УДК 519.2: 530.1: 600.1

И.И. ГОРБАНЬ

МНОГОЗНАЧНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ, ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ФУНКЦИИ

Анотація. *На основі теорії гіпервипадкових явищ розроблено принципи опису багатозначних величин, послідовностей і функцій. Відомі для однозначних функцій поняття, зокрема, поняття збіжності, неперервності, похідної, диференційованості, невизначеного та визначеного інтегралів, узагальнено на випадок багатозначних функцій. Встановлено зв'язок між багатозначними функціями і функціями, що розбігаються. Досліджено особливості трансформації однозначних функцій у багатозначні і, навпаки, багатозначних функцій в однозначні.*
Ключові слова: *багатозначна величина, багатозначна функція, інтеграл, що розбігається, неперервність, похідна, теорія гіпервипадкових явищ.*

Аннотация. *На основе теории гиперслучайных явлений разработаны принципы описания многозначных величин, последовательностей и функций. Известные для однозначных функций понятия, в частности, понятия сходимости, непрерывности, дифференцируемости, неопределенного и определенного интегралов, обобщены на случай многозначных функций. Установлена связь между многозначными и расходящимися функциями. Исследованы особенности трансформации однозначных функций в многозначные и, наоборот, многозначных функций в однозначные.*
Ключевые слова: *многозначная величина, многозначная функция, расходящийся интеграл, непрерывность, производная, теория гиперслучайных явлений.*

Abstract. *On the base of the theory of hyper-random phenomena the description principles for multi-valued variables, sequences, and functions are developed. The concepts known for single-valued functions such as convergence, continuity, derivative, differentiability, indefinite and definite integrals are generalized for multiple-valued functions. The link between multiple-valued and divergent functions is established. Transformation peculiarities of single-valued functions into multiple-valued ones and multiple-valued functions into single-valued ones are researched.*
Keywords: *multi-valued variable, multiple-valued function, divergent integral, continuity, derivative, theory of hyper-random phenomena.*

1. Введение

В математике различают однозначные и многозначные величины и функции. Однозначная величина принимает конкретное значение, а многозначная – множество значений. Однозначная функция устанавливает между точками области определения и области значений однозначное соответствие, а многозначная функция – многозначное соответствие.

В дальнейшем будем полагать, что значения многозначной величины, аргумент и значения многозначной функции – скалярные действительные величины.

Частными случаями многозначной функции являются многозначная числовая последовательность, представляющая собой многозначную функцию целочисленного аргумента, и многозначная величина – вырожденная многозначная функция, область определения которой – число.

Факт многозначности будем подчеркивать знаком тильда над буквой, обозначающей соответствующую величину, последовательность или функцию.

Известны разные подходы описания многозначных величин и функций. Один из них, широко используемый в тригонометрии, теории специальных функций, теории функций комплексной переменной и других разделах математики, основан на понятии ветви функции.

Ветвью многозначной функции называют [1] однозначную непрерывную функцию в области ее определения.

Многозначность функции трактуют или как повышенную размерность области значений функции или как повышенную размерность области ее определения.

В первом случае многозначную функцию $\tilde{x}(t)$ аргумента t рассматривают как параметрически заданную однозначную непрерывную функцию $x_g(t)$, параметр которой $g \in G$ (где G – конечное, счетное или несчетное множество) характеризует g-ю ветвь многозначной функции.

Во втором случае многозначную функцию $\tilde{x}(t)$ представляют однозначной непрерывной функцией $x(t, g)$ двух переменных t и g. При фиксации аргумента g получается непрерывная зависимость от аргумента t, которую можно трактовать как g-ю ветвь функции $\tilde{x}(t)$.

Таким образом, в обоих случаях функция $\tilde{x}(t)$ оказывается представимой конечным, счетным или несчетным множеством ветвей. При этом допускается, что:

– ветви многозначной функции могут иметь общие точки: пересекаться, касаться друг друга и некоторые их фрагменты совпадать;

– области определения ветвей могут быть разными;

– возможны различные варианты разложения функции по ветвям.

Описание многозначной функции с помощью ветвей удобно и наглядно прежде всего, когда их число конечное или, как минимум, счетное. При несчетном количестве наглядность теряется и возникают сложности нахождения ветвей.

Другой подход описания многозначных величин и функций предлагает теория вероятностей [2], ориентированная на изучение статистически устойчивых физических объектов, в частности, физических величин, у которых выборочные средние стремятся к определенным значениям. Одними из главных математических объектов теории вероятностей являются случайная величина и случайная функция. Случайную величину можно рассматривать как многозначную величину, для которой определена вероятностная мера (функция распределения). Случайная функция трактуется или как множество случайных величин, зависящих от аргумента функции, или как множество однозначных реализаций многозначной функции, для которого определена вероятностная мера.

Еще один подход к описанию многозначных величин и функций представляет теория гиперслучайных явлений [3]. Эта теория ориентирована на изучение физических явлений, не характеризуемых однозначными вероятностными характеристиками. Физическим объектом ее исследования служат статистически неустойчивые физические явления, в частности, физические величины, у которых дисперсия выборочного среднего при увеличении объема выборки не стремится к нулю. Для описания физических явлений в рамках этой теории вместо конкретных вероятностных параметров и характеристик используются множества возможных их вариантов. В качестве абстрактных математических объектов выступают гиперслучайная величина – множество случайных величин и гиперслучайная функция – множество случайных функций. Вероятностная мера рассматриваемых случайных величин и функций зависит от параметра, значения которого принадлежат конечному, счетному или несчетному множеству.

Исследования показывают, что математический аппарат теории гиперслучайных явлений может быть эффективно использован для описания детерминированных многозначных величин и функций.

Целью настоящей статьи является изложение результатов этих исследований.

2. Обобщенные пределы однозначных последовательностей и функций

Многозначность тесно связана с нарушением сходимости. В статье [4] введено новое понятие сходимости бесконечной однозначной числовой последовательности $\left\{x^n\right\}^{n\to\infty} = x^1, x^2, \ldots, x^n, \ldots$.

Согласно классическим представлениям, последовательность $\left\{x^n\right\}^{n\to\infty}$ считается сходящейся, если существует необходимо единственный предел $a = \lim\limits_{n\to\infty} x^n$. Последовательность, не имеющая единственного предела, считается расходящейся.

Расходящиеся последовательности бывают разными.

Известно, что из любой бесконечной последовательности можно сформировать множество частичных последовательностей (подпоследовательностей), получаемых из исходной последовательности вычеркиванием части членов.

Доказано, что, если последовательность сходится, то сходятся все ее частичные последовательности. Если же последовательность расходится, то не обязательно расходятся все ее частичные последовательности. Некоторые из них могут сходиться к определенным пределам a_m (предельным точкам). Множество всех предельных точек последовательности, называемых также частичными пределами, образуют спектр $\tilde{S}_x$ [4].

Спектр расходящейся последовательности можно рассматривать как аналог обычного предела сходящейся последовательности. Аналитически будем представлять его следующим образом:

$$\tilde{S}_x = \mathop{\mathrm{LIM}}_{n\to\infty} x^n, \tag{1}$$

где, в отличие от классического предела $\lim\limits_{n\to\infty}$, используется определенный в [4] обобщенный предел последовательности $\mathop{\mathrm{LIM}}\limits_{n\to\infty}$, допускающий множественность значений.

Множество $\tilde{S}_x$ характеризуется функцией распределения предельных точек [4]:

$$\tilde{F}(x) = \mathop{\mathrm{LIM}}_{n\to\infty} \frac{n(x)}{n}, \tag{2}$$

где $n(x)$ – количество членов последовательности $\left\{x^n\right\} = x^1, x^2, \ldots, x^n$, меньших x.

Обобщенный предел (2) может сходиться к числу (рис. 1а), сходиться к множеству чисел (рис. 1б) или расходиться (рис. 1в). В первых двух случаях функция распределения $\tilde{F}(x)$ однозначная ($\tilde{F}(x) = F(x)$), а в третьем – многозначная.

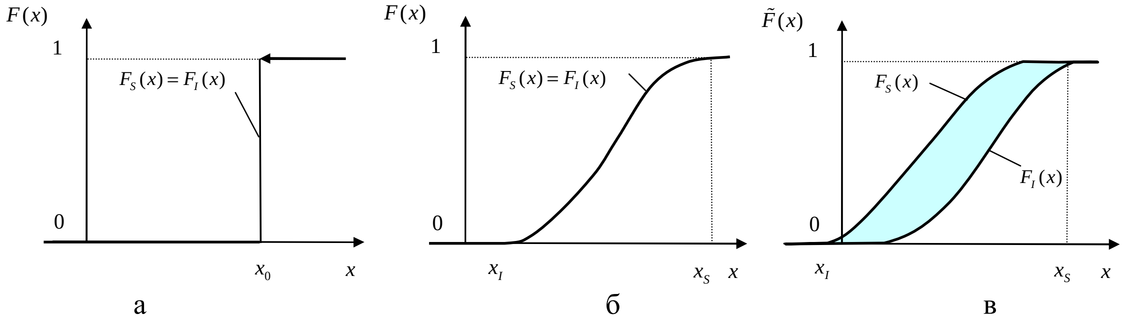


Рис. 1. Функция распределения $\tilde{F}(x)$ предельных точек и границы $F_I(x)$, $F_S(x)$ функции распределения предельных точек однозначной последовательности $\left\{x^n\right\}^{n\to\infty}$: сходящейся к числу x_0 (а), сходящейся к множеству чисел (б) и расходящейся (в)

Для описания функции распределения $\tilde{F}(x)$ могут использоваться ее нижняя $F_I(x)$ и верхняя $F_S(x)$ границы (рис. 1), плотности распределения границ $f_I(x) = \dfrac{\mathrm{d}F_I(x)}{\mathrm{d}x}$, $f_S(x) = \dfrac{\mathrm{d}F_S(x)}{\mathrm{d}x}$, моменты границ: математические ожидания границ m_I, m_S, дисперсии границ D_I, D_S и другие характеристики и параметры теории гиперслучайных явлений.

Аналогично введено понятие сходимости однозначной функции $x(t)$ слева и справа (при $t \to t_0 - 0$ и $t \to t_0 + 0$) к множествам (спектрам) предельных точек (частичных пределов) соответственно $\tilde{S}_x^-(t_0) = \mathop{\mathrm{LIM}}\limits_{t \to t_0 - 0} x(t)$ и $\tilde{S}_x^+(t_0) = \mathop{\mathrm{LIM}}\limits_{t \to t_0 + 0} x(t)$.

Множества $\tilde{S}_x^{\pm}(t)$ характеризуют многозначные (в общем случае) функции распределения предельных точек $\tilde{F}^{\pm}(x;t)$.

Для описания функций распределения $\tilde{F}^{\pm}(x;t)$ могут использоваться их нижние и верхние границы $F_I^{\pm}(x;t)$, $F_S^{\pm}(x;t)$, плотности распределения границ $f_I^{\pm}(x;t) = \dfrac{\mathrm{d}F_I^{\pm}(x;t)}{\mathrm{d}x}$, $f_S^{\pm}(x;t) = \dfrac{\mathrm{d}F_S^{\pm}(x;t)}{\mathrm{d}x}$, моменты границ: математические ожидания границ $m_I^{\pm}(t)$, $m_S^{\pm}(t)$, дисперсии границ $D_I^{\pm}(t)$, $D_S^{\pm}(t)$ и другие характеристики.

3. Описание многозначных величин и функций

Пусть имеется детерминированная величина $x(p)$, значение которой зависит от параметра $p \in P$, где P – окрестность точки p_0. Для всех $p \neq p_0$ эта величина принимает однозначные значения.

Рассмотрим однозначную последовательность значений $\left\{x^n\right\} = x^1, x^2, \ldots, x^n$ величины $x(p)$ при $p \to p_0$. Обобщенный предел этой последовательности $\mathop{\mathrm{LIM}}\limits_{n \to \infty} x^n = \mathop{\mathrm{LIM}}\limits_{p \to p_0} x(p)$ может стремиться к числу, к множеству чисел или расходиться.

Определение 1. Многозначную детерминированную величину $\tilde{x}$ можно трактовать как обобщенный предел $\mathop{\mathrm{LIM}}\limits_{n \to \infty} x^n$ порождающей последовательности $\left\{x^n\right\}$ и представлять ее спектром значений $\tilde{S}_{\tilde{x}}$ и функцией распределения этих значений $\tilde{F}(x)$.

Заметим, что не обязательно спектр многозначной величины $\tilde{x}$ совпадает с множеством значений величины $x(p)$ в точке p_0.

Функция распределения $\tilde{F}(x)$ может быть как однозначной, так и многозначной.

Если функция распределения однозначная ($\tilde{F}(x) = F(x)$), то существует плотность распределения $f(x) = \mathrm{d}F(x)/\mathrm{d}x$.

Более строго многозначную величину можно задать с помощью пространства, аналогичного гипервероятностному пространству, описываемому тетрадой $(\Omega, \Im, G, P_g)$ [3], где Ω – множество элементарных событий (например, значений x многозначной величины $\tilde{x}$), $\Im$ – борелевское поле событий (σ-алгебра подмножеств событий), G – множество условий $g \in G$, а P_g – мера подмножеств событий, зависящая от условий g.

Определение 1а. Многозначную детерминированную величину $\tilde{x}$ можно рассматривать как математический объект, задаваемый спектром значений $\tilde{S}_{\tilde{x}}$ и функцией распределения $\tilde{F}(x)$, представляющей собой множество мер $\left\{P_g, \quad g \in G\right\}$ события, описываемого неравенством $\xi < x$.

В частном случае, когда условия единственные, многозначная величина может быть задана с помощью пространства, аналогичного вероятностному пространству, описываемому триадой $(\Omega, \Im, P)$ [2], где P – мера подмножеств событий. Тогда многозначную величину $\tilde{x}$ можно задать спектром $\tilde{S}_{\tilde{x}}$ и однозначной функцией распределения $F(x)$, представляющей собой меру P события, описываемого неравенством $\xi < x$.

Многозначную детерминированную функцию $\tilde{x}(t)$ можно представить множеством многозначных величин – сечений функции, соответствующих фиксированным значениям аргумента t. Поэтому функция $\tilde{x}(t)$ характеризуется множеством значений спектра $\tilde{S}_{\tilde{x}}(t)$ при фиксированных значениях t и функцией распределения $\tilde{F}(x;t)$ (или плотностью распределения значений $f(x;t)$, если функция распределения однозначная).

Заметим, что однозначные функции распределения $F(x)$, $F(x;t)$ и плотности распределения $f(x)$, $f(x;t)$ аналогичны соответственно функциям распределения вероятностей и плотностям распределения вероятностей случайной величины и случайной функции. При этом рассматриваемые характеристики обладают всеми свойствами своих вероятностных аналогов.

4. Спектры многозначных последовательностей и функций

Определение 2. Однозначной подпоследовательностью (однозначной частичной последовательностью) многозначной конечной $\left\{\tilde{x}_i\right\} = \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_i$ или бесконечной $\left\{\tilde{x}_i\right\}_{i \to \infty}$ последовательности будем называть любую однозначную последовательность, сформированную из исходной последовательности путем отбрасывания части членов и сохранения для оставшихся членов по одному значению.

Определение 3. m-м частичным пределом (предельной точкой) многозначной последовательности $\left\{\tilde{x}_i\right\}_{i \to \infty}$ будем называть предел a_m (число) однозначной m-ой частичной последовательности, сформированной из последовательности $\left\{\tilde{x}_i\right\}_{i \to \infty}$.

Определение 4. m-м частичным пределом (предельной точкой) при $t \to t_0 - 0$ или $t \to t_0 + 0$ многозначной функции $\tilde{x}(t)$, принимающей конечные значения, будем называть m-й предел (число) однозначной частичной последовательности, сформированной из исходной функции при $t \to t_0 - 0$ или $t \to t_0 + 0$.

Заметим, что не все однозначные частичные последовательности сходятся (имеют единственные пределы). Поэтому не все однозначные частичные последовательности многозначной последовательности или многозначной функции имеют единственные предельные точки.

В случае многозначных последовательностей и многозначных функций в качестве аналогов пределов могут выступать множества (спектры) предельных точек.

Пусть $\tilde{S}_{\tilde{x}}$ – множество (спектр) предельных точек многозначной последовательности $\left\{\tilde{x}_i\right\}_{i \to \infty}$, а $\tilde{S}_{\tilde{x}}^-(t_0)$ и $\tilde{S}_{\tilde{x}}^+(t_0)$ – левостороннее и правостороннее множества (спектры) предельных точек многозначной функции $\tilde{x}(t)$ при $t \to t_0 - 0$ и $t \to t_0 + 0$.

Аналитически сходимость многозначной последовательности к множеству предельных точек будем записывать выражением $\tilde{S}_{\tilde{x}} = \operatorname*{LIM}_{i\to\infty} \tilde{x}_i$, а сходимость многозначной функции к множеству предельных точек слева и справа – выражениями $\tilde{S}^-_{\tilde{x}}(t_0) = \operatorname*{LIM}_{t\to t_0-0} \tilde{x}(t)$ и $\tilde{S}^+_{\tilde{x}}(t_0) = \operatorname*{LIM}_{t\to t_0+0} \tilde{x}(t)$.

Множество предельных точек многозначной последовательности $\{\tilde{x}_i\}_{i\to\infty}$ заключено в интервале $[x_I, x_S]$, а множество предельных точек многозначной функции $\tilde{x}(t)$ при $t\to t_0-0$ и $t\to t_0+0$ – в интервалах $[x_I^-(t_0), x_S^-(t_0)]$ и $[x_I^+(t_0), x_S^+(t_0)]$, где x_I и x_S – соответственно нижняя и верхняя предельные точки последовательности $\{\tilde{x}_i\}_{i\to\infty}$; $x_I^-(t_0)$ и $x_S^-(t_0)$ – соответственно нижняя и верхняя предельные точки функции $\tilde{x}(t)$ при $t\to t_0-0$, а $x_I^+(t_0)$ и $x_S^+(t_0)$ – соответственно нижняя и верхняя предельные точки функции $\tilde{x}(t)$ при $t\to t_0+0$.

Заметим, что требования конечности значений функции и значения аргумента t_0, фигурирующие в Определении 4, не являются существенными. Аналогично можно определить понятия множества предельных точек для неограниченной многозначной функции при $t\to t_0\pm 0$ и многозначной функции $\tilde{x}(t)$ при t, стремящемся к плюс или минус бесконечности ($t\to+\infty$, $t\to-\infty$).

5. Функции распределения многозначных последовательностей

Каждый j-й член $\tilde{x}_j$ многозначной конечной последовательности $\{\tilde{x}_i\}$ ($j=\overline{1,i}$) может быть представлен как обобщенный предел $\operatorname*{LIM}_{n\to\infty} x_j^n$ порождающей последовательности $\{x_j^n\} = x_j^1, x_j^2, \ldots, x_j^n$ и описан функцией распределения

$$\tilde{F}_j(x) = \operatorname*{LIM}_{n\to\infty} \frac{n_j(x)}{n},$$

где $n_j(x)$ – количество членов последовательности $\{x_j^n\}$, меньших x.

Спектр значений $\tilde{S}_{\tilde{x}_i}$ последовательности $\{\tilde{x}_i\}$ может быть описан функцией распределения

$$\tilde{F}^i(x) = \operatorname*{LIM}_{n\to\infty} \frac{\sum_{j=1}^{i} n_j(x)}{ni} = \frac{1}{i}\sum_{j=1}^{i} \tilde{F}_j(x).$$

Определение 5. Функцией распределения предельных точек последовательности $\{\tilde{x}_i\}_{i\to\infty}$ будем называть функцию

$$\tilde{F}(x) = \operatorname*{LIM}_{i\to\infty} \tilde{F}^i(x) = \operatorname*{LIM}_{i\to\infty} \frac{1}{i}\sum_{j=1}^{i} \tilde{F}_j(x) = \operatorname*{LIM}_{i\to\infty} \operatorname*{LIM}_{n\to\infty} \frac{\sum_{j=1}^{i} n_j(x)}{ni}.$$

Обратим внимание, что функция $\tilde{F}(x)$ может быть многозначной. Если для всех $x\in(-\infty,+\infty)$ она однозначная, то $\tilde{F}(x) = F(x)$.

Рассматриваемая функция распределения предельных точек $\tilde{F}(x)$ аналогична функции распределения предельных точек (2) однозначной последовательности.

В зависимости от вида функции распределения $\tilde{F}(x)$ будем различать многозначные последовательности $\{\tilde{x}_i\}_{i\to\infty}$, сходящиеся к числу, сходящиеся к множествам чисел и расходящиеся.

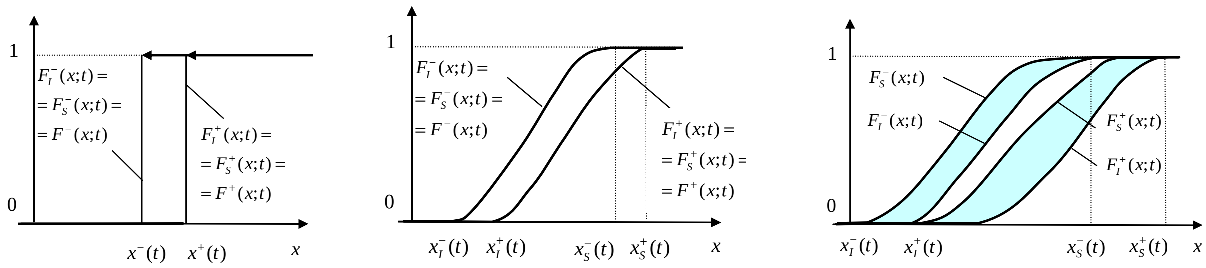
Определение 6. Многозначную последовательность $\{\tilde{x}_i\}_{i\to\infty}$ будем называть сходящейся к числу x_0, если функция распределения $\tilde{F}(x)$ предельных точек представляет собой функцию единичного скачка $\operatorname{sign}[x-x_0]=\begin{cases}0, & при \quad x<x_0,\\ 1, & при \quad x\geq x_0\end{cases}$ в точке x_0, сходящейся к множеству чисел (в частном случае к интервалу), если эта функция однозначная на интервале $(-\infty,+\infty)$, и расходящейся, если она – многозначная хотя бы в одной точке этого интервала.

Таким образом, не только однозначные, но и многозначные последовательности могут быть сходящимися к числу, сходящимися к множеству чисел и расходящимися.

Как и в случае однозначной последовательности, функция распределения $\tilde{F}(x)$ может быть охарактеризована однозначными границами: нижней $F_I(x)$ и верхней $F_S(x)$. Если на интервале $(-\infty,+\infty)$ она принимает конкретные значения (последовательность сходится к числу или множеству чисел), то границы совпадают: $F_I(x)=F_S(x)$, в противном же случае – они отличаются.

6. Функции распределения многозначных функций

По аналогии с функцией распределения $\tilde{F}(x)$ многозначной последовательности можно ввести понятия левосторонней $\tilde{F}^-(x;t)$ и правосторонней $\tilde{F}^+(x;t)$ функций распределения предельных точек многозначной функции $\tilde{x}(t)$ (рис. 2), характеризующих частоту повторяемости значений функции соответственно при приближении аргумента к t слева и справа.



а б в

Рис. 2. Границы функции распределения предельных точек многозначной функции, сходящейся слева и справа к числу (а), к множеству чисел (б) и расходящейся (в)

Заметим, что функции распределения $\tilde{F}^{\pm}(x;t)$ могут быть как однозначными, так и многозначными.

Определение 7. Многозначную функцию $\tilde{x}(t)$ будем называть сходящейся слева (при фиксированном t) к определенному числу $x^-(t)$, если левосторонняя функция распределения предельных точек $\tilde{F}^-(x;t)$ описывается функцией единичного скачка $\operatorname{sign}[x-x^-(t)]$ (рис. 2а), сходящейся слева к множеству чисел, если эта функция распределения является однозначной для всех $x \in (-\infty, +\infty)$ (при этом $\tilde{F}^{-}(x;t) = F^{-}(x;t)$) (рис. 2б), и расходящейся слева, если она является многозначной хотя бы в одной точке x (рис. 2в).

Рассматривая аналогично правостороннюю функцию распределения $\tilde{F}^{+}(x;t)$, соответствующую правостороннему пределу функции $\tilde{x}(t)$, будем различать многозначную функцию, сходящуюся справа к конкретному числу $x^{+}(t)$ (рис. 2а), сходящуюся справа к множеству чисел (рис. 2б) и расходящуюся справа (рис. 2в).

Левостороннюю $\tilde{F}^{-}(x;t)$ и правостороннюю $\tilde{F}^{+}(x;t)$ функции распределения можно характеризовать однозначными границами: соответственно $F_I^{-}(x;t)$, $F_S^{-}(x;t)$ и $F_I^{+}(x;t)$, $F_I^{+}(x;t)$. Если при $x \in (-\infty, +\infty)$ они принимают конкретные значения (функция $\tilde{x}(t)$ сходится к числу или к множеству чисел), то соответствующие границы совпадают: $F^{-}(x;t) = F_I^{-}(x;t) = F_S^{-}(x;t)$, $F^{+}(x;t) = F_I^{+}(x;t) = F_S^{+}(x;t)$ (рис. 2а, 2б), в противном же случае они отличаются: $F_I^{-}(x;t) \neq F_S^{-}(x;t)$, $F_I^{+}(x;t) \neq F_S^{+}(x;t)$ (рис. 2в).

Особый интерес представляют многозначные функции со специальными свойствами.

7. Непрерывная многозначная функция

Определение 8. Многозначную функцию $\tilde{x}(t)$ будем называть непрерывной в точке t слева (справа), если

1) она определена в окрестности этой точки слева (справа), а также в самой этой точке;

2) функция $\tilde{x}(t)$ сходится в точке t слева (справа) к числу или множеству чисел (описывается однозначной функцией распределения);

3) в точке t левосторонняя $F^{-}(x;t)$ (правосторонняя $F^{+}(x;t)$) функция распределения равна функции распределения значений $F(x;t)$: $F^{-}(x;t) = F(x;t)$ ($F^{+}(x;t) = F(x;t)$) (функция распределения $F(x;t)$ непрерывна по аргументу t слева (справа)).

В противном случае функцию будем называть разрывной в точке t слева (справа).

Определение 9. Многозначную функцию будем называть непрерывной на интервале (t_1, t_2), если она непрерывна во всех точках этого интервала слева и справа.

Для непрерывной функции $\tilde{x}(t)$ имеют место равенства $x_I^{-}(t) = x_I^{+}(t) = x_I(t)$, $x_S^{-}(t) = x_S^{+}(t) = x_S(t)$, где $x_I(t)$, $x_S(t)$ – соответственно нижняя и верхняя границы функции $\tilde{x}(t)$ (рис. 3а, 3в).

Для непрерывных многозначных функций можно по-новому определить понятие ветви.

Определение 10. c-й ветвью многозначной непрерывной на интервале $t \in (t_1, t_2)$ функции $\tilde{x}(t)$ ($c \in (0,1]$) будем называть определенную на этом интервале однозначную функцию $x_c(t) = \inf_x \arg_x(F(x;t) = c)$ (рис. 3а, 3в).

Для существования на интервале (t_1, t_2) c-й ветви необходимо и достаточно, чтобы для всех $t \in (t_1, t_2)$ существовало хотя бы одно решение уравнения $F(x;t) = c$ (рис. 3б, 3г).

Количество ветвей многозначной функции может быть конечным, счетным или несчетным.

Если количество ветвей конечное (рис. 3а) или счетное, то при $t = \text{const}$ функция распределения $F(x;t)$ – ступенчатая функция аргумента x (рис. 3б), если же количество ветвей несчетное и для всех $t \in (t_1, t_2)$ значения функции плотно заполняют интервал $(x_I(t),\ x_S(t))$ (рис. 3в), то при $t = \text{const}$ функция распределения $F(x;t)$ – строго возрастающая функция x (рис. 3г).

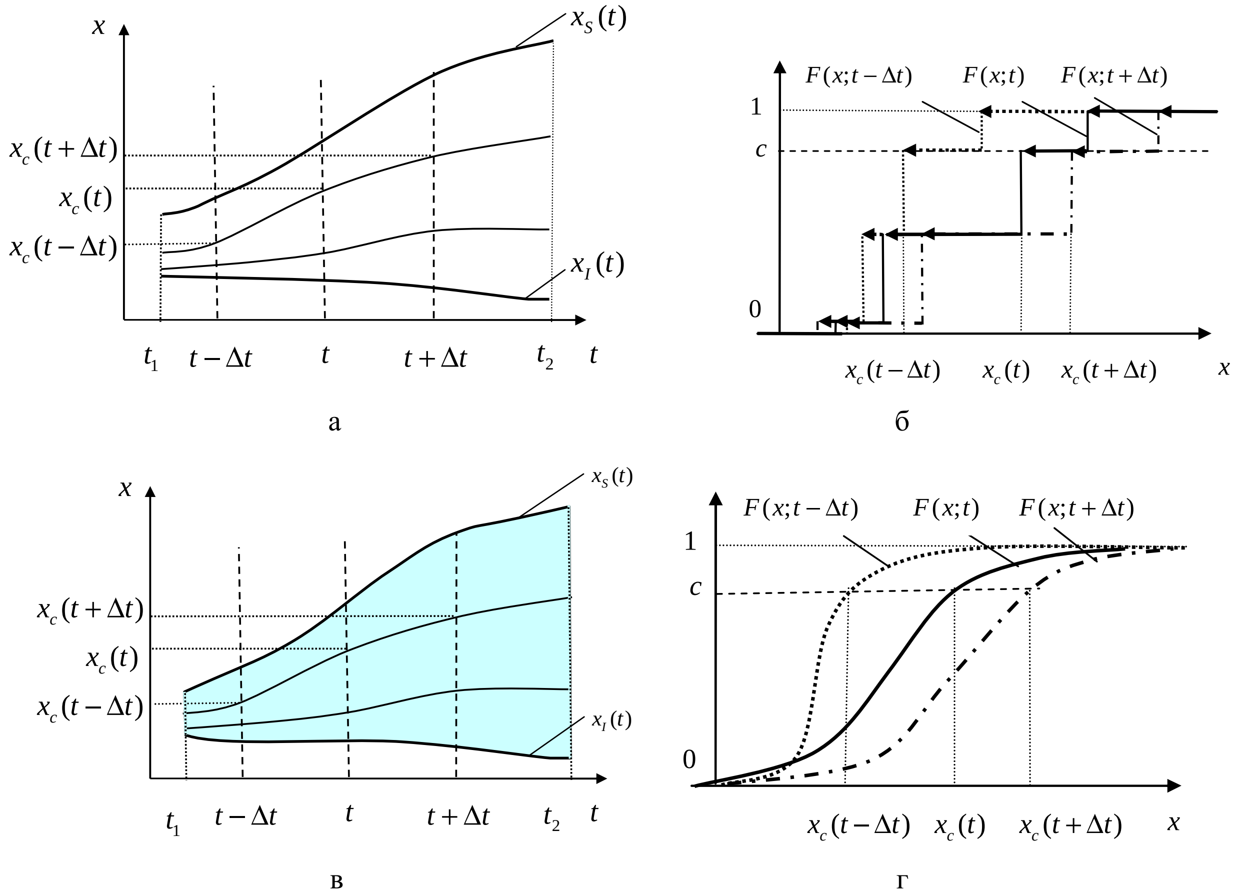


Рис. 3. Многозначные непрерывные функции $\tilde{x}(t)$ (а, в) и соответствующие сечения их функций распределения $F(x;t-\Delta t)$, $F(x;t)$, $F(x;t+\Delta t)$ в точках $t-\Delta t$, t и $t+\Delta t$ (б, г). Тонкими непрерывными линиями на рис. 3а, 3в изображены ветви функций $\tilde{x}(t)$, а полужирными – ее границы

Теорема 1. Ветви многозначной непрерывной функции – непрерывные функции, не имеющие общих точек.

Непрерывность ветвей многозначной непрерывной функции следует из непрерывности функции распределения $F(x;t)$ по t.

Доказательство, что ветви не имеют общих точек, проведем от противного. Пусть многозначная непрерывная функция $\tilde{x}(t)$, описываемая однозначной функцией распределения $F(x;t)$, имеет ветви $x_{c_1}(t)$ и $x_{c_2}(t)$ ($c_2 \neq c_1$), совпадающие хотя бы в одной точке $t = t_0$. При этом $x_{c_1}(t_0) = x_{c_1}(t_0) = x_0$. Это означает, что функция распределения $F(x;t)$ в точке (x_0, t_0) принимает два разных значения (c_1 и c_2), что противоречит условию ее однозначности.

Определение 11. Многозначную непрерывную на интервале $t \in (t_1, t_2)$ функции $\tilde{x}(t)$ будем называть разложимой по ветвям, если ее можно представить множеством ветвей: $\tilde{x}(t) = \{x_c(t),\quad c \in C\}$, где C – множество ветвей.

Обратим внимание, что не все непрерывные многозначные функции допускают разложение по ветвям. Если функция $\tilde{x}(t)$ разложима по ветвям, то она описывается множеством ветвей C и функцией распределения ветвей $F_c(x)$.

8. Производные многозначной функции

Определение 12. Левосторонней производной $\tilde{x}'^{-}(t)$ непрерывной многозначной функции $\tilde{x}(t)$, разложимой по ветвям, будем называть множество левосторонних производных

$$\tilde{x}_c'^{-}(t) = \underset{\Delta t \to +0}{\mathrm{LIM}} \frac{x_c(t) - x_c(t - \Delta t)}{\Delta t}, \tag{3}$$

а правосторонней производной $\tilde{x}'^{+}(t)$ – множество правосторонних производных

$$\tilde{x}_c'^{+}(t) = \underset{\Delta t \to +0}{\mathrm{LIM}} \frac{x_c(t + \Delta t) - x_c(t)}{\Delta t}, \tag{4}$$

рассчитанных в точке t для всех ветвей $c \in C$.

Обобщенные пределы выражений (3) и (4) не обязательно однозначные. Они могут сходиться к множеству чисел или расходиться.

Если для всех $c \in C$ в выражениях (3) и (4) пределы однозначные ($\mathrm{LIM} = \lim$), то $\tilde{x}_c'^{\pm}(t) = x_c'^{\pm}(t)$ и производные $\tilde{x}'^{\pm}(t)$ описывают скорости изменения функции по ветвям при приближении к t слева и справа.

Определение 13. Многозначную непрерывную функцию $\tilde{x}(t)$, разложимую по ветвям, будем называть дифференцируемой в точке t, если все ее производные по ветвям однозначные и для всех ветвей левосторонняя производная совпадает с правосторонней производной: $x_c'^{-}(t) = x_c'^{+}(t) = x_c'(t)$.

Определение 14. Многозначную непрерывную функцию $\tilde{x}(t)$, разложимую по ветвям, будем называть дифференцируемой, если она дифференцируема на всем интервале ее определения.

Производные не обязательно непрерывны и разложимы по ветвям. Для непрерывной разложимой по ветвям производной $\tilde{x}'(t)$ можно определить вторую производную $\tilde{x}''^{\pm}(t)$ и далее итерационно для непрерывной разложимой по ветвям производной $\tilde{x}^{(r)\pm}(t)$ любого r-го порядка – производную $\tilde{x}^{(r+1)\pm}(t)$ $r+1$-го порядка.

Для дифференцируемой функции $\tilde{x}(t)$ с дифференцируемой производной $\tilde{x}'(t)$ вторая производная $\tilde{x}''^{\pm}(t)$ в точке t характеризует ускорения, с которыми изменяется функция $\tilde{x}(t)$ по ветвям при приближении к t слева и справа.

Многозначная дифференцируемая функция $\tilde{x}(t)$, имеющая в точке t_0 однозначные производные $\tilde{x}^{(r)}(t_0)$ любого порядка r, может быть описана множеством ветвей $x_c(t)$, раскладываемых в точке t_0 в ряд Тейлора. При этом функция $\tilde{x}(t)$ может быть описана множеством значений функции $\{x(t_0)\}$ в точке t_0, множеством значений ее производных $\{x^{(r)}(t_0)\}$ и множеством соответствующих функций распределения $F(x;t_0)$, $F(x^{(r)};t_0)$ ($r = 1, 2, \ldots$).

9. Примеры многозначных функций

Особый интерес представляют многозначные функции, однозначные на всем множестве их определения, за исключением некоторого интервала. На рис. 4а–4г приведены примеры функций такого рода.

Эти функции однозначные на интервалах $t < t_1$, $t > t_2$ и многозначные на интервале $t_1 \le t \le t_2$. У функции, приведенной на рис. 4а, многозначность проявляется спонтанно (скачкообразно) и также спонтанно пропадает. В остальных же функциях (рис. 4б–4г) переход к многозначности и затем к однозначности сопровождается процессами ветвления (расщепления), изображенными пунктирными линиями. На этих участках формируются частичные пределы.

Функции, изображенные на рис. 4а и 4б, – разрывные. Если во всех точках области определения функций, изображенных на рис. 4в и 4г, выполняются условия Определения 8, то эти функции непрерывные. Функции на рис. 4а–4в недифференцируемые, а функция на рис. 4в – дифференцируемая (если она непрерывная).

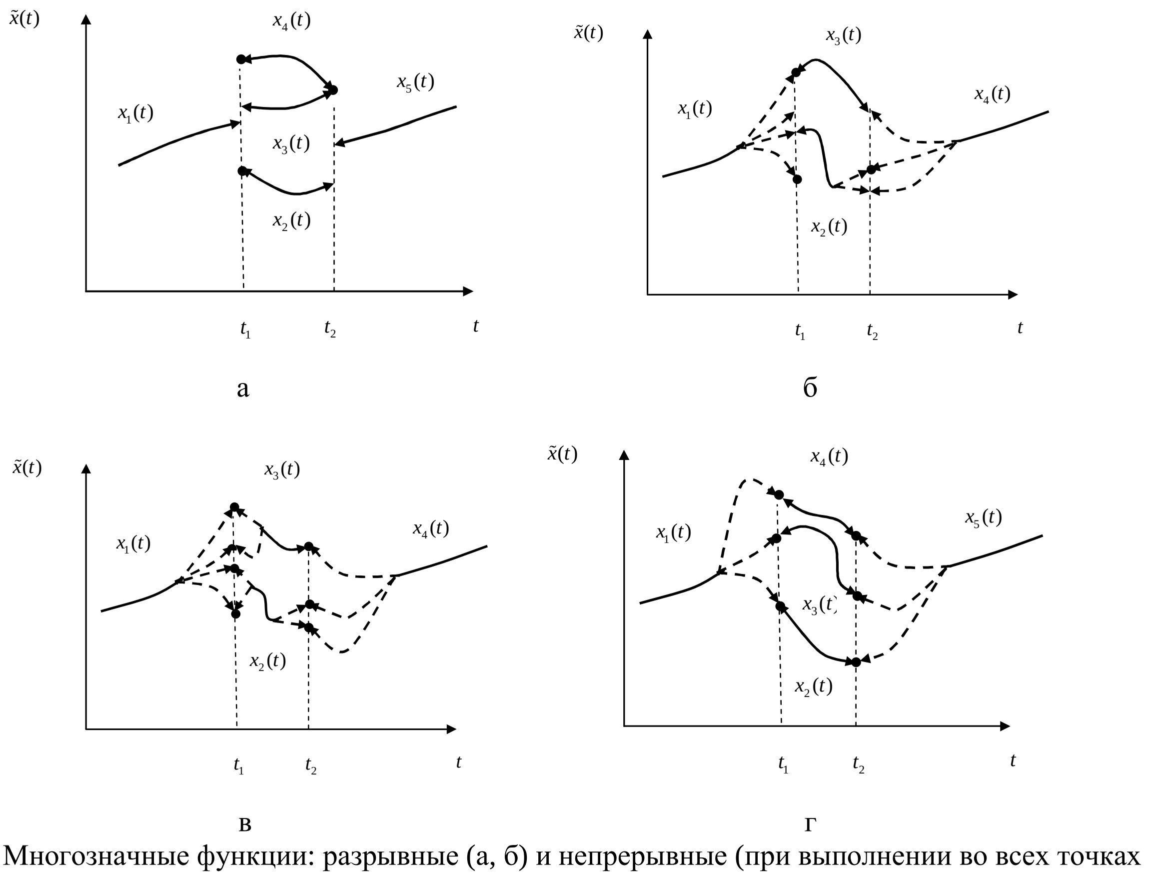


Рис. 4. Многозначные функции: разрывные (а, б) и непрерывные (при выполнении во всех точках области определения функции условий Определения 8) (в, г)

Рассмотрим функцию

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} \sin\left(\dfrac{1}{\omega_1(t-t_1)}\right) & при \quad t < t_1, \\ [-1, 1] & при \quad t_1 \le t \le t_2, \\ \sin\left(\dfrac{1}{\omega_2(t-t_2)}\right) & при \quad t > t_2, \end{cases} \tag{5}$$

однозначную на интервалах $(-\infty, t_1)$, $(t_2, +\infty)$ и многозначную на интервале $[t_1, t_2]$, где $\omega_1 \neq 0$, $\omega_2 \neq 0$ (рис. 5а).

При t, стремящемся к t_1 слева, и t, стремящемся к t_2 справа, однозначные части функции (5) расщепляются. Левосторонняя $F^-(x;t_1)$ и правосторонняя $F^+(x;t_2)$ функции распределения описываются согласно [4] выражением

$$F^-(x;t_1) = F^+(x;t_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arcsin x . \qquad (6)$$

Поэтому, если на интервале $[t_1, t_2]$ функция распределения $F(x;t)$ описывается тем же выражением (6), то функция (5) – непрерывная и дифференцируемая.

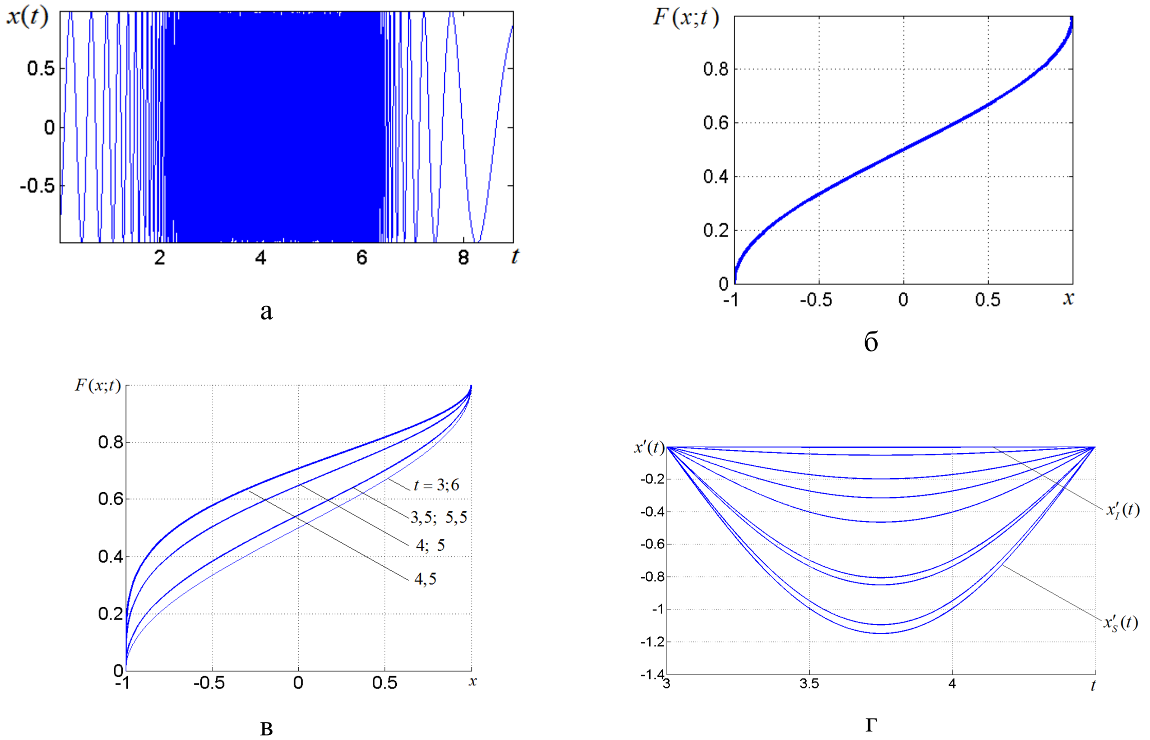


Рис. 5. Многозначная функция (5) (а), ее функции распределения (6) (б), (7) (в) на интервале $[t_1, t_2]$ и производная (8) (г) ($c = \overline{0,1}$ с шагом 0,1): $t_1 = 3$, $t_2 = 6$, $\omega_1 = 10^{-2}$, $\omega_2 = 4 \cdot 10^{-2}$

Производная функции (5) в этом случае – однозначная при любом $t \in (-\infty, +\infty)$:

$$x'(t) = \begin{cases} -\dfrac{1}{\omega_1 (t - t_1)^2} \cos\left(\dfrac{1}{\omega_1 (t - t_1)}\right) & \textit{при} \quad t < t_1, \\ 0 \quad \textit{при} \quad t_1 \leq t \leq t_2, & \\ -\dfrac{1}{\omega_2 (t - t_2)^2} \cos\left(\dfrac{1}{\omega_2 (t - t_2)}\right) & \textit{при} \quad t > t_2. \end{cases}$$

Функция распределения производной $F(x';t) = \operatorname{sign}[x' - x'(t)]$.

Если на интервале $t \in [t_1, t_2]$ функция распределения $F(x;t)$ подчиняется зависимости

$$F(x;t)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arcsin x\right)^{a(t)}, \qquad (7)$$

где $a(t)=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos\frac{2\pi(t-t_1)}{t_2-t_1}$ (рис. 5в), то c-я ветвь $x_c(t)$ функции $\tilde{x}(t)$ описывается выражением

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arcsin x_c(t)\right)^{a(t)}=c\,.$$

Решение этого уравнения $x_c(t)=-\cos\pi\sqrt[a(t)]{c}$. Вычисляя производную, получим

$$x_c'(t)=\frac{\pi^2 c^{1/a(t)}\ln c}{2a^2(t)(t_2-t_1)}\sin\left(\pi c^{1/a(t)}\right)\sin\left(\frac{2\pi(t-t_1)}{t_2-t_1}\right).$$

Отсюда следует, что в данном случае функция (5) непрерывная и дифференцируемая при любом t. На интервале $[t_1,t_2]$ ее производная неоднозначная и описывается выражением

$$\tilde{x}'(t)=\left\{\frac{\pi^2 c^{1/a(t)}\ln c}{2a^2(t)(t_2-t_1)}\sin\left(\pi c^{1/a(t)}\right)\sin\left(\frac{2\pi(t-t_1)}{t_2-t_1}\right),\quad c\in(0,1]\right\}. \qquad (8)$$

Функция распределения этой производной $\tilde{F}(x';t)$ может быть однозначной (тогда $\tilde{F}(x';t)=F(x';t)$) или многозначной.

10. Интеграл от многозначной функции

Определение 15. Первообразной (примитивной) многозначной функцией $\tilde{x}(t)$, определенной на интервале $[a,b]$, будем назвать многозначную дифференцируемую функцию $\tilde{y}(t)$, производная которой во всех точках этого интервала равна функции $\tilde{x}(t)$: $\tilde{y}'(t)=\tilde{x}(t)$.

Как и любая многозначная дифференцируемая функция (а, следовательно, непрерывная и разложимая по ветвям), первообразная $\tilde{y}(t)$ описывается множеством значений $\tilde{S}_{\tilde{y}}(t)$ и функцией распределения значений $F(y;t)$ в точке t.

Определение 16. Неопределенным интегралом от многозначной функции $\tilde{x}(t)$, определенной на интервале $[a,b]$, будем назвать дифференцируемую многозначную функцию $\int\tilde{x}(t)\,\mathrm{d}t=\tilde{y}(t)+C_0$, где C_0 – произвольная постоянная.

Определение 17. Определенным интегралом от многозначной ограниченной непрерывной функции $\tilde{x}(t)$, определенной на интервале $[a,b]$ и разложимой по ветвям, будем называть множество предельных точек

$$\tilde{S}_{\tilde{y}}=\int_a^b\tilde{x}(t)\mathrm{d}t=\left\{\underset{\max\Delta t_i\to 0}{\mathrm{LIM}}\sum_{i=1}^{I}x_c(\xi_i)\Delta t_i,\quad c\in C\right\}, \qquad (9)$$

где $a=t_0<t_1<\ldots<t_I=b$, $\Delta t_i=t_i-t_{i-1}$, $\tilde{x}(\xi_i)$ – значения функции в произвольной точке $\xi_i\in[t_{i-1},t_i]$, а нижней y_I и верхней y_S границами интеграла – соответственно нижнюю и верхнюю границы этого множества.

Определенный интеграл $\int_a^b \tilde{x}(t)\mathrm{d}t$, как и любое множество предельных точек, описывается не только множеством своих значений $\tilde{S}_{\tilde{y}}$, но и функцией распределения значений $\tilde{F}(y)$, в общем случае многозначной.

Особый интерес представляет случай, когда пределы LIM в выражении (9) однозначные. Тогда множество предельных точек

$$\tilde{S}_{\tilde{y}} = \int_a^b \tilde{x}(t)\mathrm{d}t = \left\{ \int_a^b x_c(t)\mathrm{d}t, \quad c \in C \right\}.$$

Заметим, что Определение 17 допускает обобщение на случай несобственных интегралов.

11. Спектр главных значений определенного интеграла

Введенное понятие определенного интеграла многозначной функции может быть полезным для оценки определенных интегралов Римана в случае их расходимости. Такого рода задачи возникают [5], например, при функциональных преобразованиях.

Рассмотрим непрерывную однозначную ограниченную функцию $x(t,\lambda)$ скалярного аргумента t с параметром $\lambda \in \Lambda$, определенную на интервале $t \in [a(\lambda), b(\lambda)]$. Пусть интеграл Римана этой функции сходится при $\lambda \neq \lambda_0$ и расходится при $\lambda = \lambda_0$.

Определение 18. Спектром главных значений определенного интеграла функции $x(t,\lambda)$ при $\lambda = \lambda_0$ будем называть множество предельных точек

$$\tilde{S}^{\circ}_{\tilde{y}} = \mathop{\mathrm{LIM}}_{\lambda \to \lambda_0} \int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} x(t,\lambda)\mathrm{d}t,$$

а функцией распределения этого спектра – функцию

$$\tilde{F}(y) = \mathop{\mathrm{LIM}}_{\lambda \to \lambda_0} \frac{m_\lambda(y)}{m_\lambda},$$

где $m_\lambda(y)$ – количество значений интеграла $\int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} x(t,\lambda)\mathrm{d}t$, меньших y, а m_λ – общее количество значений этого интеграла.

Рассматриваемый спектр главных значений интеграла отличается от главного значения интеграла Римана многозначностью. Границы этого интеграла y_I, y_S представляют собой нижнюю и верхнюю границы множества предельных точек $\tilde{S}^{\circ}_{\tilde{y}}$.

12. Выводы

На основе математического аппарата теории гиперслучайных явлений разработаны принципы описания многозначных величин, последовательностей и функций.

Известные для однозначных функций понятия, в частности, понятия сходимости, непрерывности, дифференцируемости, первообразной, неопределенного и определенного интегралов, обобщены на случай многозначных функций.

Установлена взаимосвязь между многозначными и расходящимися функциями.

Исследованы особенности трансформации однозначных функций в многозначные и, наоборот, многозначных функций в однозначные.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1973. – 832 с.

2. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей / Колмогоров А.Н. – М.: ОНТИ, 1936. – 175 с.

3. Горбань И.И. Теория гиперслучайных явлений: физические и математические основы [Электронный ресурс] / Горбань И.И. – К.: Наукова думка, 2011. – 318 с. – Режим доступа: http://www.immsp.kiev.ua/perspages/ gorban_i_i/index.html.

4. Горбань И.И. Расходящиеся последовательности и функции / И.И. Горбань // Математичні машини і системи. – 2012. – № 1. – С. 106 – 118.

5. Горбань И.И. Статистически неустойчивые процессы: связь с фликкер, неравновесными, фрактальными и цветными шумами / И.И. Горбань // Известия вузов. Радиоэлектроника. – 2012. – Т. 55, № 3. – С. 3 – 18.

Стаття надійшла до редакції 27.03.2012