вязкость константа, уравнение (4) можно представить в виде:

$$D_{\Pi}^2 \bar{V}_A - \frac{1}{r} D_{\Pi} \bar{V}_A + \bar{V}_A \left[ G_e + \frac{1-k^2}{r^2} \right] = 0. \quad (6)$$

Здесь  $G_e$  описывается выражением аналогичным (5), где в число Рейнольдса вместо обычной вязкости входит турбулентная вязкость  $\nu_e = \text{const}$ . Полученное уравнение является уравнением Бесселя [6], таким образом, решение (6) можно представить в виде

$$\bar{V}_A = \bar{r} \left[ A_{vc} J_k(\bar{r} \sqrt{G_e}) + B_{vc} Y_k(\bar{r} \sqrt{G_e}) \right], \quad (7)$$

где  $J_k$  и  $Y_k$  – функции Бесселя  $k$ -ого порядка первого и второго рода соответственно,  $A_{vc}$  и  $B_{vc}$  – константы.

Учитывая закон сохранения масс и уравнение (7), выражение для  $\bar{W}_A$  можно представить в следующем виде:

$$\bar{W}_A = A_{wc} J_k(\bar{r} \sqrt{G_e}) + B_{wc} Y_k(\bar{r} \sqrt{G_e}). \quad (8)$$

Используя граничные условия, находим константы, которые входят в (8). Так как возмущение  $\bar{W}_A$  должно быть конечным при  $\bar{r} = 0$ , следовательно  $B_{wc} = 0$ .  $\sqrt{G_e}$  совпадает с  $s_1$ , вторым нулем функции  $J_k$ , следовательно  $\bar{W}_A$  должно стремиться к нулю при  $\bar{r} = 1$ . Рассматривая первую гармонику ( $k = 1$ ), решив задачу на собственные значения, получаем следующее выражение:  $G_e = s_1^2 = 14,44$ .

Следовательно, число Струхала можно представить в виде:

$$Sh = 1 \pm \frac{S_1^2}{\text{Re}_R} = 1 \pm \frac{14,44}{\text{Re}_R}. \quad (9)$$

Здесь  $\text{Re}_R = \frac{V_0 R}{\nu}$  – число Рейнольдса.

Таким образом, в этом случае распространяются две волны находящиеся в противофазе и имеющие различные характеристические частоты. Используя экспериментальные данные для константы турбулентной вязкости, полученные в работе [7], имеем:

$$\frac{v_t}{v} = 1,78 \cdot 10^{-3} \left( \frac{V_m 2r_c}{v} \right)^{0,93},$$

где безразмерная величина  $V_m \cdot \frac{2r_c}{v}$  находится в интервале ( $10^4 \dots 10^6$ ). Следовательно, второй член выражения (9) составляет только 1% ... 2% от числа Струхалия, из чего можно сделать вывод, что вязкость очень слабо влияет на частоту нестационарной когерентной структуры. Как показано выше  $B_{wc} = 0$ , учитывая закон сохранения массы  $B_{vc}$  в (7) также должно равняться нулю. Для того чтобы найти константы  $A_{vc}$  и

$$\int_0^{\xi} \xi^m J_k(\xi) d\xi = \frac{\xi^m \Gamma\left(\frac{k+m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-m+1}{2}\right)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(k+2j+1) \cdot \Gamma\left(\frac{k+m+1}{2} + j\right)}{\Gamma\left(\frac{k+m+1}{2} + j\right)} \cdot J_{k+2j+1}(\xi). \quad (11)$$

Выражение для константы  $A_{wc}$  можно представить в виде:

$$A_{wc} = \frac{\left(\frac{h}{r_c} - \frac{1}{2}\right) G_e}{\bar{\alpha} \int_0^{\bar{\alpha}} \xi J_1(\xi) d\xi} \bar{R}, \quad (12)$$

где  $\bar{\alpha} = \alpha \cdot r_c$ ,  $\bar{R} = \frac{R}{r_c}$  – обезразмеренный радиус нестационарной когерентной структуры. Предполагая, что на расстоянии от оси равной радиусу нестационарной когерентной структуры, возмущения максимальны, учитывая уравнение (7) получаем  $\bar{R} = 0,64$ . Однако из уравнения (8) получаем  $\bar{R} = 0,47$ . Далее для расчетов выбираем среднее от этих двух величин  $\bar{R} = 0,555$ . Волновое число  $\bar{\alpha}$  близкое к единице. Таким

$A_{wc}$  используем интегральные условия. Подставляя (7) в (2) и найдя среднеквадратическое значение тангенциальной скорости, закон сохранения массы возле входа можно представить в следующем виде:

$$V_{in} h = \frac{V_m r_c}{2} + \int_0^{r_c} V_m A_{vc} J_k(\bar{r} \sqrt{G_e}) d\bar{r},$$

где  $V_{in}$  – скорость на входе,  $h$  – высота входного отверстия. Учитывая что  $V_{in} \approx V_m$ ,  $A_{vc}$  запишется в виде:

$$A_{vc} = \frac{\left(\frac{h}{r_c} - \frac{1}{2}\right) G_e}{\int_0^{\bar{\alpha}} \xi J_1(\xi) d\xi}, \quad (10)$$

где  $\xi = \bar{r} \sqrt{G_e}$ . Интеграл, входящий в уравнение (10) можно представить в виде:

образом используя уравнения (7) и (8) получаем:

$$V_A = V_m \frac{\left(\frac{h}{r_c} - \frac{1}{2}\right) \sqrt{G_e}}{\int_0^{\bar{\alpha}} \xi J_1(\xi) d\xi} \xi J_1(\xi); \text{ и}$$

$$W_A = V_m \frac{\left(\frac{h}{r_c} - \frac{1}{2}\right) \sqrt{G_e}}{\bar{\alpha} \int_0^{\bar{\alpha}} \xi J_1(\xi) d\xi} \bar{R} J_1(\xi). \quad (13)$$

Эти зависимости представлены вместе с соответствующими экспериментальными данными на графиках 1 и 2.

### Вторая Модель

Предположим что турбулентная вязкость растет линейно с удалением от центральной

оси. В этом случае уравнение (4) принимает вид:

$$D_{II}^2 \bar{V}_A + \bar{V}_A \left[ \frac{G}{a_v r} - \frac{k^2}{r^2} \right] = 0.$$

Таким образом получаем уравнение Бесселя, где  $a_v$  – коэффициент пропорциональности из закона вязкости. Решение этого уравнения:

$$\bar{V}_A = \sqrt{r} \left[ A_{vv} J_{\sqrt{4k^2+1}} \left( 2 \sqrt{\frac{G}{a_v r}} \right) + B_{vv} Y_{\sqrt{4k^2+1}} \left( 2 \sqrt{\frac{G}{a_v r}} \right) \right]. \quad (14)$$

Учитывая что  $\bar{V}_A$  – конечная величина при  $\bar{r} = 0$ , имеем  $B_{vv} = 0$ . Выражение для осевого возмущения полученное из закона сохранения массы принимает вид:

$$\bar{W}_A = \frac{1}{\sqrt{r}} \left[ A_{vv} J_{\sqrt{4k^2+1}} \left( 2 \sqrt{\frac{G}{a_v r}} \right) + B_{vv} Y_{\sqrt{4k^2+1}} \left( 2 \sqrt{\frac{G}{a_v r}} \right) \right], \quad (15)$$

где  $B_{vv}$  также равно нулю.

Для первой гармоники ( $k = 1$ ), собственное значение находим используя (14) и (15):

$$2 \sqrt{\frac{G}{a_v}} = 5,4.$$

Приведенное условие является необходимым для того, чтобы на стенке канала ( $\bar{r} = 1$ ) возмущения были нулевыми. Таким образом в этом случае, из уравнения (5) получаем число Струхала в виде:

$$Sh = 1 \pm 7,29 a_v. \quad (16)$$

Используя простую длину пути смещения, получаем:  $a_v = \chi \sqrt{c_f / 2}$ , где  $\chi$  – константа намного меньше единицы,  $c_f$  – коэффициент трения, который также намного меньше единицы. Таким образом уравнение (16) в этом случае при-

нимает вид:

$$Sh = 1 \pm 7,29 \cdot \chi \sqrt{c_f / 2}. \quad (17)$$

Обычно  $c_f \sim Re^b$ , где  $b$  лежит в интервале (0,2...0,25). Аналогично первой модели, в этом случае влияние вязкости на число Струхала также ничтожно мало. Здесь также наблюдаем наличие двух волн с разными характеристическими частотами. Повторяя процедуру, используемую в первой модели, находим постоянные интегрирования:

$$A_{vv} = \frac{\left( \frac{h}{r_c} - \frac{1}{2} \right) \left( 2 \sqrt{\frac{G}{a_v}} \right)^3}{2 \int_0^{\sqrt{\frac{G}{a_v}}} \eta^2 J_{\sqrt{5}}(\eta) d\eta};$$

$$A_{vv} = \frac{\left( \frac{h}{r_c} - \frac{1}{2} \right) \left( 2 \sqrt{\frac{G}{a_v}} \right)^3}{2 \bar{\alpha} \int_0^{\sqrt{\frac{G}{a_v}}} \eta^2 J_{\sqrt{5}}(\eta) d\eta}. \quad (18)$$

Здесь  $\eta = 2 \sqrt{G / a_v \cdot r}$ . Подставляя (18) и (14) в (15), окончательное выражение для возмущений примет вид:

$$V_A = V_m \frac{\left( \frac{h}{r_c} - \frac{1}{2} \right) \left( 4 \sqrt{\frac{G}{a_v}} \right)}{2 \int_0^{\sqrt{\frac{G}{a_v}}} \eta^2 J_{\sqrt{5}}(\eta) d\eta} \cdot \eta J_{\sqrt{5}}(\eta);$$

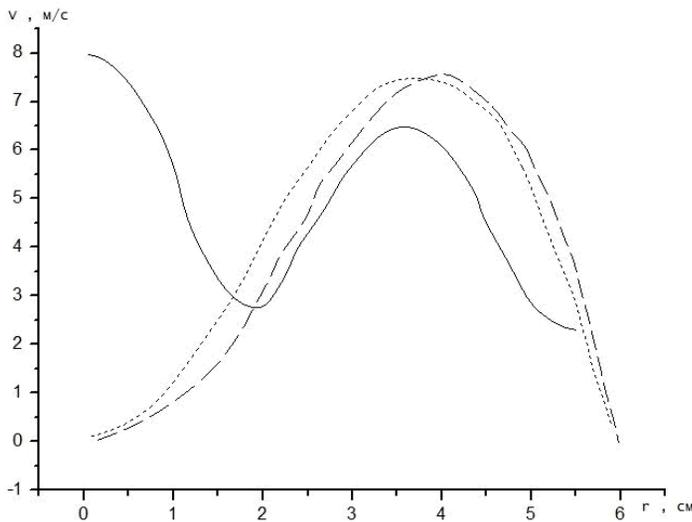
$$W_A = V_m \frac{\left( \frac{h}{r_c} - \frac{1}{2} \right) \left( 16 \left( \frac{G}{a_v} \right)^2 \right)}{2 \bar{\alpha} \int_0^{\sqrt{\frac{G}{a_v}}} \eta^2 J_{\sqrt{5}}(\eta) d\eta} \frac{\bar{R}}{\eta} J_{\sqrt{5}}(\eta). \quad (19)$$

Здесь безразмерный радиус нестационарной когерентной структуры для углового возмущения равен 0,62, для осевого возмущения 0,55, для расчета величин  $V_A$  и  $W_A$  используют среднее значение от этих двух величин  $\bar{R} = 0,585$ . Интегралы в уравнениях (19) рассчитываются численно, сравнение результатов этой модели с первой моделью и экспериментом приведено на рис. 1 и рис. 2.

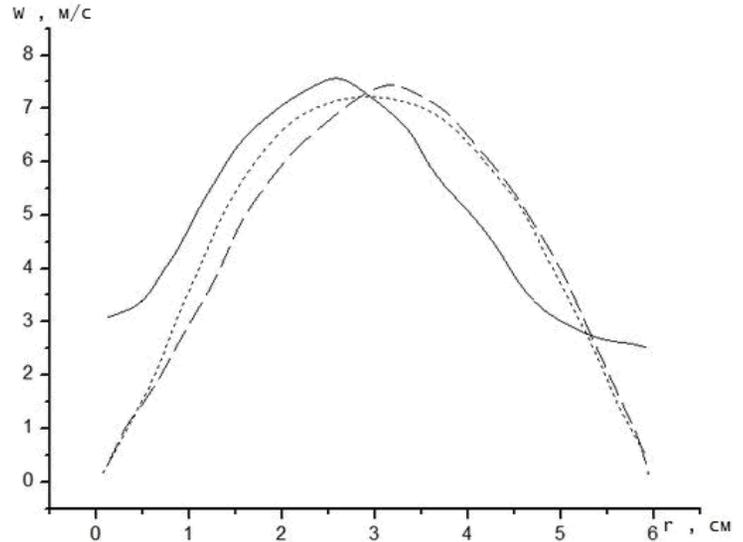
Сравнение полученных теоретически за-

висимостей тангенциальной составляющей скорости от радиальной координаты с аналогичной зависимостью, полученной экспериментально, показало хорошее соответствие с экспериментом на расстоянии больше 2 см от оси для двух теоретических моделей (рис. 1), плохое совпадение в центральной области топki можно объяснить тем что рециркуляция в этой области учитывалась не явно. Полученные теоретически профили осевой скорости

достаточно хорошо совпадают с профилем осевой скорости полученным экспериментально (рис. 2). Профили осевой и тангенциальной скорости, полученные теоретически в рамках первой и второй модели, практически совпадают, несмотря на то, что в двух теоретических моделях зависимость турбулентной вязкости от радиальной координаты предполагалась разной.



**Рис. 1. Зависимость тангенциальной скорости от координаты:**  
 — — — экспериментальная зависимость [4],  
 - - - зависимость, полученная в рамках первой модели (13),  
 \* \* \* - зависимость, полученная в рамках второй модели (19).



**Рис 2. Зависимость осевой скорости от координаты:**  
 — — — экспериментальная зависимость [4],  
 - - - зависимость, полученная в рамках первой модели (13),  
 \* \* \* - зависимость, полученная в рамках второй модели (19).

**Третья модель**

Рассмотрим комплексную форму решения системы (1):

$$V_p = V_A(r) \exp[i(k\theta + \alpha z - \omega t)];$$

$$W_p = W_A(r) \exp[i(k\theta + \alpha z - \omega t)];$$

$$P_p = P_A(r) \exp[i(k\theta + \alpha z - \omega t)];$$

$$T_p = T_A(r) \exp[i(k\theta + \alpha z - \omega t)];$$

$$Y_{ip} = Y_{iA}(r) \exp[i(k\theta + \alpha z - \omega t)]. \quad (20)$$

Повторяя процедуру, использованную для анализа действительного решения системы (1), было получено следующее уравнение для осевого возмущения:

$$D_{\Pi}^2 \bar{W}_A + \left[ \frac{1+3\zeta}{r(1+\zeta)} + \frac{D_{\Pi} \bar{\mu}_e}{\bar{\mu}_e} \right] D_{\Pi} \bar{W}_A + \left[ i\rho \left( \frac{Ro}{\bar{\mu}_e} - \frac{\bar{V}}{r} k Re + \frac{\bar{W}_0 \bar{\alpha} Re}{\bar{\mu}_e} \right) + \bar{\alpha}^2 + \frac{k^2}{r^2} \right] \bar{W}_A = 0. \quad (21)$$

Здесь  $\bar{\mu}_e = \frac{\mu_e}{\mu_0}$  – нормированная эффективная динамическая вязкость.

Минимальное собственное значение этой задачи может быть рассчитано. Представляя  $\bar{W}_A$  в

$$D_{\Pi}^2 F + \left[ \bar{\rho} i \left( \frac{Ro}{\bar{\mu}_e} - \frac{\bar{V} k \operatorname{Re} + \bar{W}_0 \bar{\alpha} \operatorname{Re}}{\bar{\mu}_e} \right) + \bar{\alpha}^{-2} + \frac{k^2}{\bar{r}^2} + \frac{1}{4} \left( \frac{1+3\zeta}{\bar{r}(1+\zeta)} + \frac{D\bar{\mu}_e}{\bar{\mu}_e} \right)^2 + \frac{1}{2} D_{\Pi} \left( \frac{1+3\zeta}{\bar{r}(1+\zeta)} + \frac{D\bar{\mu}_e}{\bar{\mu}_e} \right) \right] F = 0.$$

Используя вариационный принцип [8], минимальное собственное значение может быть представлено в виде:

$$\operatorname{Sh} = \frac{\int_0^1 \bar{\rho} \left( \frac{\bar{V}_0}{\bar{r}} k + \alpha^* \frac{W_0^*}{C_{mn}} \right) \frac{\Phi^2(\bar{r})}{\bar{\mu}_e} d\bar{r}}{\int_0^1 \bar{\rho} \frac{\Phi^2(\bar{r})}{\bar{\mu}_e} d\bar{r}}, \quad (22)$$

где  $\Phi(\bar{r})$  – произвольная функция, удовлетворяющая граничным условиям,  $C_{mn} = \frac{V_m}{W_{mn}}$ ,  $W_0^* = \frac{W_0}{W_{mn}}$ ,  $W_{mn}$  – среднее значение осевой скорости. Выражение (22) является главным критерием, дающим возможность рассчитать час-

виде:

$$\bar{W}_A = \exp \left( -\frac{1}{2} \int \left( \frac{1+3\zeta}{\bar{r}(1+\zeta)} + \frac{D_{\Pi} \bar{\mu}_e}{\bar{\mu}_e} \right) d\bar{r} \right) \cdot F(\bar{r}).$$

Выражение для величины  $F(\bar{r})$  необходимо найти из уравнения:

тоту нестационарной когерентной структуры при известных распределениях для невозмущенных скорости, вязкости и плотности.

Были получены зависимости числа Струхала и форм-параметра  $H = \frac{\delta^*}{\delta^{**}}$  от максимального нормированного радиуса нестационарной когерентной структуры.

1) В случае профиля скорости, выбранного в виде зависимости:

$$\bar{V}_0(\bar{r}) = \delta(\bar{r}) \cdot \left[ \bar{r} \cdot \delta(\bar{r}_m - \bar{r}) + \frac{r_c - \bar{r}}{r_c - \bar{r}_m} \cdot \delta(\bar{r}_m - \bar{r}) \right], \quad (23)$$

где  $\delta(r) = 0$ , при  $r < 0$  и  $\delta(r) = 1$ , при  $r \geq 0$ . Получены следующие зависимости:

$$\operatorname{Sh} = 30 \cdot \left( \frac{1}{1-\bar{r}_m} \left[ \frac{1}{20} - \frac{\bar{r}_m^2}{2} + \bar{r}_m^3 - \frac{3}{4} \bar{r}_m^4 + \frac{\bar{r}_m^5}{5} \right] + \bar{r}_m^3 \left[ \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \bar{r}_m + \frac{1}{5} \bar{r}_m^2 \right] \right). \quad (24a)$$

$$H = 3 \cdot \frac{1 + \bar{r}_m - \bar{r}_m^2}{1 + \bar{r}_m + \bar{r}_m^2 - 2 \cdot \bar{r}_m^3}. \quad (24b)$$

В случае профиля скорости, выбранного в виде зависимости:

$$\bar{V}_0(r) = \frac{r^{n+1}}{r^{n-1} - r^{n-1}} \cdot (r - r^n), \quad (25)$$

где  $\operatorname{Sh} = \frac{r^{n+1}}{r^{n-1} - r^{n-1}}$ , а  $\bar{r}_m = \frac{1}{r^{n-1}}$ .

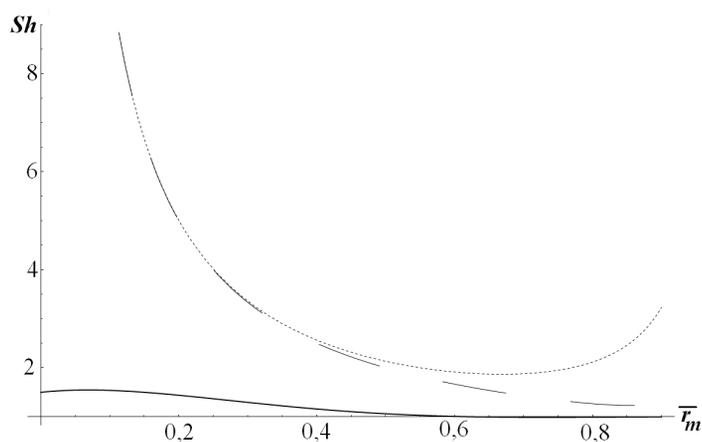
Получены следующие зависимости:

$$\operatorname{Sh} = \frac{1}{\frac{\bar{r}_m^{n-1}}{1} - \frac{1}{\bar{r}_m}}. \quad (26a)$$

$$H = \left[ 1 - \frac{\frac{1}{\bar{r}_m^{n+1}}}{\frac{1}{\bar{r}_m^n} - \frac{1}{\bar{r}_m}} \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} \right) \right] \times \quad (26b)$$

$$\times \left[ \frac{1}{\frac{\bar{r}_m^{n+1}}{1} - \frac{1}{\bar{r}_m}} \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2} + \frac{3n}{(n+2) \cdot (2n+1)} \right) \right]^{-1}.$$

Частота трехмерной нестационарной когерентной структуры, возникающей за закручивающими устройствами пропорциональна числу Струхала, что дает возможность, подбирая невозмущенную нормированную тангенциальная скорость  $\bar{V}_0$  близкой к условиям эксперимента, рассчитав число Струхала получить одну из важных характеристик рециркуляционной зоны – частоту трехмерной нестационарной когерентной структуры.



**Рис 3. Зависимость числа Струхала от максимального нормированного радиуса нестационарной когерентной структуры:**

- — — — — зависимость, полученная для профиля скорости (23),
- - - - - зависимость, полученная для профиля скорости (25), при  $n = 20$ ,
- . . . . . зависимость, полученная в рамках второй модели (25), при  $n = 5$ .

### Выводы

В данной работе представлены модели с использованием методов теории возмущений для описания возникновения нестационарной трехмерной когерентной структуры в вязкой среде.

Несколько приближений, допущенных в данной работе на разных этапах анализа, позволили получить аналитические выражения для частоты нестационарной когерентной структуры и компонент преобладающей скорости. В результате показано, что вязкость не существенно влияет на частоту нестационарной когерентной структуры, возникающей за закручивающими устройствами. Расчитанные в рамках рассмотренных моделей значения осевой и тангенциальной скорости достаточно хорошо совпадают с экспериментальными данными, двух промышленных устройств. Получена аналитическая формула для расчета числа Струхала (22), с помощью которой можно рассчитать одну из важных характеристик трехмерной нестационарной когерентной структуры, возникающей за закручивающими устройствами, – ее частоту, что дает возможность более полного анализа рециркуляционной зоны в топочном пространстве.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Гунта А., Лили Д., Сайред Н. Закрученные потоки: Пер. с англ. – М.: Мир, 1987. – 588 с.
2. Syred N., Beer J.M. The damping of precessing vortex cores by combustion in swirl generators // *Astronautica Acta* – 1972. – Volume 17, Issue 4-5. – P. 783-801.
3. Channaud R.C. Observations of oscillatory motion in certain swirling flows // *Journal of Fluid Mechanics* – 1965. – vol. 21 – P. 111-127.
4. Syred N, O'Doherty T, Froud D. 1994, 'The interaction of the precessing vortex core and reverse flow in the exhaust of a swirlburner', *J. Proc Instn Mech Engrs*, 208, P. 27-36.

Получено 23.07.2010 г.