

ФІЗИКА АТМОСФЕРИ. МЕТЕОРОЛОГІЯ І КЛІМАТОЛОГІЯ

УДК 532.517.4

В.А. Прусов, Т.А. Сологуб

ПАРАМЕТРИЗАЦІЯ ФАЗОВИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ АТМОСФЕРНОЇ ВОЛОГИ

Запропоновано параметричну модель хмаро- та опадоутворення, що дозволяє кількісно оцінити припливи тепла і вологи в процесі хмароутворення. Модель чисельно протестовано шляхом визначення вертикальних профілів метеорологічних величин на обчислювальній сітці за їхніми значеннями, які відомі на стандартних рівнях: рівень станції, 850, 700 і 500 гПа.

Ключові слова: математична модель, вертикальні профілі температури, питомої вологи повітря та концентрації сконденсованої вологи, чисельні експерименти.

Вступ

У попередній роботі авторів [7] запропоновано гідродинамічну модель взаємодії атмосфери і підстильної поверхні під впливом *турбулентного обміну, вимушених конвективних рухів*, що генеровані неоднорідним рельєфом підстильної поверхні за наявності горизонтального руху повітря та *вільних конвективних рухів*, що обумовлені відштовхувальною силою Архімеда на термічній неоднорідній підстильній поверхні.

Рівняння тепло- та масопереносу містять члени, що характеризують джерела (стоки) маси та енергії, які обумовлені фазовими перетвореннями атмосферної вологи. Дійсна картина фазових процесів у реальній атмосфері досить складна. Вона залежить від вертикальних градієнтів тепла і вологи, конвективних рухів у шарах з вологоадіабатичною нестійкістю в інверсійних шарах, від структури хмар, великої кількості дрібнодисперсних складових повітря та ін. Складність процесів, що визначають утворення, розвиток та руйнування хмар призводить до того, що математичні моделі атмосфери не можуть адекватно відтворювати усю цю багатопараметричну стохастичну картину фазових процесів. Тому

побудова напівемпіричних моделей і параметризація процесів фазового перетворення атмосферної вологи все ще залишаються необхідними елементами в чисельному моделюванні циркуляції атмосфери.

Експериментальні і натурні дослідження, починаючи з 50-х років минулого століття, дозволили накопичити та узагальнити багатий емпіричний матеріал про будову хмар різних типів [2]. Найбільша увага в цих дослідженнях приділялася фазовому стану хмар, концентрації хмарних часток, розподілу їх за розмірами та механізмом утворення опадів. Отримані в цих дослідженнях результати зіграли важливу роль у розвитку теорії хмаро- та опадоутворення.

Сучасні методи розрахунку хмарних характеристик, що дозволяють замкнути модель циркуляції атмосфери, можна поділити на чотири основні напрями:

1. Схеми моделювання хмар і опадів, які засновані на елементарних емпіричних зв'язках фазових процесів із дефіцитом точки роси. У них постулюється наступне: хмара утворюється в результаті того, що водяна пара конденсується в разі досягнення стану насичення [5]. Вони дозволяють кількісно оцінювати припливи тепла і вологи в процесі хмароутворення, враховуючи фазові перетворення вологи шляхом обчислення швидкості конденсації. Іноді для визначення кількості хмарності використовується зв'язок між нею і відносною вологістю, встановлений емпірично для різних висот *J. Smagorinsky* [9]. Розрахунок кількості опадів у цих моделях базується на припущенні про повне випадання скрапленої (кристалічної) вологи, що утвориться в процесі конденсації (замерзання).

2. Методи, за яких застосовується розщеплення рівнянь тепло- і масопереносу за фізичними процесами [3] або введення інваріантів (еквівалентної температури і питомого вологовмісту) [1, 4], за допомогою яких виключаються з рівнянь члени, що характеризують джерела (стоки) маси та енергії, які обумовлені фазовими перетвореннями атмосферної вологи.

3. Методи, за яких процеси фазових перетворень моделюються за допомогою рівнянь для швидкості росту хмарних часток, а їхній розподіл задається функціонально, найчастіше як гамма-розподілу [8].

4. Методи, за яких моделюється мікрофізичний стан хмар за допомогою кінетичних рівнянь для функції розподілу хмарних часток за розмірами [6]. Вони дозволяють з тією або іншою точністю моделювати

процеси утворення, росту і випадання хмарних часток завдяки конденсації та коагуляції.

Очевидно, що останні (мікрофізичні) моделі є досконаліші і в перспективі можуть дозволити отримати результати моделювання еволюції хмар (з урахуванням їхньої мікроструктури) більш наближені до реальних процесів. Проте ці моделі все ще знаходяться в стадії становлення і містять велику кількість змінних, які потрібно обчислювати. Тобто вони значно складніші, ніж емпіричні моделі. Адже під час їхнього застосування зростає вартість розв'язання задач моделювання циркуляції атмосфери і прогнозу погоди. Очевидно, що обрання тієї чи іншої моделі замикання залежить від характеру поставленої задачі. Навряд чи доцільно використовувати складні моделі в тих випадках, коли можна обійтися простими та коли не очікується істотного поліпшення результатів. Отже, проблема удосконалення напівемпіричних (параметричних) моделей процесів хмаро- та опадоутворення була і є актуальною.

Параметрична модель хмароутворення

Якщо атмосфера насичена водяною парою, умови стійкості сухої атмосфери справедливі тільки для вологого повітря, що опускається, тому що кількість вологи, що може міститися в об'ємі, який розглядається, як правило, під час опускання зростає. Навпаки, у повітрі, що піднімається, кількість вологи, яка може втримуватися в об'ємі, зменшується. Останнє приводить до процесів конденсації й виділення прихованого тепла. Внаслідок цього плавучість об'єму зростає порівняно з тією, котра спостерігалася б без конденсації. Для рівноваги системи вода – водяна пара або лід – водяна пара необхідно, щоб у повітрі пружність пари відповідала насиченню. У диференціальній формі залежність пружності насиченої пари E від температури T , що отримана на підставі термодинамічних законів, описується рівнянням Клаузіуса-Клапейрона:

$$\frac{dE}{dT} = \frac{LE}{R_{II}T^2}, \quad (1)$$

де $R_{II} = 461,50 \text{ Дж} \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ – універсальна газова постійна для водяної пари.

Для визначення пружності насиченої пари над водою проведемо інтегрування (1) в межах від температури $T_0 = 273^\circ$ і відповідного їй

значення пружності насиченої пари $E_0 = 6,1078 \text{ гПа}$ до деяких значень T та E . Приймаючи в першому наближенні $L = \text{const}$, одержуємо:

$$\ln \frac{E}{E_0} = -\frac{L}{1,6R} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) = \frac{L}{1,6RT_0} \frac{T - 273,15}{T}, \quad (2a)$$

або

$$E = E_0 \exp \left(C_B \frac{T - 273,15}{T} \right), \quad (2б)$$

де

$$C_B = \frac{L}{1,6RT_0}.$$

Для визначення пружності насиченої пари над льодом E_L від температури T замість теплоти випаровування L необхідно брати теплоту сублимації $L_L = L + L_{пл}$, де $L_{пл} = 335,008 \text{ Дж} \cdot \text{кг}^{-1}$ – теплота плавлення льоду. Тоді аналогічно (2a) отримаємо:

$$\ln \frac{E_L}{E_0} = -\frac{L + L_{пл}}{1,6R} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) = \frac{L + L_{пл}}{1,6RT_0} \frac{T - 273,15}{T}, \quad (3a)$$

або роблячи таке ж перетворення, як і вище, знаходимо:

$$E_L = E_0 \exp \left(C_L \frac{T - 273,15}{T} \right), \quad (3б)$$

де

$$C_L = \frac{L + L_{пл}}{1,6RT_0}.$$

Знайдемо різницю між пружністю насиченої пари над переохолодженою водою E і пружністю насиченої пари над льодом E_L за тієї ж температури. Цю різницю, з огляду на (2б) і (3б), можна представити у вигляді:

$$\Delta E = E_0 \left[\exp \left(C_B \frac{T - 273,15}{T} \right) - \exp \left(C_L \frac{T - 273,15}{T} \right) \right].$$

Для знаходження екстремуму функції $\Delta E(T)$ проведемо диференціювання лівої та правої частин отриманої рівності по T і порівняємо $\partial(\Delta E)/\partial T$ до нуля:

$$\frac{273,15E_0}{T^2} \left[C_B \exp\left(C_B \frac{T - 273,15}{T}\right) - C_L \exp\left(C_L \frac{T - 273,15}{T}\right) \right] = 0.$$

Множник $273,15E_0/T^2$ не дорівнює нулю, отже, нулю дорівнює вираз у квадратних дужках. Звідси отримаємо:

$$T = 273,15 \left[1 - \frac{\ln(C_B/C_L)}{C_L - C_B} \right]^{-1}. \quad (4)$$

У результаті маємо, що за $C_B = 19,80$ і $C_L = 22,46$ максимальне значення різниці $\Delta E(T)$ становить близько $0,269 \text{ гПа}$ і відповідає точці з температурою $T \approx 260,4 \text{ °K}$ або $t \approx -12,6 \text{ °C}$. Далі значення цієї температури ми будемо приймати за граничну температуру, нижче якої процес конденсації замінюється сублімацією.

Припустимо, що зміна температури деякого елементарного об'єму вологого атмосферного повітря, у якому водяна пара досягла стану насичення q_n і має місце конденсація (або сублімація), відбувається без обміну теплом між виділеною масою повітря й навколишнім середовищем. Припустимо також, що продукти конденсації (або сублімації) при цьому залишаються всередині розглянутого елементарного об'єму повітря й загальний його вологовміст залишається незмінним, а змінюється лише співвідношення між газоподібною й сконденсованою фазами водяної пари. Інакше кажучи, обмежимося випадком вологоадіабатичного процесу, при якому зміна температури, що пов'язана зі зміною вологості $dq(p, T)$ в насиченому повітрі, відповідно до першого закону термодинаміки описується рівнянням:

$$c_p d\bar{T} - \frac{1}{\rho} d\bar{p} + Ldq = 0,$$

яке можна перетворити з урахуванням потенціальної температури $\bar{\theta}$ в наступне співвідношення:

$$\frac{c_p \bar{T}}{\bar{\theta}} d\bar{\theta} + Ldq = 0.$$

Звідки одержуємо:

$$d\bar{\theta} = -\frac{L}{c_p} \left(\frac{p_{00}}{p} \right)^{R/c_p} dq. \quad (5)$$

Тут, як і в системі рівнянь, яким задовольняє математична модель циркуляції атмосфери [7], L – прихована теплота випаровування, що обчислюється за формулою:

$$L = [2500,8 - 2,3(T - 273)] \times 10^3 \text{ Дж} \cdot \text{кг}^{-1} \quad (6a)$$

За температур $t < -12,6 \text{ }^\circ\text{C}$, коли замість води утворюється лід, q_n замінюється на відповідне значення для льоду $q_{л}$, і замість прихованої теплоти випаровування вводиться до розгляду прихована теплота сублімації:

$$L = 2,839 \times 10^6 - 3,6(T - 238)^2 \text{ Дж} \cdot \text{кг}^{-1}. \quad (6б)$$

У загальному випадку, під час зміни значення q_n , коефіцієнт

$$A = -\frac{L}{c_p} \left(\frac{p_{00}}{p} \right)^{R/c_p}$$

у рівнянні (5) змінюється, але за фіксованого значення q_n коефіцієнт A є деяке число, що не залежить від dq . Із теорії математичного аналізу відомо, що якщо $A \neq 0$, тобто якщо $d\bar{\theta} \neq 0$, тоді диференційовність функції $\bar{\theta}$ в точці q_n означає, що головна частина збільшення функції $\Delta\bar{\theta}$ в точці q_n є лінійною функцією відносно Δq . При цьому збільшення $\Delta\bar{\theta}$ й диференціал $d\bar{\theta}$ є еквівалентними нескінченно малими за $\Delta q \rightarrow 0$. Отже, диференціальне рівняння (5) може бути представлено у вигляді:

$$\Delta\bar{\theta} = -\frac{L}{c_p} \left(\frac{p_{00}}{p} \right)^{R/c_p} \Delta q + \alpha(\Delta q), \quad (7)$$

де $\alpha(\Delta q) = o(\Delta q)$ за $\Delta q \rightarrow 0$.

Формула (7) дозволяє знаходити величину зміни температури, якщо відома величина зміни вологості, що відбуваються в результаті фазових перетворень у вологому атмосферному повітрі, коли водяна пара досягає стану насичення q_n .

Велика кількість експериментальних досліджень, проведених у лабораторних і природних умовах, показує, що для конденсації водяної пари в атмосфері необхідно, щоб пружність пари в повітрі e була більша, ніж пружність пари E над поверхнею часточок нової фази, що утворюються, і щоб у повітрі були дрібні часточки, які могли б служити центрами конденсації. При цьому краплі, що утворилися на ядрах, можуть зростати,

утворюючи хмарні краплі тільки за умови перенасичення, тобто, коли відносна вологість $f = e/E$ у повітрі буде більше як 1. Перенасичення для процесу сублімації за наявності крижаних кристалів повинне визначатися стосовно поверхні льоду. Оскільки пружність пари над льодом менша, ніж над водою, то за низьких від'ємних температур, перенасичення над їхньою поверхнею може наступити й у разі відносної вологості в повітрі менше як 1 стосовно плоскій поверхні переохолодженої води.

Введемо в розгляд так зване критичне значення відносної вологості $f_{кр}$, вище якого завжди буде відбуватися конденсація водяної пари в атмосфері. Зв'яжемо $f_{кр}$ з відношенням пружностей насиченої пари над льодом E_l і над переохолодженою водою E за тієї ж температури формулою:

$$f_{кр} = -\frac{E_l(T)}{E(T)}. \quad (8)$$

Значення E і E_l , що обчислюються за формулами (2б) і (3б), не збігаються з експериментальними даними. На основі експериментальних даних, наведених у Смітсоніанівських метеорологічних таблицях, пропонуються емпіричні формули. Пружність насиченої водяної пари $E(T)$ – тиск насиченої водяної пари над плоскою поверхнею води для температур в інтервалі ± 40 °C можна розрахувати за формулою:

$$E(T) = \gamma \exp[(0,08006T - 20,047)/(0,00412T - 0,12476)]. \quad (9)$$

Значення множника γ , що входить у (9), для атмосферних умов, які розглядаються, перебуває в межах $1 \div 1,006$, і може бути знайдене за допомогою наступної залежності:

$$\gamma = 1 + p[4,5 + 0,0006(T - 273)^2] \cdot 10^{-6}. \quad (10)$$

Пружність насиченої водяної пари $E_l(T)$ над плоскою поверхнею льоду в інтервалі температур від 0 до -40 °C задовольняє співвідношенню:

$$E_l(T) = E(T) \exp(0,00422T - 1,15206). \quad (11)$$

Формули (9)-(11) забезпечують точність $\varepsilon \sim 0,002$ у зазначених вище інтервалах температур.

Підставимо у формулу (8) рівності (9) та (11). У результаті одержимо:

$$f_{кр} = E_l(T)/E(T) = \exp(0,00422T - 1,15206). \quad (12)$$

З отриманої формули видно, що відносна вологість $f_{кр}$ значно зменшується в разі зниження температури. Так, якщо за температури $t = 0\text{ }^{\circ}\text{C}$ відносна вологість $f_{кр} = 1$, то за $t = -30\text{ }^{\circ}\text{C}$ вона знижується до значення $f_{кр} = 0,88$. У ході чисельного моделювання хмарності ми будемо приймати, що насичення, тобто конденсація (якщо $t \geq -12,6\text{ }^{\circ}\text{C}$) або сублімація (якщо $t < -12,6\text{ }^{\circ}\text{C}$) водяної пари, наступає в тих випадках, коли відносна вологість f більше або дорівнює значенню $f_{кр}$, що обчислюється за допомогою формули (12).

У зв'язку з викладеним, повернемося до питання обчислення величини зміни питомої вологості Δq , що входить у рівність (7) для вологого повітря, в якому водяна пара досягає стану насичення. Виконаємо нижченаведений ланцюжок найпростіших перетворень:

$$\begin{aligned} \Delta q &= q - q_H = \xi \left[\frac{e}{p - (1 - \xi)e} - \frac{E}{p - (1 - \xi)E} \right] = \\ &= \xi \frac{E}{p - (1 - \xi)E} \left[\frac{e p - (1 - \xi)E}{E p - (1 - \xi)e} - 1 \right] \approx \\ &\approx \xi \frac{E}{p - (1 - \xi)E} (f - f_{кр}), \end{aligned} \quad (13)$$

де $\xi = R/R_{\Pi} = 0,62197$ і враховано, що в природі завжди $p \gg e$ і $p \gg E$.

Під час обчислення значень зміни температури по формулі (7) і зміни питомої вологості по формулі (13), що відбуваються внаслідок фазових перетворень у вологому повітрі, в якому водяна пара досягає стану насичення, необхідно враховувати, що зміна температури призводить до зміни умов насичення. Отже, ці обчислення необхідно виконувати з використанням методів послідовних наближень (ітерацій).

Параметрична модель опадоутворення

Під час побудови математичної моделі опадів будемо припускати, що незалежно від походження хмар і хмарних систем (фронтальних, конвективних, орографічних та ін.), відомі такі параметри:

- потужність (вертикальний розмір) хмари;
- питома водність $c = \Delta q$;
- вертикальний висхідний рух w ;
- температура θ на рівні основи хмари;

- температура θ на рівні верхньої межі хмари.

Якщо інтенсивність конденсації Δq дорівнює інтенсивності опадів, то очікувана інтенсивність опадів I у вертикальному стовпі атмосфери оцінюється за формулою:

$$I = - \int_{z_0}^z \left(\rho \frac{\partial c}{\partial t} \right) dt. \quad (14)$$

Нехтуючи змінами товщини хмарного шару, відзначаємо, що попередній вираз можна задати у вигляді:

$$I = - \int_{z_0}^z \left(\rho w \frac{\partial c}{\partial z} \right) dz, \quad (15)$$

де w – вертикальна швидкість, ρ – щільність хмари.

Звертаючись до рівняння стану вологого повітря

$$\rho = \frac{p}{RT} \left(1 - 0,378 \frac{e}{p} \right) = \frac{p}{RT(1 + 0,608q)},$$

остаточно отримуємо:

$$I = - \int_{z_0}^z \left(\frac{wp}{RT(1 + 0,608q)} \frac{\partial c}{\partial z} \right) dz. \quad (16)$$

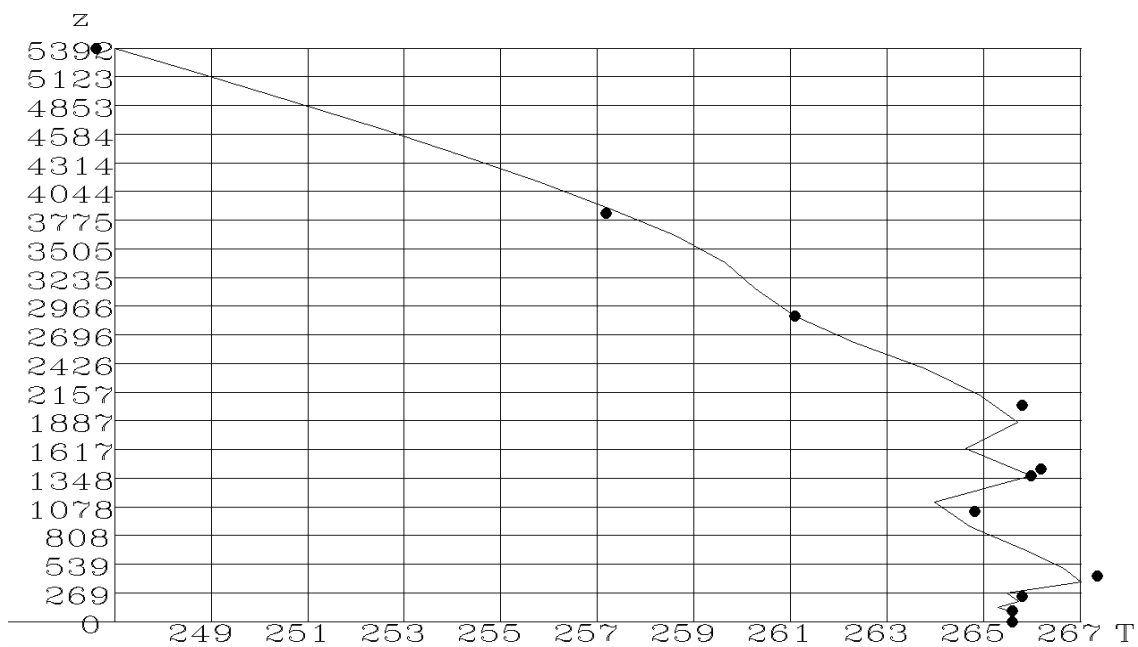
Експериментальна апробація моделі

Побудовану модель хмаро- та опадоутворення було чисельно протестовано, як і в роботі [7], шляхом визначення вертикальних профілів метеорологічних величин на обчислювальній сітці за їхніми значеннями, які відомі на стандартних рівнях. Як вхідні дані застосовувалися дані радіозондування на стандартних рівнях: рівень метеорологічної станції, 850, 700 і 500 гПа. Проміжні дані радіозондування слугували для оцінки чисельних результатів.

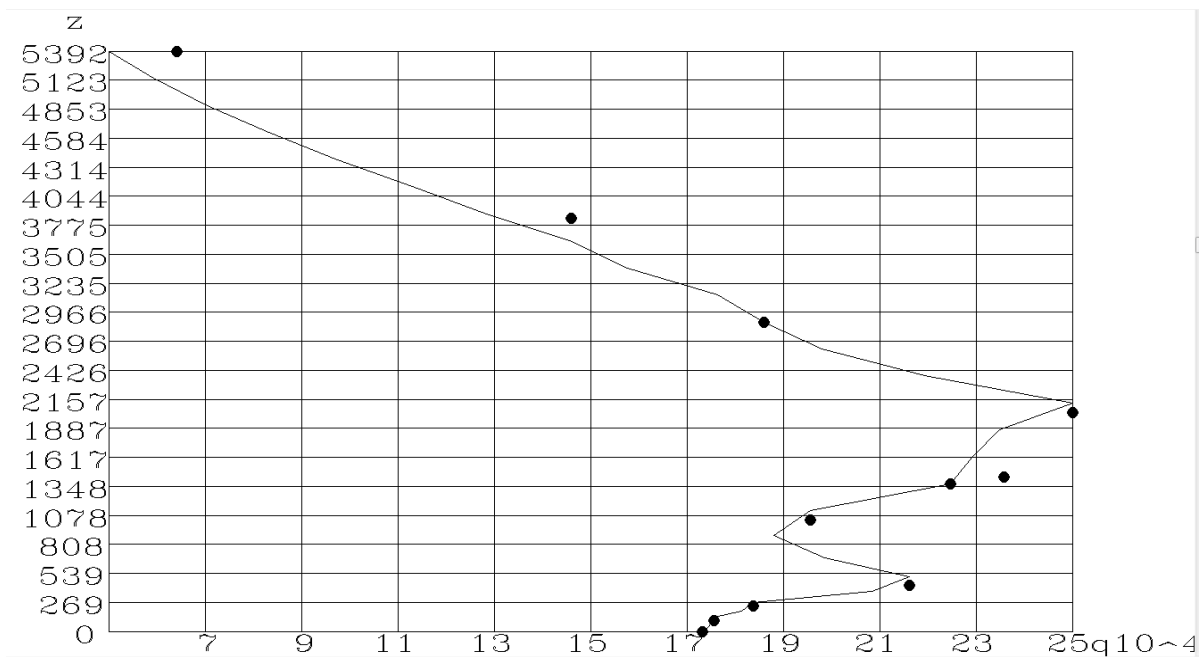
Для прикладу на рис. 1а-1в наведено вертикальні профілі температури T , питомої вологи повітря $q \cdot 10^4$ та концентрації сконденсованої вологи $c \cdot 10^5$. На цих рисунках суцільними лініями позначено розрахункові результати, а крапками – дані радіозондування, якщо вони є. Як видно з рисунків, розрахункові значення

метеорологічних величин T та q добре узгоджуються з даними радіозондування в пограничному шарі атмосфери.

а)



б)



с)

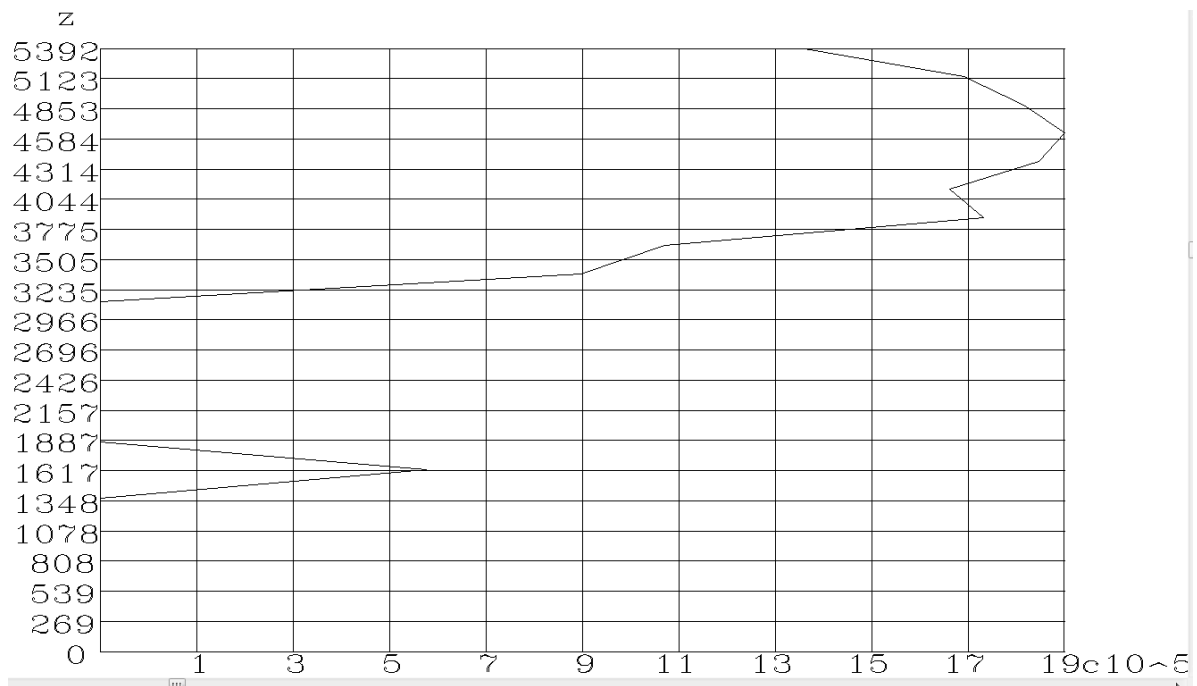


Рис. 1. Результати заповнення значень: температури T – (а); питомої вологості $q \cdot 10^4$ – (б) та концентрації сконденсованої вологи $c \cdot 10^5$ – (в) у вертикальному стовпі атмосфери у вузли обчислювальної сітки за даними радіозонду о 18 год 03.01.1989 р.

Висновки

У запропонованій роботі проведено уточнення наступних величин:

1. Граничного значення температури, нижче якої процес конденсації заміняється сублімацією.

2. Граничного значення відносної вологості (12), вище якого починається конденсація (кристалізація).

3. Пов'язаних між собою значень змін температури (7) і питомої вологості (13).

Все це дозволило отримати чисельні результати, в яких розрахункові значення метеорологічних величин T та q добре узгоджуються з фактичними даними в пограничному шарі атмосфери.

* *

1. Дымников В.П. О некоторых особенностях численного решения уравнения переноса влажности в атмосфере // Изв. АН СССР. Сер. Физика атмосферы и океана. – 1969. – Т. 5. – № 6. – С. 1-9.

2. *Мазин И.П., Шметер С.М.* Облака, строение и физика образования. – Л.: Гидрометеиздат, 1978. – 279 с.
3. *Марчук Г. И.* Численные методы в прогнозе погоды. – Л.: Гидрометеиздат, 1967. – 356 с.
4. *Матвеев Л.Т.* Динамика облаков. – Л.: Гидрометеиздат, 1981. – 311 с.
5. *Мейсон Б.Дж.* Физика облаков. – Л.: Гидрометеиздат, 1961. – 541 с.
6. *Пірнач Г.М.* Чисельне моделювання хмар та опадів у системах атмосферних фронтів. – К.: Ніка-Центр, 2008. – 295 с.
7. *Прусов В.А., Сологуб Т.А.* Модель вертикального столпа горизонтально однородной атмосферы // Наук. пр. УкрНДГМІ. – 2010. – Вип. 259. – С. 61-72.
8. *Сергеев Б.Н., Смирнов В.И.* Численное моделирование микрофизических процессов в капельных конвективных облаках: Обзор // Тр. ЦАО. – 1980. – Вып. 137. – С. 3-26.
9. *Smagorinsky J.* On the dynamical prediction of large-scale condensation by numerical methods // Geophys. Monogr., Washington. – 1960. – № 5. – P. 71-78.

*Український науково-дослідний
гідрометеорологічний інститут, Київ*

В.А. Прусов, Т.А. Сологуб

Параметризация фазовых превращений атмосферной влажности

Предложено параметрическую модель облако- и осадкообразования, которая численно протестированная путем определения вертикальных профилей метеорологических величин на вычислительной сетке по их значениям, которые известны на стандартных уровнях: уровень станции, 850, 700 и 500 гПа.

Ключевые слова: математическая модель, вертикальные профили температуры, удельной влаги воздуха и концентрации сконденсированной влаги, численные эксперименты.

V. Prusov, T. Sologub

Parametrization of phase transformations of atmospheric humidity

The self-reactance a model is offered cloud - and sludging, that is numeral tested by determination of vertical profiles of meteorological sizes on a calculable net after their values that is known on standard levels: level of the station, 850, 700 and 500 hPA.

Keywords: the mathematical model, vertical profiles of temperature, specific humidity of air and concentration of the condensated moisture, numeral experiments.