УДК 517.91

О.С. БИЧКОВ

ДОСТАТНІ УМОВИ СТІЙКОСТІ НЕЧІТКИХ ГІБРИДНИХ АВТОМАТІВ

Анотація. *У статті отримані умови стійкості лінійних гібридних автоматів з нечітким перемиканням. Динаміка в локальних станах описується диференціальними рівняннями за процесом нечіткого блукання. Дослідження стійкості проводиться за допомогою методу функцій Ляпунова.*
Ключові слова: *метод Ляпунова, стійкість, гібридні автомати, теорія можливостей.*

Аннотация. *В статье получены условия устойчивости линейных гибридных автоматов с нечетким переключением. Динамика в локальных состояниях описывается дифференциальными уравнениями по процессу нечеткого блуждания. Исследование устойчивости проводится с помощью метода функций Ляпунова.*
Ключевые слова: *метод Ляпунова, устойчивость, гибридные автоматы, теория возможностей.*

Abstract. *In this paper we obtain conditions for stability of linear hybrid automata with fuzzy switching. The dynamics of local conditions is described by differential equations on the process of fuzzy walk. Stability investigations are conducted by Lyapunov functions method.*
Keywords: *Lyapunov method, stability, hybrid automata, possibility theory.*

1. Вступ

У запропонованій роботі метод функцій Ляпунова поширюється на нечіткі гібридні автомати з циклічним та довільним перемиканням станів. Будемо використовувати термін нечіткість, як пропонується в роботах [1–4]. Стійкість чітких гібридних автоматів вивчалась багатьма авторами [5–7]. В цих роботах для перевірки умов стійкості необхідно знаходити в явному вигляді розв'язок автомата, що суперечить основній ідеї використання методу Ляпунова. В [8] запропоновано інший підхід. Цей підхід розвинуто для дослідження стійкості нечітких гібридних автоматів.

2. Основні означення і попередні результати

Введемо такі позначення:

$\|\cdot\|$ – евклідова норма у просторі R^d (позначення, однакове для всіх d);

$\nabla_f V(y_0) = V'(y_0) f(y_0)$, якщо $V:\mathrm{R}^d \to R$ і $f:\mathrm{R}^d \to \mathrm{R}^d$ або $f:\mathrm{R}^d \to \mathrm{R}^{d\times l}$.

Означення 1. Нечітким гібридним автоматом з нечітким перемиканням (НГАНП) називається кортеж $HA = (Q, Y, PS, g, w, h, Inv, Init, Jump)$, в якому

– Q – скінченна множина дискретних станів;

– $Y = \mathrm{R}^d$ – множина неперервних станів;

– $PS = (X, 2^X, P)$ – простір можливостей з нормованою мірою можливості;

– $w:\mathrm{R}^+ \times X_+ \to \mathrm{R}^l$ – процес нечіткого блукання на просторі PS;

– $g:Q\times\mathrm{R}^d \to \mathrm{R}^d$, $h:Q\times\mathrm{R}^d \to \mathrm{R}^{d\times l}$ – частково визначені функції, за допомогою яких задається неперервна поведінка автомата під час перебування в дискретному стані; будемо позначати $g_q = y \mapsto g(q,y)$ і $h_q = y \mapsto h(q,y)$;

– $Inv: Q \to Y \setminus \{\varnothing\}$ – функція, яка задає множину незмінності дискретного стану;

– $Init \subseteq Q\times Y$ – множина початкових станів;

– $Jump: Q\times Y\times X\to 2^{Q\times Y}$ – відображення, яке задає умову переходу між дискретними станами;

– виконується умова $Inv(q)\subseteq Domg_q\cap Domh_q$ для всіх $q\in Q$.

Означення 2. Фазовою орбітою, яка допускається НГАНП HA, називається кортеж $\chi=(\tau,\bar{q},\bar{y},x)$, в якому $x\in X_+$, $\tau=(I_i)_{i=0}^N\in \text{Н}T$, $\bar{q}:\langle\tau\rangle\to Q$ – відображення і $\bar{y}=(y^i)_{i\in\langle\tau\rangle}$ – індексоване сімейство неперервних відображень $y^i: I_i\to Y$, таких, що:

1) $y^i(t)\in Inv(\bar{q}(i))$ для всіх $t\in[\tau_i,\tau_i')$, якщо $i\in\langle\tau\rangle$ і, крім того, $y^i(\tau_i')\in Inv(\bar{q}(i))$, якщо $i=N(\tau)$ і $\tau_i'\in U(\tau)$;

2) $(\bar{q}(i+1),y^{i+1}(\tau_{i+1}))\in Jump(\bar{q}(i),y^i(\tau_i'),x)$ для всіх $i\in\langle\tau\rangle\setminus\{N(\tau)\}$;

3) функція y^i локально абсолютно неперервна на I_i і задовольняє рівняння $\dot{y}^i(t)=g(\bar{q}(i),y^i(t))+h(\bar{q}(i),y^i(t))\dot{w}(t,x)$ для майже всіх $t\in I_i$;

4) $(q(0),y^0(0))\in Init$. Зауважимо, що в п. 3 функції $t'\mapsto g_{\bar{q}(i)}(y^i(t'))$ і $t'\mapsto h_{\bar{q}(i)}(y^i(t'))$ є визначеними на $I_i\setminus\{\tau_i'\}$, оскільки $y^i(t)\in Inv(\bar{q}(i))$ для всіх $t\in[\tau_i,\tau_i')$ за п. 1.

Розглянемо фіксований НГАНП $HA=(Q,Y,PS,g,w,h,Inv,Init,Jump)$.

Позначимо $Orb(HA)$ – множина фазових орбіт автомата HA, φ_w – функція розподілу процесу нечіткого блукання w.

Зауважимо, що визначення нечіткого гібридного автомата з нечітким переключенням не накладає спеціальних умов на функції g, h і не гарантує існування фазових орбіт автомата.

Означення 3. Стаціонарним станом HA називається точка $y_*\in Y$, така, що:

1) $Jump(q,y_*,x)\subseteq Q\times\{y_*\}$ для всіх $q\in Q$ і $x\in X_+$;

2) для кожного $\chi=(\tau,\bar{q},\bar{y},x)\in Orb$, такого, що $y^0(\tau_0)=y_*$, усі відображення y^i, $i\in\langle\tau\rangle$ є константними і приймають значення y_*. Позначимо $St(HA)$ – множину стаціонарних станів HA.

Означення 4. Стаціонарний стан $y_*\in St(HA)$ називається стійким з рівнем $\overline{\alpha}$, де $\overline{\alpha}:(0,+\infty)\to[0,1)$ – функція, визначена в околі нуля, якщо для довільного числа $\varepsilon>0$ існує число $\delta>0$, таке, що для всіх фазових орбіт $\chi=(\tau,q,y,x)\in Orb(HA)$, де $y=(y^i)_{i\in\langle\tau\rangle}$ і $\tau=(I_i)_{i\in\langle\tau\rangle}$, таких, що $\|y^0(\tau_0)-y_*\|<\delta$ і $P\{x\}>\overline{\alpha}(\varepsilon)$, виконується умова $\|y^i(t)-y_*\|<\varepsilon$ для всіх $i\in\langle\tau\rangle$ і $t\in I_i$.

Будемо позначати $St(HA)$ – множину стаціонарних станів HA.

Позначимо $DF(\mathbb{R}^d)$ – клас усіх частково визначених неперервних функцій $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^+$, які є неперервно диференційованими на внутрішності своєї області визначення.

Для кожної частково визначеної функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ позначимо $Infinv(f)$ частково визначену функцію $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, що задана умовами:

• $g(y)=\inf\{x\in\mathbb{R}\mid f(x)\le y\}$, якщо $y\in\mathbb{R}$ і множина $\{x\in\mathbb{R}\mid f(x)\le y\}$ непорожня і обмежена зверху;

• $g(y)$ не визначено в іншому випадку.

Визначимо $HLo(HA,y_*)$ як множину кортежів $\left(\overline{\alpha},(V_q)_{q\in Q},(v_q)_{q\in Q}\right)$, в яких

$\overline{\alpha}:(0,+\infty)\to[0,1)$ – функція, визначена в околі нуля;

$(V_q)_{q\in Q}$ – індексоване сімейство функцій класу $DF(\mathrm{R}^d)$;

$(\nu_q)_{q\in Q}$ – індексоване сімейство визначених функцій $\nu_q:\mathrm{R}^+\to\mathrm{R}^+$, визначених в околі нуля (включаючи нуль), і виконуються умови, в яких $\psi = Infinv(\overline{\alpha})$:

Lo1) $\{y_*\}\cup O_q\subseteq DomV_q$ для всіх $q\in Q$, де O_q – деяка відкрита надмножина $Inv(q)$, і якщо $(q_2,y_2)\in Jump(q_1,y_1,x)$ для деяких $q_1,q_2\in Q$, $y_1,y_2\in Y$ і $x\in X_+$, то $y_1\in DomV_{q_1}$ і $y_2\in DomV_{q_2}$;

Lo2) $\nu_q(0)=0$ і $\nu_q(w)>0$ для всіх $w\in Dom\nu_q\setminus\{0\}$;

Lo3) $V_q(y_*)=0$ для всіх $q\in Q$;

Lo4), якщо $V_q(y)\le\nu_q(w)$ для деяких $y\in DomV_q$ і $w\in Dom\nu_q$, то $\|y_*-y\|\le w$;

Lo5) для всіх елементів $q\in Q$, $x\in X_+$ і $y\in Inv(q)$, таких, що $P\{x\}\in Dom\psi$ і $V_q(y_1)>\nu_q(\psi(P\{x\}))$, визначено виконується нерівність

$$\nabla_{g_q}V_q(y)\le-\frac{1}{\kappa_w}\sqrt{\varphi_w^{-1}(P\{x\})}\left\|\nabla_{h_q}V_q(y)\right\|,$$

де φ_w – функція розподілу процесу нечіткого блукання w.

Зауважимо, що значення $\nabla_{g_q}V_q(y),\nabla_{h_q}V_q(y)$ визначені для всіх $y\in Inv(q)$, оскільки має місце умова Lo1 і $Inv(q)\subseteq Domg_q\cap Domh_q$.

Нехай $\alpha:(0,+\infty)\to[0,1)$ – задана функція, визначена в околі нуля (яка задає рівень можливості), $\psi = Infinv(\alpha)$ і $D=(0,1]\cap Dom\psi$.

Неформально, функції V_q, $q\in Q$ грають роль функцій Ляпунова локальних станів НГАНП, пристосованих до визначення стійкості з рівнем $\overline{\alpha}$, а функції ν_q, $q\in Q$ мають допоміжний характер і оцінюють поверхню рівня функцій V_q, яка міститься в кулі заданого радіуса з центром у точці y_*.

Введемо такі позначення (де $q_1,q_2\in Q,u\in(0,1]$):

$$J(q_1,q_2,u)=\{(y_1,y_2)\mid\exists x\in X:P\{x\}>u\wedge$$
$$\wedge(q_2,y_2)\in Jump(q_1,y_1,x)\},$$

$$E=\{(q_1,q_2)\in Q\times Q|\exists x\in X:P\{x\}>0\wedge$$
$$\wedge\exists(y_1,y_2):(q_2,y_2)\in Jump(q_1,y_1,x)\}.$$

Відношення E задає можливі перемикання між дискретними станами автомата. Будемо казати, що НГАНП HA має циклічне перемикання, якщо орієнтований граф $(Q,E\setminus\{(q,q)|q\in Q\})$ є орієнтованим циклом.

Теорема 1. (Про стійкість стаціонарних станів циклічних НГАНП). Нехай HA – НГАНП з циклічним перемиканням дискретних станів $\hat{q}_1\to\hat{q}_2\to...\to\hat{q}_n\to\hat{q}_1$. Нехай для стаціонарного стану $y_*\in St(HA)$ існує кортеж

$$HL=\left(\overline{\alpha},(V_q)_{q\in Q},(\nu_q)_{q\in Q}\right)\in HLo(HA,y_*).$$

Припустимо, що виконуються умови:

1) для кожної пари $(q_1,q_2)\in E$ існує число $\delta_{q_1q_2}>0$ і відображення $\vartheta_{q_1q_2}:[0,\delta_{q_1q_2}]\to \mathrm{R}^+$, таке, що $\vartheta_{q_1q_2}(0+)=\vartheta_{q_1q_2}(0)=0$ і для всіх елементів $u\in D$ і пар $(y_1,y_2)\in J(q_1,q_2,u)$ виконуються нерівності:

• $V_{q_2}(y_2)\le v_{q_2}(\psi(u))$, якщо $V_{q_1}(y_1)\le v_{q_1}(\psi(u))$,

• $V_{q_2}(y_2)\le \vartheta_{q_1q_2}(V_{q_1}(y_1))$, якщо $V_{q_1}(y_1)\in[0,\delta_{q_1q_2}]$ і $V_{q_1}(y_1)>v_{q_1}(\psi(u))$;

2) $\lambda(\hat{q}_1\hat{q}_2..\hat{q}_{n-1}\hat{q}_n\hat{q}_1)\le_{SD}\lambda(\hat{q}_1)$, тобто має місце s' – умова.

Тоді стаціонарний стан y_* автомата HA стійкий з рівнем $\overline{\alpha}$.

3. Стійкість стаціонарних станів циклічних нечітких гібридних автоматів з нечітким перемиканням

Нехай задано неімпульсний НГАНП HA з циклічним перемиканням дискретних станів $\hat{q}_1\to\hat{q}_2\to...\to\hat{q}_n\to\hat{q}_1$, а y_* є його стаціонарним станом. Нехай $\alpha:(0,+\infty)\to[0,1)$ – функція, що визначена в околі нуля (яка задає рівень можливості в залежності від радіуса околу стаціонарної точки), $\psi=Infinv(\alpha)$ і $D=(0,1]\cap Dom\,\psi$.

Позначимо $DF_0^\infty(\mathrm{R}^d,y_*)$ – клас усіх локально обмежених частково визначених неперервних і неперервно диференційовних на внутрішності своєї області визначеності функцій $f:\mathrm{R}^d\to\mathrm{R}^+$, таких, що $y_*\in Domf$, $f(y_*)=0$ і $f(y)>0$ при $y\ne y_*$.

Позначимо $DF^\infty(\mathrm{R}^d,y_*)$ – клас усіх функцій з $DF_0^\infty(\mathrm{R}^d,y_*)$, які можуть бути продовжені до радіально необмежених тотальних функцій.

Теорема 2. (Про стійкість стаціонарних станів циклічних НГАНП). Нехай $(V_q)_{q\in Q}$ – сімейство функцій Ляпунова класу $DF_0^\infty(\mathrm{R}^d,y_*)$, таких, що $O_q\subseteq DomV_q$ для кожного $q\in Q$, де O_q – деяка відкрита надмножина $Inv(q)$, і для всіх $q_1,q_2\in Q$, $y_1,y_2\in Y$, $x\in X_+$, таких, що $(q_2,y_2)\in Jump(q_1,y_1,x)$, виконується $y_1\in DomV_{q_1}$ і $y_2\in DomV_{q_2}$.

Нехай $(v_q)_{q\in Q}$ – сімейство функцій $v_q:\mathrm{R}^+\to\mathrm{R}^+$, таких, що $v_q(0)=0$ і $0<v_q(w)<V_q(y)$ для всіх $w>0$ і $y\in DomV_q$, таких, що $\|y_*-y\|>w$.

Припустимо, що для всіх $q\in Q$, $x\in X_+$ і $y\in Inv(q)$, таких, що $P\{x\}\in Dom\psi$ і $V_q(y_1)>v_q(\psi(P\{x\}))$, виконується нерівність

$$\nabla_{g_q}V_q(y)\le-\frac{1}{\kappa_w}\sqrt{\varphi_w^{-1}(P\{x\})}\left\|\nabla_{h_q}V_q(y)\right\|.$$

Припустимо, що для кожної пари $(q_1,q_2)\in E$, рівня $u\in D$ і $(y_1,y_2)\in J(q_1,q_2,u)$, таких, що $V_{q_1}(y_1)\le v_{q_1}(\psi(u))$, виконується $V_{q_2}(y_2)\le v_{q_2}(\psi(u))$. Припустимо також, що значення $d_i(u,v)\in\mathrm{R}^+, i=\overline{1,n}$ визначені для всіх $(u,v)\in D\times[0,v_{\max}]$ і нерівність $d_n(u,v)\le\max\{v_{\hat{q}_1}(\psi(u)),v\}$ виконується для всіх $(u,v)\in D\times[0,v_{\max}]$, де

$$d_1(u,v)=\sup\left\{V_{\hat{q}_2}(y_2)\,|\,(y_1,y_2)\in J(\hat{q}_1,\hat{q}_2,u)\wedge V_{\hat{q}_1}(y_1)\le\max\{v_{\hat{q}_1}(\psi(u)),v\}\right\};$$

$$d_2(u,v)=\sup\left\{V_{\hat{q}_3}(y_3)\,|\,(y_2,y_3)\in J(\hat{q}_2,\hat{q}_3,u)\wedge V_{\hat{q}_2}(y_2)\le\max\{v_{\hat{q}_2}(\psi(u)),d_1(u,v)\}\right\};$$

$$d_3(u,v)=\sup\left\{V_{\hat{q}_4}(y_4)\,|\,(y_3,y_4)\in J(\hat{q}_3,\hat{q}_4,u)\wedge V_{\hat{q}_3}(y_3)\le\max\{v_{\hat{q}_3}(\psi(u)),d_2(u,v)\}\right\};$$

…

$$d_n(u,v) = \sup\left\{V_{\hat{q}_1}(y_1) \mid (y_n, y_1) \in J(\hat{q}_n, \hat{q}_1, u) \wedge V_{\hat{q}_n}(y_n) \le \max\{v_{\hat{q}_n}(\psi(u)), d_{n-1}(u,v)\}\right\}.$$

Тоді стаціонарний стан y_* автомата HA стійкий з рівнем $\overline{\alpha}$.

Доведення. Перевіримо виконання умов теореми (1). Доведемо, що $(\alpha, (V_q)_{q\in Q}, (v_q)_{q\in Q}) \in HLo(HA, y_*)$. З умови теореми випливає, що умови Lo1, Lo3, Lo5 виконуються. Умова Lo2 виконується, оскільки $v_q(w) > 0$ при $w > 0$ і $v_q(0) = 0$. Умова Lo4 виконується, бо за умовою теореми, якщо $\|y_* - y\| > w$, то $V_q(y) > v_q(w)$.

З умови теореми випливає виконання першої нерівності умови 1 теореми(1).

Перевіримо виконання другої нерівності умови 1 теореми (1). Покладемо $\delta_{q_1 q_2} = v_{q_1}(0) > 0$ і визначимо відображення $\vartheta_{q_1 q_2} : [0, \delta_{q_1 q_2}] \to \mathsf{R}^+$ рівністю

$$\vartheta_{q_1 q_2}(v) = \sup\{V_{q_2}(y) \mid y \in DomV_{q_1} \cap DomV_{q_2} \wedge V_{q_1}(y) \le v\}.$$

Зауважимо, що це значення визначено, бо $y_* \in DomV_{q_1} \cap DomV_{q_2}$, і скінченне, оскільки при $V_{q_1}(y) \le v_{q_1}(0)$ виконується $\|y_* - y\| \le 1$, а функція $V_{q_2}(y)$ локально обмежена. Оскільки $V_{q_1}(y) > 0$ при $y \ne y_*$, тоді $\vartheta_{q_1 q_2}(0) = 0$. Оскільки $\vartheta_{q_1 q_2}$ монотонна, тоді значення $\vartheta_{q_1 q_2}(0+)$ визначено. Перевіримо, що $\vartheta_{q_1 q_2}(0+) = 0$. Дійсно, $\inf\limits_{\varepsilon > 0} \vartheta_{q_1 q_2}(v_{q_1}(\varepsilon)) = 0$, оскільки функція V_{q_1} неперервна на своїй області визначення і $V_{q_1}(y_*) = 0$. Але якщо $\vartheta_{q_1 q_2}(0+) \ne 0$, то $\vartheta_{q_1 q_2}(0+) > 0$ і тоді $\inf\limits_{\varepsilon > 0} \vartheta_{q_1 q_2}(v_{q_1}(\varepsilon)) > 0$, бо $v_{q_1}(\varepsilon) > 0$ при $\varepsilon > 0$. Отже, $\vartheta_{q_1 q_2}(0+) = 0$.

Якщо $(y_1, y_2) \in J(q_1, q_2, u)$ для деякого $u \in D$ і $V_{q_1}(y_1) \le \delta_{q_1 q_2}$, то $y_1 = y_2$, бо автомат не імпульсний, і $y_1 \in DomV_{q_1} \cap DomV_{q_2}$. Тому $V_{q_2}(y_2) \le \vartheta_{q_1 q_2}(V_{q_1}(y_1))$ за визначенням $\vartheta_{q_1 q_2}$.

Перевіримо виконання умови 2 теореми (1). Оскільки значення $d_i(u,v) \in \mathsf{R}^+, i = \overline{1,n}$ визначені для всіх $(u,v) \in D \times [0, v_{\max}]$, то для всіх дуг (q_1, q_2),

$$(\overline{c}(q_1) \cdot \overline{c}(q_1, q_2))(u,v) = \sup s((q_1, q_2), u, \overline{c}(q_1)(u,v)) = d_i(u,v),$$

де s – відображення з означення розмітки λ. Тоді

$$\begin{aligned} d_n(u,v) &= (\overline{c}(\hat{q}_1) \cdot \overline{c}(\hat{q}_1, \hat{q}_2) \cdot \overline{c}(\hat{q}_2) \cdot \overline{c}(\hat{q}_2, \hat{q}_3) \cdot \ldots \cdot \\ &\overline{c}(\hat{q}_n) \cdot \overline{c}(\hat{q}_n, \hat{q}_1))(u,v) \le \max\{v_{\hat{q}_1}(\psi(u)), v\} \end{aligned}$$ для всіх $(u,v) \in D \times [0, v_{\max}]$. Звідси маємо

$\max\{v_{\hat{q}_1}(\psi(u)), d_n(u,v)\} \le \max\{v_{\hat{q}_1}(\psi(u)), v\}$, а, отже,

$$\overline{c}(\hat{q}_1)(u, d_n(u,v)) \le \overline{c}(\hat{q}_1)(u,v),$$

звідки для всіх $(u,v) \in D \times [0, v_{\max}]$ виконується

$$\lambda(\hat{q}_1 \hat{q}_2 .. \hat{q}_{n-1} \hat{q}_n \hat{q}_1)(u,v) \le \lambda(\hat{q}_1)(u,v).$$

Тоді за визначенням відношення $\le_{SD}$ виконується $\lambda(\hat{q}_1 \hat{q}_2 .. \hat{q}_{n-1} \hat{q}_n \hat{q}_1) \le_{SD} \lambda(\hat{q}_1)$.

Отже, умови теореми (1) виконуються, тому стаціонарний стан y_* автомата HA стійкий з рівнем $\overline{\alpha}$.

Теорему доведено.

4. Лінійні гібридні автомати зі скалярним процесом нечіткого блукання з нечітким циклічним перемиканням

Нехай заданий гібридний автомат HA з множиною дискретних станів $Q = \{1,2,...,n\}$ і нечітким циклічним перемиканням $1 \to 2 \to 3 \to ... \to n \to 1$. Рівняння в локальних станах мають вигляд $\dot{y}(t,x) = A_i y(t,x) + b_i \dot{w}(t,x), i = 1,2,...,n$, де $A_i \in \mathrm{R}^{d\times d}$, $b_i \in \mathrm{R}^d$ для $i = 1,2,...,n$, w – скалярний процес нечіткого блукання зі строго монотонною функцією розподілу φ.

Припустимо, що множина перемикання $i \to i+1$ для кожного індексу i і рівня можливості $u \in [0,1]$ визначаються як $J(i, i\oplus 1, u) = \{(y,y) \in \mathrm{R}^d \times \mathrm{R}^d \mid -\xi_i(u) \le l_i^T y \le \xi_i(u)\}$ (пари однакових значень (y,y) вказують на те, що автомат не імпульсний), де $i \oplus 1 = i+1$, якщо $i < n$ й $i \oplus 1 = 1$, якщо $i = n$, l_i – вектор (нормалі), $\xi_i(u)$ – функція, що монотонно спадає, обмежена в околі нуля, така, що $\xi_i(1) = 0$. Таким чином, перемикання може відбуватися на деякій відстані від чіткої площини перемикання.

Наведемо достатні умови стійкості нульової траєкторії автомата HA із заданим рівнем $\overline{\alpha} : \mathrm{R} \to [0,1]$. Нехай $\psi = Infinv(\alpha)$ і D – область визначення ψ.

Будемо позначати $A > 0$ – додатно визначена симетрична матриця, $A \ge 0$ – додатно напіввизначена симетрична матриця.

Теорема 3. (Стійкість рівноваги лінійних нечітких циклічних ГА з нечітким перемиканням). Припустимо, що для $i = 1,2,...,n$ існують матриці H_i і числа $\varepsilon_i > 0$, такі, що $H_i > 0$ і $-A_i^T H_i - H_i A_i - 2\varepsilon_i H_i \ge 0$, $i = 1,2,...,n$.

Припустимо, що для кожного $u \in D$ виконується нерівність

$$\varphi^{-1}(u) \le \min_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon_i^2 \lambda_{\min}(H_i)}{b_i^T H_i b_i} \psi^2(u),$$

де $\lambda_{\min}(H_i)$ – найменше власне число матриці H_i, і існує роз'язок системи зазначених нижче нерівностей (1)–(5) щодо скалярних параметрів $\{\lambda_i\}_{i=1}^n, \{\mu_i\}_{i=1}^n, \{\rho_i\}_{i=1}^n, \kappa$, такий, що

$$\lambda_n(...\lambda_3(\lambda_2(\lambda_1\kappa + \mu_1\xi_1^2(u)) + \mu_2\xi_2^2(u)) + \\ + \mu_3\xi_3^2(u)...) + \mu_n\xi_n^2(u) \le \kappa;$$

(1) $\psi^2(u)H_1 - \kappa I \ge 0$;

(2) $\lambda_i H_i + \mu_i l_i l_i^T - H_{i\oplus 1} \ge 0, \quad i = 1,2,...,n$;

(3) $\rho_i I - \lambda_i \psi^2(u) H_i \ge 0, \quad i = 1,2,...,n$;

(4) $\psi^2(u) H_{i\oplus 1} - \mu_i \xi_i^2(u) I - \rho_i \ge 0, \quad i = 1,2,...,n$;

(5) $\lambda_i \ge 0, \mu_i \ge 0, \rho_i \ge 0, \quad i = 1,2,...,n$.

Тоді нульова траєкторія автомата HA стійка з рівнем $\overline{\alpha}$.

Доведення. Скористаємося теоремою (2). Визначимо функції Ляпунова V_i для кожного локального стану автомата рівностями $V_i(y) = y^T H_i y$, $i = 1,2,...,n$, а функції ν_i – рівностями $\nu_i(w) = \lambda_{\min}(H_i) w^2$ для всіх $w \ge 0$, $i = 1,2,...,n$. Легко бачити, що функції ν_i задовольняють вимогам теореми (2), тому перевіримо, що їм задовольняють функції V_i. Достатньо перевірити, що для всіх $i = 1,2,...,n$, $u \in D$ й $y \in \mathrm{R}^d$, таких, що $V_i(y) > \nu_i(\psi(u))$, виконується $\nabla_{g_i} V_i(y) \le -\sqrt{\varphi^{-1}(u)}\,|\nabla_{h_i} V_i(y)|$, де $g_i(y) = A_i y$, $h_i(y) = b_i$ – відповідно чітка частина і коефіцієнт при нечіткій частині рівняння в локальному стані i.

Нехай $u \in D$, $y \in \mathbb{R}^d$ й $V_i(y) > \nu_i(\psi(u))$. Тоді $y^T H_i y > \lambda_{\max}(H_i)\psi^2(u)$, звідки $\psi^2(u) < y^T H_i y / \lambda_{\max}(H_i)$. Оскільки $-A_i^T H_i - H_i A_i - 2\varepsilon_i H_i \ge 0$, тоді

$$\nabla_{g_i} V_i(y) = y^T (A_i^T H_i + H_i A_i) y \le -2\varepsilon_i y^T H_i y.$$

За умовами теореми, $\varphi^{-1}(u) \le \varepsilon_i^2 \lambda_{\min}(H_i) \dfrac{\psi^2(u)}{b_i^T H_i b_i}$. Крім того,

$$|\nabla_{h_i} V_i(y)| = 2|b_i^T H_i y| = 2|b_i^T \sqrt{H_i}\sqrt{H_i}\, y| \le 2\sqrt{b_i^T H_i b_i}\sqrt{y^T H_i y}.$$

Звідси випливає, що

$$\sqrt{\varphi^{-1}(u)}\,|\nabla_{h_i} V_i(y)| \le 2\varepsilon_i \sqrt{\lambda_{\min}(H_i)}\psi(u)\sqrt{y^T H_i y}.$$

Зважаючи, що $\psi^2(u) < y^T H_i y / \lambda_{\max}(H_i)$, одержуємо

$$\sqrt{\varphi^{-1}(u)}\,|\nabla_{h_i} V_i(y)| \le 2\varepsilon_i y^T H_i y.$$

Таким чином,

$\nabla_{g_i} V_i(y) \le -2\varepsilon_i y^T H_i y \le -\sqrt{\varphi^{-1}(u)}\,|\nabla_{h_i} V_i(y)|$. Отже, функції V_i задовольняють вимогам теореми (2).

Визначимо для кожного переходу $i \to i \oplus 1$ число $\delta_{i,i\oplus 1}$ й відображення $\vartheta_{i,i\oplus 1} : [0, \delta_{i,i\oplus 1}] \to \mathbb{R}_+$ рівностями $\delta_{i,i\oplus 1} = 1$, $\vartheta_{i,i\oplus 1}(u) = \dfrac{\lambda_{\max}(R_i^T H_{i\oplus 1} R_i)}{\lambda_{\min}(H_i)} u$.

Тоді $\vartheta_{i,i\oplus 1}(0) = \vartheta_{i,i\oplus 1}(0+) = 0$.

Зафіксуємо $u \in D$. Нехай $\{\lambda_i\}_{i=1}^n, \{\mu_i\}_{i=1}^n, \{\rho_i\}_{i=1}^n, \kappa$ – розв'язок нерівностей (1)–(5) для даного u такий, що

$$\begin{aligned}&\lambda_n(\ldots\lambda_3(\lambda_2(\lambda_1\kappa + \mu_1\xi_1^2(u)) + \mu_2\xi_2^2(u)) + \\ &+ \mu_3\xi_3^2(u)\ldots) + \mu_n\xi_n^2(u) \le \kappa.\end{aligned}$$

Припустимо, що індекс $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ і значення $(y_1, y_2) \in J(i, i\oplus 1, u)$ такі, що $V_i(y_1) \le \nu_i(\psi(u))$. Позначимо $j = i \oplus 1$ й покажемо, що $V_j(y_2) \le \nu_j(\psi(u))$. З нерівності (3) випливає, що для кожного $z \in \mathbb{R}^d$, $\lambda_i \psi^2(u) z^T H_i z \le \rho_i z^T z$. Звідси

$$\lambda_i \psi^2(u) \lambda_{\min}(H_i) \le \rho_i.$$

Аналогічно з нерівності (4) випливає, що $(\rho_i + \mu_i \xi_i^2(u)) z^T z \le \psi^2(u) z^T H_j z$ для всіх $z \in \mathbb{R}^d$, звідки

$$\rho_i + \mu_i \xi_i^2(u) \le \psi^2(u) \lambda_{\min}(H_j).$$

Таким чином,

$$\lambda_i \psi^2(u) \lambda_{\min}(H_i) + \mu_i \xi_i^2(u) \le \psi^2(u) \lambda_{\min}(H_j).$$

З нерівності (2) випливає, що $\lambda_i y_1^T H_i y_1 + \mu_i y_1^T l_i l_i^T y_1 - y_1^T R_i^T H_{i\oplus 1} R y_1 \geq 0$. Звідси

$$V_j(y_2) = y_2^T H_{i\oplus 1} y_2 = y_1^T R_i^T H_{i\oplus 1} R_i y_1 \leq \lambda_i y_1^T H_i y_1 + \mu_i y_1^T l_i l_i^T y_1 =$$
$$= \lambda_i V_i(y_1) + \mu_i (l_i^T y_1)^2 \leq \lambda_i \nu_i(\psi(u)) + \mu_i \xi_i^2(u) = \lambda_i \psi^2(u)\lambda_{\min}(H_i) + \mu_i \xi_i^2(u) \leq$$
$$\leq \psi^2(u)\lambda_{\min}(H_{i\oplus 1}) = \nu_j(\psi(u)).$$

Таким чином, нерівність $V_j(y_2) \leq \nu_j(\psi(u))$ доведена.

Припустимо, що $i \in \{1,2,...,n\}$ й $(y_1, y_2) \in J(i, i\oplus 1, u)$ такі, що $V_i(y_1) \in [0, \delta_{i,i\oplus 1}]$ й $V_i(y_1) > \nu_i(\psi(u))$. Покажемо, що $V_{i\oplus 1}(y_2) \leq \vartheta_{i,i\oplus 1}(V_i(y_1))$. Дійсно,

$$V_{i\oplus 1}(y_2) = y_2^T H_{i\oplus 1} y_2 = y_1^T R_i^T H_{i\oplus 1} R_i y_1 \leq \lambda_{\max}(R_i^T H_{i\oplus 1} R_i) y_1^T y_1 \leq$$
$$\leq \lambda_{\max}(R_i^T H_{i\oplus 1} R_i) \frac{y_1^T H_i y_1}{\lambda_{\min}(H_i)} = \vartheta_{i,i\oplus 1}(V_i(y_1)).$$

Перевіримо умови, що залишилися, теореми (2).

Для кожного $i = 1,2,...,n$ й $v \geq 0$ визначимо:

$$d_i(u,v) = \sup\{V_{i\oplus 1}(z_2) \mid (z_1, z_2) \in J(i, i\oplus 1, u), V_i(z_1) \leq \max\{\nu_i(\psi(u)), d_{i-1}(u,v)\}\} =$$
$$= \sup\{z_1^T R_i^T H_{i\oplus 1} R_i z_1 \mid -\xi_i(u) \leq l_i^T z_1 \leq \xi_i(u), z_1^T H_i z_1 \leq \max\{\nu_i(\psi(u)), d_{i-1}(u,v)\}\},$$

де покладаємо $d_0(u,v) = v$. Помітимо, що значення $d_i(u,v)$ є визначеними й скінченними, оскільки множини, за яких береться точна верхня грань, не порожні (містять нуль-вектор) і обмежені.

Зафіксуємо v й доведемо, що $d_n(u,v) \leq \max\{\nu_1(\psi(u)), v\}$.

Як було показано вище, якщо $(y_1, y_2) \in J(i, i\oplus 1, u)$ й $V_i(y_1) \leq \nu_i(\psi(u))$, то $V_{i\oplus 1}(y_2) \leq \nu_{i\oplus 1}(\psi(u))$. Тому, якщо $d_i(u,v) \leq \nu_{i+1}(\psi(u))$ для якогось $i = 0,1,...,n-1$, то нерівність $d_j(u,v) \leq \max\{\nu_{j+1}(\psi(u)), v\}$ виконується для всіх $j = i, i+1, ..., n$ і, таким чином, $d_n(u,v) \leq \max\{\nu_1(\psi(u)), v\}$.

Тому розглянемо випадок, коли $d_i(u,v) \geq \nu_{i+1}(\psi(u))$ для всіх $i = 0,1,...,n-1$.

З нерівності (2) випливає, що для всіх $i = 1,2,...,n$ й z_1, z_2, таких, що

$$(z_1, z_2) \in J(i, i\oplus 1, u), V_i(z_1) \leq \max\{\nu_i(\psi(u)), d_{i-1}(u,v)\},$$

виконується нерівність

$$V_{i\oplus 1}(z_2) = z_1^T R_i H_{i\oplus 1} R_i z_1 \leq \lambda_i z_1^T H_i z_1 + \mu_i z_1^T l_i l_i^T z_1 \leq$$
$$\leq \lambda_i z_1^T H_i z_1 + \mu_i \xi_i^2(u) \leq \lambda_i \max\{\nu_i(\psi(u)), d_{i-1}(u,v)\} + \mu_i \xi_i^2(u).$$

Таким чином,

$$d_i(u,v) \leq \lambda_i \max\{\nu_i(\psi(u)), d_{i-1}(u,v)\} + \mu_i \xi_i^2(u).$$

Як було припущено вище, $d_{i-1}(u,v) \geq \nu_i(\psi(u))$, тому

$$d_i(u,v) \leq \lambda_i d_{i-1}(u,v) + \mu_i \xi_i^2(u)$$

для всіх $i = 1,2,...,n$. У такий спосіб одержуємо нерівності:

$d_1(u,v) \le \lambda_1 v + \mu_1 \xi_1^2(u)$;

$d_2(u,v) \le \lambda_2(\lambda_1 v + \mu_1 \xi_1^2(u)) + \mu_2 \xi_2^2(u)$;

......

$d_n(u,v) \le \lambda_n(...\lambda_3(\lambda_2(\lambda_1 v + \mu_1 \xi_1^2(u)) + \mu_2 \xi_2^2(u)) + \mu_3 \xi_3^2(u)...) + \mu_n \xi_n^2(u)$.

З нерівності (1) випливає, що $\psi^2(u) z^T H_1 z \ge \kappa z^T z$ для всіх z, тому $\psi^2(u)\lambda_{\min}(H_1) \ge \kappa$. Оскільки $d_0(u,v) = v \ge v_1(\psi(u)) = \lambda_{\min}(H_1)\psi^2(u)$, тоді $v \ge \kappa$. Тому $d_n(u,\kappa) \le \kappa$. З того, що $t \to d_n(u,t)$ – афінна функція вигляду $at+b$, $a,b \ge 0$, одержуємо, що $d_n(u,v) \le v$.

Таким чином, з теореми 2 випливає, що нульова траєкторія HA стійка з рівнем $\overline{\alpha}$.

Теорема доведена.

5. Висновки

У статті досліджуються властивості нечітких гібридних автоматів. Для моделювання нечіткості використовується підхід, що базується на теорії можливостей. Розглянуті питання про стійкість та стійкість розв'язків нечітких гібридних автоматів з циклічною зміною локальних станів. Зміна станів відбувається при досягненні траєкторії певної множини. Доведено відповідні теореми.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бичков О.С. Про один підхід до моделювання нечіткої динаміки / О.С. Бичков // Доповіді НАН України. – 2006. – № 10. – С. 14 – 19.
2. Бычков А.С. Об одном развитии теории возможностей / А.С. Бычков // Кибернетика и системный анализ. – 2007. – № 5. – С. 67 – 72.
3. Bychkov A.S. Modelling and studying fuzzy dynamical systems / A.S. Bychkov // Journal of Mathematical Sciences, Springer New York. – 2009. – Vol. 157, N 3. – P. 466 – 479.
4. Бычков А.С. Дифференциальные уравнения – теоретико-возможностный подход / А.С. Бычков // 7-я междунар. математическая школа «Метод функций Ляпунова и его приложения», (Алушта, 11–18 сентября 2004 г.). – Алушта, 2004. – С. 33.
5. Branicky M. Stability of switched and hybrid systems / M. Branicky // Proc. 33-rd Conf. Decision and Control, Lake Buena Vista, FL. – 1994. – Dec. – P. 3498 – 3503.
6. Daafouz J. Stability Analysis and Control Synthesis for Switched Systems: A switched Lyapunov function approach / J. Daafouz, P. Riedinger, C. Iung // IEEE transactions on automatic control. – 2002. – Vol. 47, N 11. – P. 1883 – 1887.
7. Lin H. Stability and Stabilizability of Switched Linear Systems: A Survey of Recent Results / H. Lin, P.J. Antsaklis // IEEE Transactions on Automatic Control. – 2009. – Vol. 54, N 2. – P. 308 – 322.
8. Бичков О. Дослідження стійкості тривіальних фазових орбіт гібридних автоматів / О. Бичков // Вісник Київського університету. – (Серія «Кібернетика»). – 2005. – № 6. – С. 4 – 8.

Стаття надійшла до редакції 02.04.2012