

Г.В. ДОНЧИЦ, Н.Н. ДЗЮБА, М.И. ЖЕЛЕЗНЯК, Д.М. ТРИБУШНЫЙ

## СИСТЕМА ПОДДЕРЖКИ УПРАВЛЕНИЯ КАЧЕСТВОМ ВОДЫ РЕКИ ИНГУЛЕЦ, ОСНОВАННАЯ НА ОДНОМЕРНЫХ МОДЕЛЯХ ДИНАМИКИ ВОДЫ И ПЕРЕНОСА ПРИМЕСЕЙ

**Abstract:** Management support system was developed to control water quality management in Ingulets River basin. The system allows selecting the best periods for mine water releases and ecologically favorable water releases of Kahovka HPP. The above mentioned releases have big influence on the pollution of the lower Ingulets and Dniro rivers. Modeling block of the system is based on a numerical solution of the one-dimensional Saint-Venant equations, which describe hydraulic characteristics of the river stream, and on a numerical solution of the advection and diffusion pollution transport equations. The above equations were solved using a high-order conservative finite-difference method based on the TVD/MUSCL numerical scheme. Software implementation of the system was done using C++ programming language. The results of a system tests were done using measured data of the chlorides concentration in the Ingulets River basin. It was shown that water quality in the lower Ingulets and Dnieper River during polluted water releases from the mines can be improved by selection of the best favorable regimes of the water releases on the Kahovka HPP dam. Graphical interface of the system was developed using COM technologies and Microsoft Excel application taking into account recommendations from the State Water Committee of Ukraine which uses the system in the time of yearly releases of the polluted mine water.

**Key words:** control system, decision support system for ecology, software systems, simulation of the water pollution, partial differential equations, finite-difference methods, Saint-Venant equations, advection-diffusion equation, pollution transport.

**Анотація:** Розроблено систему підтримки управління якістю води ріки, Інгулець, яка дозволяє вибирати найбільш екологічно безпечні періоди скидів шахтних вод і екологічно сприятливі режими скидів води Каховської ГЕС, що впливають на забруднення нижнього Інгульця й ріки Дніпро. Моделюючий блок системи базується на чисельному рішенні одномірних рівнянь Сен-Венана, які описують гідравлічні характеристики річкового потоку, й чисельному рішенні рівнянь адвективно-дифузійного переносу домішок. Для рішення рівняння переносу використовувався консервативний кінцево-різницевий метод підвищеної точності MUSCL/TVD. Програмна реалізація системи виконана мовою програмування C++. Представлено результати тестування системи на даних вимірів концентрації хлоридів у басейні ріки Інгулець. Показано, що вибором екологічно сприятливих режимів скидів води через греблю Каховської ГЕС можна поліпшити якість води в нижньому Дніпрі й Інгульці в періоди поширення шахтних вод. Інтерфейс користувача системи реалізований з використанням технології COM-технології та Microsoft Excel, з урахуванням побажань фахівців Госводхоза України, які експлуатують систему в періоди щорічних скидів шахтних вод.

**Ключові слова:** системи керування, системи підтримки прийняття рішень в екології, програмні системи, моделювання забруднення вод, рівняння в частинних похідних, кінцево-різницеві методи, рівняння Сен-Венана, адвективно-дифузійне рівняння, перенос домішок.

**Аннотация:** Разработана система поддержки управления качеством воды реки Ингулец, позволяющая выбирать наиболее экологически безопасные периоды сброса шахтных вод и экологически благоприятные режимы расходов воды Каховской ГЭС, влияющие на загрязнение нижнего Ингульца и реки Днепр. Моделирующий блок системы основан на численном решении одномерных уравнений Сен-Венана, описывающих гидравлические характеристики речного потока, и численном решении уравнений адвективно-диффузионного переноса примесей. Для решения уравнения переноса использовался консервативный конечно-разностный метод повышенной точности MUSCL/TVD. Программная реализация системы выполнена на языке программирования C++. Представлены результаты тестирования системы по данным измерений концентрации хлоридов в бассейне реки Ингулец. Показано, что выбором экологически благоприятных режимов сбросов воды через плотину Каховской ГЭС можно улучшить качество воды в нижнем Днепре и Ингульце в периоды распространения шахтных вод. Интерфейс пользователя системы реализован с использованием COM-технологии и Microsoft Excel, с учетом пожеланий специалистов Госводхоза Украины, которые эксплуатируют систему в периоды ежегодных сбросов шахтных вод.

**Ключевые слова:** системы управления, системы поддержки принятия решений в экологии, программные системы, моделирование загрязнения вод, уравнения в частных производных, конечно-разностные методы, уравнения Сен-Венана, адвективно-диффузионное уравнение, перенос примеси.

### 1. Введение

Горнодобывающая и горнообогатительная промышленность Криворожского рудного бассейна испытывает постоянную потребность в воде, используемой для очистки руд от солей. Основным

источником воды в регионе является река Ингулец, протекающая по Криворожской, Николаевской и Херсонской областях и впадающая в Днепр выше города Херсон.

Согласно технологическому процессу, после промывки руды вода собирается в специальные хранилища (отстойники) для осаждения взвешенных частиц, что способствует



Рис. 1. Схема речной сети

уменьшению загрязнения Ингульца при последующих сбросах из хранилищ. Такие сбросы проводятся ежегодно в период весенних паводков, что приводит к резкому возрастанию концентрации хлоридов в реке. С увеличением объемов производства все более частыми стали сбросы шахтных вод, во время которых концентрация хлоридов в реке превышает максимально допустимые концентрации более чем в десять раз. Таким образом, весьма актуальной является проблема управления сбросами, выявления приемлемого режима выпуска промышленных вод. В нижней части реки в районе населенного пункта Снигирёвка (рис. 1) установлена насосная станция, подающая воду в канал, соединяющий Ингулец с Октябрьским водохранилищем – основным источником питьевой воды для города Николаева.

При работе насосов возможен подъем вод от места впадения Ингульца в Днепр к насосной станции. Другим фактором, влияющим на гидравлический режим нижнего Ингульца, являются сбросы воды через плотину Каховской ГЭС. Резкие попуски воды Каховской ГЭС также приводят к подъему днепровских вод вверх по течению Ингульца. В периоды весенних сбросов шахтных вод специалистам Госводхоза Украины приходится решать сложную задачу управления качеством воды в реке, в которой инструментами управления являются выбор периодов сбросов, выбор периодов включения насосов канала у Снигиревки на основе прогноза распространения загрязнения по реке, выбор экологически благоприятных режимов расходов воды Каховской ГЭС, способствующих более быстрому очищению от хлоридов нижнего Днепра и Ингульца. Система компьютеризированной поддержки этой задачи управления должна базироваться на моделях прогноза распространения загрязнений в речной системе.

В последние годы моделирование качества воды в реках проводится с использованием одномерных распределенных моделей, численная реализация которых базируется на конечно-разностных решениях уравнений в частных производных. Современным примером такого подхода являются модели ведущих европейских институтов Mike-11 [1], SOBEK [2]). Указанный подход пришел на смену боксовым (камерным) моделям по мере развития производительности компьютеров и численных методов. К его преимуществам можно отнести возможность адекватно описать два основных процесса, определяющих перенос примесей в речном потоке – адвективный перенос и продольную диффузию (дисперсию) примесей. Активная разработка в последнее десятилетия новых, вычислительно более эффективных конечно-разностных схем решения гиперболических уравнений позволяет использовать эти современные подходы в задачах моделирования загрязнения рек.

В статье представлены результаты разработки численной одномерной модели речной гидравлики и переноса примесей, результаты ее тестирования и примеры выбора с ее помощью экологически благоприятных режимов стока, а также основные принципы программной реализации системы.

## 2. Модель движения воды

Одномерная модель речной гидравлики базируется на полных уравнениях Сен-Венана для речной сети [3, 4]. Одномерность означает, что гидравлические характеристики потока осредняются по поперечному сечению. Уравнения модели гидравлики имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} &= 0; \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{A} \right) + gA \frac{\partial y}{\partial x} + gA \frac{Q|Q|}{K^2} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $t$  – время (с);  $x$  – расстояние вдоль оси водотока (м);  $Q(x, t)$  – расходы ( $\text{м}^3/\text{с}$ );  $A[y(x, t)]$  – площадь сечения ( $\text{м}^2$ );  $y(x, t)$  – уровень свободной поверхности в балтийской системе координат (м);  $g$  – ускорение свободного падения ( $\text{м}/\text{с}^2$ );  $K$  – расходная характеристика русла.

Расходная характеристика русла вычисляется по формуле

$$K = \frac{1}{n} AR^{2/3}, \quad (2)$$

где  $A$  – площадь сечения;  $R$  – гидравлический радиус, который для широких русел приблизительно равняется средней глубине;  $n$  – коэффициент шероховатости.

## 3. Модель переноса хлоридов

Транспорт консервативных растворимых загрязнений, к которым относятся хлориды, в рамках модели речных систем описывается уравнением адвекции-диффузии с дополнительными членами в правой части, которые отвечают за боковой сток хлоридов:

$$\frac{\partial AC}{\partial t} + \frac{\partial QC}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( AE_x \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \Phi_l, \quad (3)$$

где  $C$  – концентрация хлоридов;  $A$  – площадь поперечного сечения потока;  $Q$  – расход потока;  $E_x$  – коэффициент продольной диффузии;  $\Phi_l$  – поток хлоридов бокового стока.

Обзор подходов для расчета коэффициента продольной диффузии  $E$  представлен в Holly [5] и Won Seo [6]. В данной системе была использована формула, предложенная Won Seo:

$$E_x = \alpha_w \left( \frac{b}{h} \right)^{1.23} \left( \frac{U}{U_*} \right)^{1.25}. \quad (4)$$

В литературе для константы калибрования  $\alpha_w$  дается значение 0,64.

В формуле (4):  $b$  – ширина руслового потока;  $U_*$  – придонная скорость шероховатости, которая рассчитывается по формуле

$$U_* = \sqrt{gn} \cdot |U| \cdot h^{-\frac{1}{6}}, \quad (5)$$

где  $n$  – коэффициент Маннинга, имеет значение порядка 0.02-0.1;  $U$  – усредненная по поперечному сечению скорость потока в русле.

После проведения численных расчетов гидродинамического модуля его результаты используются в численном решении уравнения (3).

#### 4. Численная реализация

В случае сложной речной системы указанные модели применяются на графе речной сети. Каждое из уравнений модели решается на элементарных участках реки – бранчах, стартуя с начальных условий и удовлетворяя определенным граничным условиям в узлах графа. Каждый бранч представляет собой «простой канал»: бранч не имеет соединения с двумя втоками или истоками, резкого изменения глубины или ширины потока или расхода. Точки-границы бранчей называются специальными точками и определяют схему речной системы, которая используется для моделирования.

Для построения численного решения каждый бранч покрывается набором узлов, в которых проводится вычисление параметров потока. Конфигурация графа и физические размеры бранчей могут быть получены с использованием геоинформационных систем (например, MapInfo, ArcView). Информация о гидрографических характеристиках реки – средняя глубина и ширина, типичные расходы, данные по поперечным сечениям (таблицы  $A = A(h)$  или  $b = b(h)$ ) подготавливаются для некоторых сечений русла, а для узлов численной дискретизации автоматически проводится их соответствующая интерполяция.

Во всех элементарных моделях, на которые разбивается численное решение, в определенных узлах бранчей записываются граничные условия. Существуют несколько типов граничных условий.

В модели адвекции в точках втока – условие источника:

$$C(t)|_{x=0} = \bar{C}(t), \quad (6)$$

где  $\bar{C}(t)$  – функция источника. В исходящих узлах - условия свободного вытока:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = 0. \quad (7)$$

В точках соединения бранчей записывается условие перемешивания для модели адвекции:

$$C_{out} = \frac{\sum Q_{in} C_{in}}{\sum Q_{in}}, \quad (8)$$

где суммирование ведется по всем бранчам, вытекающим из узла. Условие баланса для модели диффузии записывается в виде:

$$\sum_i D_i A_i \frac{\partial C}{\partial x} = 0, \quad (9)$$

где суммирование ведется по всем бранчам, соединяющимся в данном узле.

Для всех параметров и переменных, используемых в расчетах, должны быть установлены начальные условия – значения на наборе точек, выбранных при проведении численной дискретизации.

Для решения уравнений Сен-Венана системы уравнений (1) необходимо найти расходы  $Q(x, t)$  и уровни свободной поверхности  $y(x, t)$  во всех точках речной сетки как функции времени. Для нахождения решения системы уравнений (1) были использованы методы, разработанные в пакете CHARIMA [7] для аналогичных целей. Уравнение (1) решается методом конечных разностей с использованием схемы Прейсмана, для которой производные по пространству и времени имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial t} &= \frac{1}{\Delta t} [\theta(Q_{i+1}^{n+1} - Q_{i+1}^n) + (1-\theta)(Q_i^{n+1} - Q_i^n)]; \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{1}{\Delta x} [\varphi(Q_{i+1}^{n+1} - Q_i^{n+1}) + (1-\varphi)(Q_{i+1}^n - Q_i^n)].\end{aligned}\quad (10)$$

Нижние индексы  $i$  и  $i+1$  означают две последовательные пространственные точки сетки,  $n$  и  $n+1$  – два последовательных временных шага,  $x$  – расстояние между точками  $i$  и  $i+1$ ,  $t$  – расчетный временной шаг и  $\theta, \varphi$  – весовые параметры, значения которых находятся между 0 и 1.

Подставляя (2) в систему уравнений (1), получаем нелинейную систему алгебраических уравнений для  $Q(x, t)$  и  $y(x, t)$  в каждой точке расчетной сети.

$$\begin{aligned}& \frac{1}{2\Delta t} (A_{i+1}^{n+1} - A_{i+1}^n) + \frac{1}{2\Delta t} (A_i^{n+1} - A_i^n) + \frac{\theta}{\Delta x} (Q_{i+1}^{n+1} - Q_i^{n+1}) + \frac{1-\theta}{\Delta x} (Q_{i+1}^n - Q_i^n) = 0. \\ & \frac{1}{2\Delta t} (Q_{i+1}^{n+1} - Q_{i+1}^n) + \frac{1}{2\Delta t} (Q_i^{n+1} - Q_i^n) + \left[ \theta \left( \frac{Q_i^{n+1}}{A_i^{n+1}} + \frac{Q_{i+1}^{n+1}}{A_{i+1}^{n+1}} \right) + (1-\theta) \left( \frac{Q_i^n}{A_i^n} + \frac{Q_{i+1}^n}{A_{i+1}^n} \right) \right] \\ & + \frac{\theta}{\Delta x} (Q_{i+1}^{n+1} - Q_i^{n+1}) + \frac{1-\theta}{\Delta x} (Q_{i+1}^n - Q_i^n) - \left[ \theta / 4 \left( \frac{Q_i^{n+1}}{A_i^{n+1}} + \frac{Q_{i+1}^{n+1}}{A_{i+1}^{n+1}} \right)^2 + (1-\theta) / 4 \left( \frac{Q_i^n}{A_i^n} + \frac{Q_{i+1}^n}{A_{i+1}^n} \right)^2 \right] \\ & + \frac{\theta}{\Delta x} (A_{i+1}^{n+1} - A_i^{n+1}) + \frac{1-\theta}{\Delta x} (A_{i+1}^n - A_i^n) + g \left[ \theta / 2 (A_i^{n+1} + A_{i+1}^{n+1}) + (1-\theta) / 2 (A_i^n + A_{i+1}^n) \right] \\ & + \frac{\theta}{\Delta x} (y_{i+1}^{n+1} - y_i^{n+1}) + \frac{1-\theta}{\Delta x} (y_{i+1}^n - y_i^n) + g \left[ \theta / 2 (A_i^{n+1} + A_{i+1}^{n+1}) + (1-\theta) / 2 (A_i^n + A_{i+1}^n) \right] \\ & + \theta \left[ \beta \frac{Q_i^{n+1} | Q_{i+1}^{n+1} |}{(K_i^{n+1})^2} + (1-\beta) \frac{Q_{i+1}^{n+1} | Q_i^{n+1} |}{(K_{i+1}^{n+1})^2} \right] + (1-\theta) \left[ \beta \frac{Q_i^n | Q_{i+1}^n |}{(K_i^n)^2} + (1-\beta) \frac{Q_{i+1}^n | Q_i^n |}{(K_{i+1}^n)^2} \right] = 0.\end{aligned}\quad (11)$$

Поскольку каждая речная система имеет сложную конфигурацию, состоящую из участков с неоднородными гидрологическими характеристиками, полученную систему уравнений нельзя использовать сразу для всех точек речной сетки. Система уравнений (1) и полученная из нее алгебраическая система уравнений (11) имеют место только в пределах каждого бранча. Для узловых точек речной сетки нужны дополнительные соотношения, которые называются узловыми уравнениями неразрывности и имеют вид

$$Q_m(t^{n+1}) + \sum_{l=1}^{L(m)} Q_{m,l}(t^{n+1}) = 0, m = 1, 2, \dots, M, \quad (12)$$

где  $M$  – общее количество узлов речной сетки;  $L(m)$  – количество бранчей, объединенных в данном узле  $m$ ;  $Q_{m,l}(t^{n+1})$  – расходы на каждом бранче в точке слияния в момент времени  $t^{n+1}$ ;  $Q_m(t^{n+1})$  – дополнительный боковой приток в узел  $m$  в момент времени  $t^{n+1}$ .

Поскольку расходы в момент времени  $t^{n+1}$  можно представить как

$$Q_{m,l}(t^{n+1}) = Q_{m,l}(t^n) + \Delta Q_{m,l}, \quad (13)$$

где  $Q_{m,l}(t^n)$  – расходы в момент времени  $t^n$ , а  $\Delta Q_{m,l}$  – прирост расхода воды, уравнение (11) можно переписать как

$$Q_m(t^{n+1}) + \sum_{l=1}^{L(m)} Q_{m,l}(t^{n+1}) + \sum_{l=1}^{L(m)} \Delta Q_{m,l} = 0, m = 1, 2, \dots, M. \quad (14)$$

Для нахождения расходов  $Q(x, t)$  и уровней свободной поверхности  $y(x, t)$  во всех точках речной сетки на заданном промежутке времени системы уравнений (12) и (14) решаются совместно с учетом граничных условий в верхних и нижних точках речной сетки, а также внутренних граничных условий.

Поскольку система (11) нелинейная, ее решение находится методом последовательных итераций, на каждой из которых решается линеаризованная система, полученная из данной разложением в ряд Тейлора относительно приростов расходов  $\Delta Q$  и приростов уровней свободной поверхности  $\Delta y$  и отбрасыванием членов выше первого порядка малости. При этом линеаризованную систему в общем виде можно переписать как

$$\begin{aligned} A_0 \Delta y_{i+1} + B_0 \Delta Q_{i+1} &= C_0 \Delta y_i + D_0 \Delta Q_i + G_0, \\ A_0' \Delta y_{i+1} + B_0' \Delta Q_{i+1} &= C_0' \Delta y_i + D_0' \Delta Q_i + G_0'; \end{aligned} \quad (15)$$

где  $\Delta Q$  и  $\Delta y$  – приросты расходов и уровней свободной поверхности в каждой расчетной точке на каждой итерации, а коэффициенты  $A_0, B_0, C_0, D_0, G_0, A_0', B_0', C_0', D_0', G_0'$  – функции уже вычисленных до этого времени значений зависимых переменных в каждой расчетной точке речной сетки в момент времени  $t^n$  или на предыдущей итерации. Формулы для этих коэффициентов очень громоздкие и потому здесь не приводятся. Решение линеаризованной системы используется для вычисления значений коэффициентов на следующей итерации, и процесс длится до тех пор, пока разность значений искомых функций на последовательных итерациях не станет достаточно малой. Полученное таким образом решение и является значением искомых переменных на  $n+1$  – временном слое. Площади сечения  $A[y(x, t)]$  для текущего значения уровней свободной поверхности  $y(x, t)$  в каждой расчетной точке определяются при помощи таблиц, в которых находятся площади сечения для всех расчетных точек речной сети для последовательности глубин с фиксированным шагом по глубине  $DH$ , которые характеризуют реальное русло реки.

Для решения линеаризованной системы предварительно необходимо получить соотношение между приростами расходов и уровней свободной поверхности в узлах речной сетки. Эти соотношения можно получить из системы уравнений (11) и записать в общем виде как

$$\Delta Q_{I(l)} = E_1 \Delta y_1 + F_1 + H_1 \Delta y_{I(l)}, \quad (16)$$

где индекс 1 означает первую точку, а индекс  $I(l)$  – последнюю точку бранча  $l$ , а коэффициенты  $E_1, F_1, H_1$  могут быть выражены через коэффициенты системы (11). Подставляя (12) в уравнение (10) получаем матричное уравнение для приростов уровней свободной поверхности в узлах

$$[A][\Delta Y] = [B], \quad (17)$$

где  $[\Delta Y]$  – вектор приростов уровней свободной поверхности в узлах речной сетки;  $[A]$  – матрица, элементы которой состоят из коэффициентов  $E_i$  и  $H_i$  в узлах речной сетки;  $[B]$  – вектор, элементы которого состоят из: 1) внешних притоков  $Q_m(t^{n+1})$ ; 2) суммы последних оценок расходов в узлах речной сетки; 3) коэффициентов  $F_i$  в узловых точках.

Полученное таким образом уравнение (17) решается относительно  $[\Delta Y]$  одним из методов решения систем линейных уравнений. После этого из уравнения (14) находятся приросты расходов  $\Delta Q$  в узлах речной сети и, наконец, из системы (13) находятся расходы и уровни свободной поверхности во внутренних точках бранчей. Таким образом, получается решение системы уравнений (1) после проведения одной итерации. Процесс продлевается до тех пор, пока полученные на двух последовательных итерациях решения не совпадут с заданной точностью. Найденное таким образом решение будет решением системы уравнений (1) на  $n+1$  временном шаге.

Для численного решения уравнения (3) используется подход разделения по физическим процессам, уравнение заменяется на

$$\frac{\partial AC}{\partial t} + \frac{\partial QC}{\partial x} = \Phi_i; \quad (18)$$

$$\frac{\partial AC}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( AE_x \frac{\partial C}{\partial x} \right).$$

Уравнения (18) описывают процессы адвекции и диффузии соответственно. Рассмотрим отдельно методы численного решения каждого из уравнений (18).

Для численного решения уравнения адвекции применяется метод представления пространственной производной в виде разности двух потоков:

$$\frac{(AC)_i^{n+1} - (AC)_i^n}{\Delta t} + \left( \phi_{i+\frac{1}{2}} - \phi_{i-\frac{1}{2}} \right) = 0. \quad (19)$$

Для первой и последней точек бранча потоки по определению совпадают с физическими потоками через границу:

$$\phi_{0+\frac{1}{2}} = Q_0 C_0, \quad \phi_{N-\frac{1}{2}} = Q_N C_N. \quad (20)$$

Представление (19) и (20) автоматически дает консервативность (сохранение общей массы) численной схемы. Действительно, после проведения суммирования (19) по пространственному индексу  $i$  получим соотношение:

$$M^{n+1} - M^n = \Delta t \left( \phi_{\frac{1}{2}} - \phi_{N-\frac{1}{2}} \right), \quad (21)$$

что отвечает закону "прирост массы системы = вток - выток".

Реконструкция потоков  $\phi_{i+1/2}$  для внутренних точек сети проводится согласно подходу MUSCL (см. Van Leer [8]) с ограничителями градиентов, которые гарантируют схеме свойство TVD.

$$\bar{\phi}_{i+1/2} = \begin{cases} vC_i + v\frac{1}{4} \left[ (1-\kappa)\Delta_{i-1/2}^+ + (1+\kappa)\Delta_{i+1/2}^- \right], & v > 0 \\ vC_{i+1} - v\frac{1}{4} \left[ (1-\kappa)\Delta_{i+1/2}^+ + (1+\kappa)\Delta_{i+3/2}^- \right], & v < 0, \end{cases} \quad (22)$$

где  $v$  – расход потока, который проходит через границу элементарной ячейки  $i$ ,  $\kappa$  – коэффициент из интервала  $[-1, 1]$ . При  $\kappa=1/3$  схема становится схемой третьего порядка по пространственной переменной, а

$$\begin{aligned} \Delta_{i-1/2}^+ &= B(\Delta_{i-1/2}, 2\Delta_{i+1/2}); \\ \Delta_{i+1/2}^- &= B(\Delta_{i+1/2}, 2\Delta_{i-1/2}) \end{aligned} \quad (23)$$

градиенты концентрации с лимитирующей функцией, которая дает схеме свойство TVD.

В нашем случае выбран ограничитель в форме Van Albada [9]:

$$B(x, y) = \frac{x(y^2 + \delta) + y(x^2 + \delta)}{x^2 + y^2 + 2\delta}; \quad (24)$$

$$10^{-8} \leq \delta \leq 10^{-6}.$$

В (23)  $\Delta_{i-1/2} = C_i - C_{i-1}$ .

Заметим, что общий поток в ячейке состоит из положительного потока через левую стенку и отрицательного потока через правую стенку ячейки. Таким образом, общая формула для численного потока  $\phi_{i+1/2}$  имеет вид

$$\phi_{i+1/2} = Q_i^+ C_i + Q_i^+ \frac{1}{4} \left[ (1-\kappa)\Delta_{i-1/2}^+ + (1+\kappa)\Delta_{i+1/2}^- \right] + Q_{i+1}^- C_{i+1} - Q_{i+1}^- \frac{1}{4} \left[ (1-\kappa)\Delta_{i+1/2}^+ + (1+\kappa)\Delta_{i+3/2}^- \right] \quad (25)$$

где  $Q^+$  и  $Q^-$  – положительная и отрицательная компоненты расходов речного потока.

Выбирая в (25) концентрации  $C_i$  и  $C_{i+1}$  из временного уровня  $(n+1)$ , получим неявную численную схему, которая описывает (19). При этом значение концентрации вещества на временном уровне  $(n+1)$  является решением линейной алгебраической системы с трехдиагональной матрицей:



$$AC = b, A = \begin{pmatrix} Q_0 & & & & \\ -Q_1^+ & Q_2^+ - Q_1^- & Q_2^- & & \\ & \dots & & & \\ & & & & Q_N \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Уравнение (26) эффективно решается методом прогонки.

В случае сложной топологии речной системы общее решение уравнения адвекции находится за несколько шагов, при этом используются соотношения баланса и граничные условия описанные выше:

1. Для каждого элементарного участка речной сети – бранча формируем трехдиагональную систему (26).

2. Предположим, что выполняется равенство  $C_i^{n+1} = e_i C_0^{n+1} + f_i C_N^{n+1} + g_i, 1 \leq i \leq N - 1$ .

Подставляя в (26), получим систему из трех уравнений с трехдиагональной матрицей:

$$\begin{aligned} Ae &= e^1; \\ Af &= e^N; \\ Ag &= \bar{b}, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\text{где } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & & \\ & \dots & & & \\ & & A_{M-1M-2} & A_{M-1M-1} & A_{M-1M} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \begin{aligned} e^1 &= (1, 0, \dots, 0) \\ e^N &= (0, 0, \dots, 1) \\ \bar{b} &= (0, b_1, \dots, b_{N-1}, 0) \end{aligned}. \quad (28)$$

3. Находим коэффициенты  $e, f, g$  при помощи процедуры решения системы уравнений с трехдиагональной матрицей.

4. Формируем узловое матричное уравнение исходя из правил, описанных в соответствующей главе. Используем коэффициенты  $e, f, g$ , найденные на предыдущем шаге. Заметим, что узловое уравнение всегда записывается для временного уровня  $(n + 1)$ .

5. Решаем узловое уравнение.

6. Находим значение концентрации во внутренних точках бранчей, пользуясь соотношением  $C_i^{n+1} = e_i C_0^{n+1} + f_i C_N^{n+1} + g_i, 1 \leq i \leq N - 1$ .

Для дискретизации уравнения диффузии используется стандартный подход представления пространственной производной в виде центральных разностей. При данном описании получаем схему второго порядка точности по пространственной переменной. Дополнительно такая схема является консервативной.

$$\frac{(AC)_i^{n+1} - (AC)_i^n}{\Delta t} = B_i C_{i-1} - (B_i + B_{i+1}) C_i + B_{i+1} C_{i+1}, \quad (29)$$

$$\text{где } B_i = \frac{1}{(\Delta x)^2} E_i A_i, \quad (30)$$

$E_i$  – коэффициент продольной диффузии, который рассчитывается по формуле (4);  $A_i$  – площадь поперечного сечения речного потока.

Нетрудно увидеть, что в случае, когда правая часть записывается для неявного временного уровня, уравнение (29) приобретает форму системы линейных уравнений с трехдиагональной матрицей, которая может быть решена эффективным методом прогонки.

## 5. Программная реализация

Модель была реализована на языке программирования C++ в среде Microsoft Visual Studio. Для автоматизации представления результатов моделирования использовалась технология COM, с помощью которой была реализована среда работы модели на основе Microsoft Excel (см. Рис. 2).

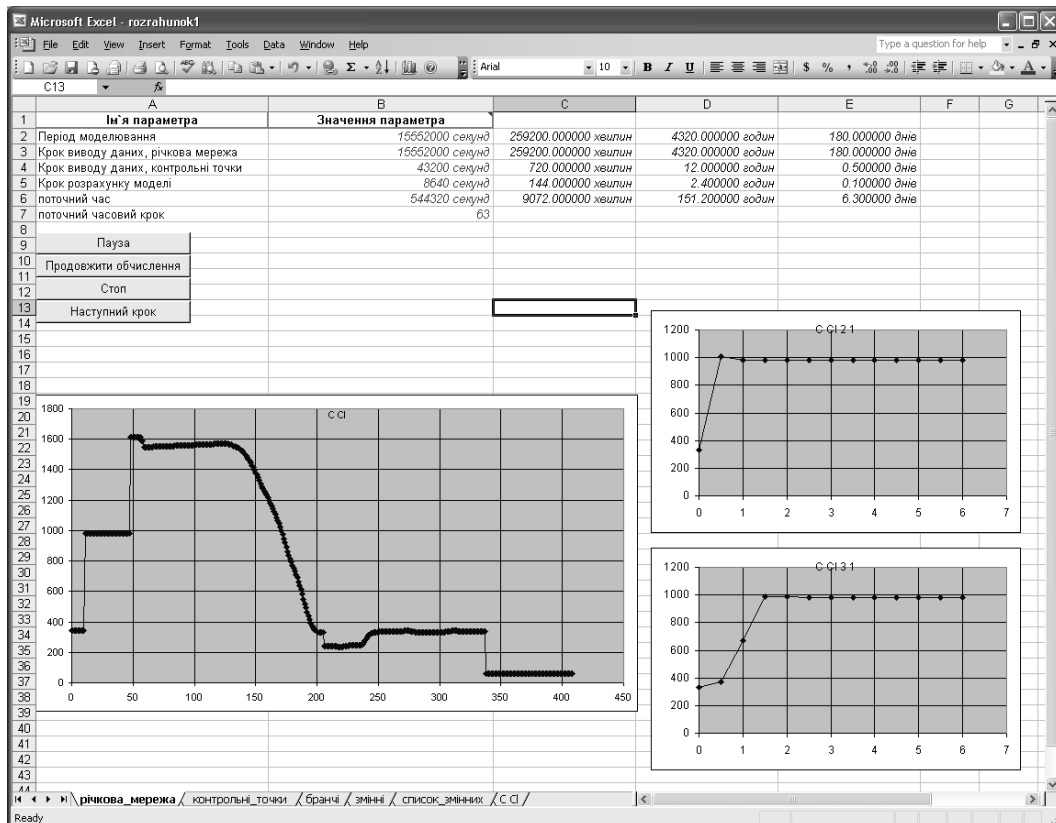


Рис. 2. Пример графического интерфейса системы с использованием Microsoft Excel

Программная реализация численных алгоритмов была проведена после детального объектно-ориентированного анализа задачи и синтеза библиотеки классов для работы с элементами моделирующего алгоритма. При реализации широко применялся подход с использованием шаблонов C++ и библиотеки STL<sup>1</sup> (см. Страуструп [10]). Для реализации алгоритмов модели также использовались библиотеки методов линейной алгебры MTL<sup>2</sup> и ITL<sup>3</sup> [11, 12].

<sup>1</sup> STL (Standard Template Library) - стандартная библиотека шаблонов.

<sup>2</sup> MTL (Matrix Template Library) - библиотека шаблонных алгоритмов для работы с матрицами.

## 6. Валидация модели

Сравнение расчетов модели с данными измерений проводилось для сбросов 12.1997-05.1998 гг., поскольку для указанного периода были доступны достаточно детальные входные данные (гидрология, гидрохимия) и результаты измерений концентрации хлоридов на посту в с. Андреевка. Данные были предоставлены Государственным Комитетом Водного Хозяйства Украины.

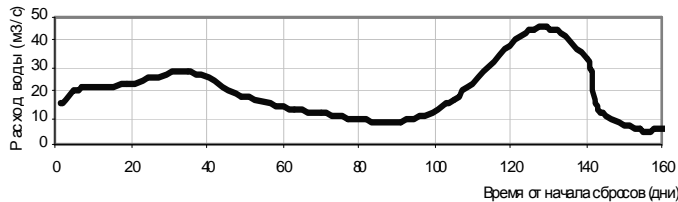


Рис. 3. Входной гидрограф р. Ингулец

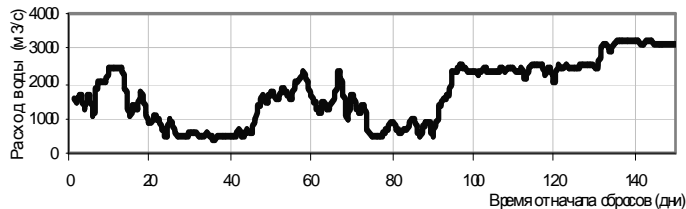


Рис. 4. Входной гидрограф р. Днепр (режим работы Каховской ГЭС)

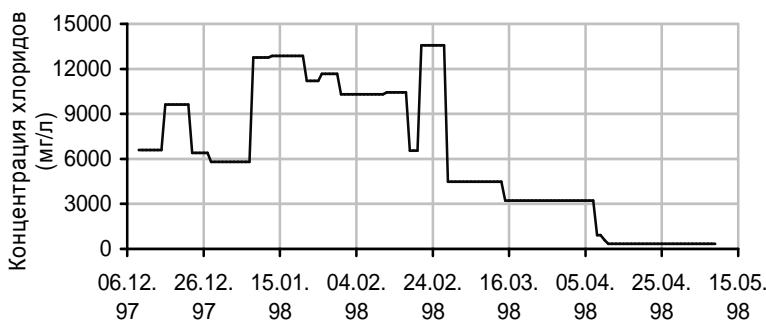


Рис. 5. Входное распределение суммарной концентрации хлоридов (суммарный сброс предприятий)

распространение загрязненной воды в Нижнем Ингульце и Нижнем Днепре.

Моделирование показало, что уменьшение сбросов воды с Каховской ГЭС во время распространения пика загрязненной воды в Ингульце ниже насосной станции позволяет

Временные ряды входных гидрографов в р. Ингулец и р. Днепр, суммарные сбросы хлоридов в р. Ингулец, а также сравнение результатов модели и измеренной концентрации хлоридов показаны на рис. 3 - рис. 6.

## 7. Моделирование влияния эксплуатационных режимов Каховского водохранилища на концентрацию хлоридов в нижнем Ингульце и нижнем Днепре

Разработанная модель представляет собой практический компьютеризированный инструмент, который разрешает сотрудникам Госводхоза прогнозировать распространение хлоридов по Ингульцу и на этой основе принимать решение по управлению насосной станцией в Снигиревке, находить наиболее экологически эффективные режимы сбросов воды с Каховской ГЭС, которые бы ускорили

<sup>3</sup> ITL (Iterative Template Library) - библиотека итерационных шаблонных алгоритмов для работы с матрицами.

значительно ускорить выход загрязнения из Ингульца и, таким образом, сократить время отключения насосной станции в г. Снигиревка.

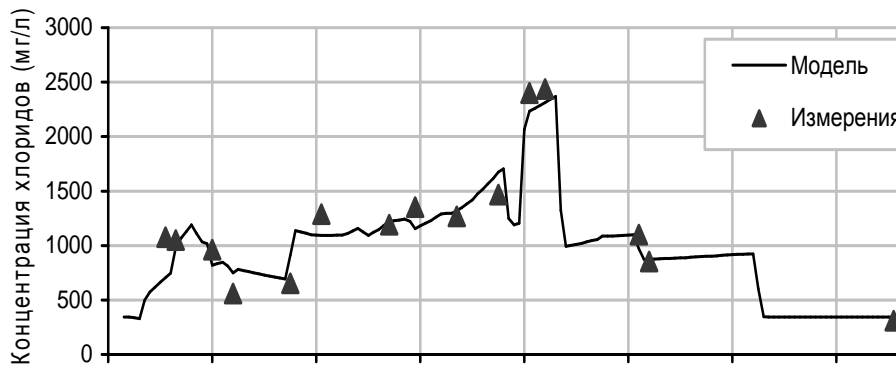


Рис. 6. Сравнение результатов моделирования концентрации хлоридов возле с. Андреевка с данными измерения во время сбросов за период декабрь 1997 – апрель 1998

Этот эффект показан в моделировании загрязнения Ингульца зимой-весной 1998 г. Расчеты были осуществлены на основе измененных расходов воды с Каховской ГЭС в пределах 2500-3000 куб.м/сек на протяжении 130-145 дней после даты начала сброса 9.12.2001, а также на основе измененного сценария, в котором расходы воды на этот период были уменьшены до 500 куб.м/сек.

В результате подобного уменьшения потока в Днепре снижается подпор в нижнем течении Ингульца и увеличивается скорость течения на этом участке реки. Данное изменение в гидравлических параметрах реки приводит к тому, что на 137 день от начала сброса загрязнения пик концентрации, согласно сценарию низких расходов воды из Каховки, будет находиться на 30 км ниже по течению, чем его местонахождение согласно сценарию измеренных расходов, что приводит к 2-суточной разности в периоде прохождения значительной (более чем 400 мг/л) концентрации хлоридов через устье реки (Рис. слева). В то же время уменьшение расходов воды с Каховской ГЭС не приводит к существенному увеличению концентрации в Днепре (Рис. справа).

В результате подобного уменьшения потока в Днепре снижается подпор в нижнем течении Ингульца и увеличивается скорость течения на этом участке реки. Данное изменение в гидравлических параметрах реки приводит к тому, что на 137 день от начала сброса загрязнения пик концентрации, согласно сценарию низких расходов воды из Каховки, будет находиться на 30 км ниже по течению, чем его местонахождение согласно сценарию измеренных расходов, что приводит к 2-суточной разности в периоде прохождения значительной (более чем 400 мг/л) концентрации хлоридов через устье реки (Рис. слева). В то же время уменьшение расходов воды с Каховской ГЭС не приводит к существенному увеличению концентрации в Днепре (Рис. справа).

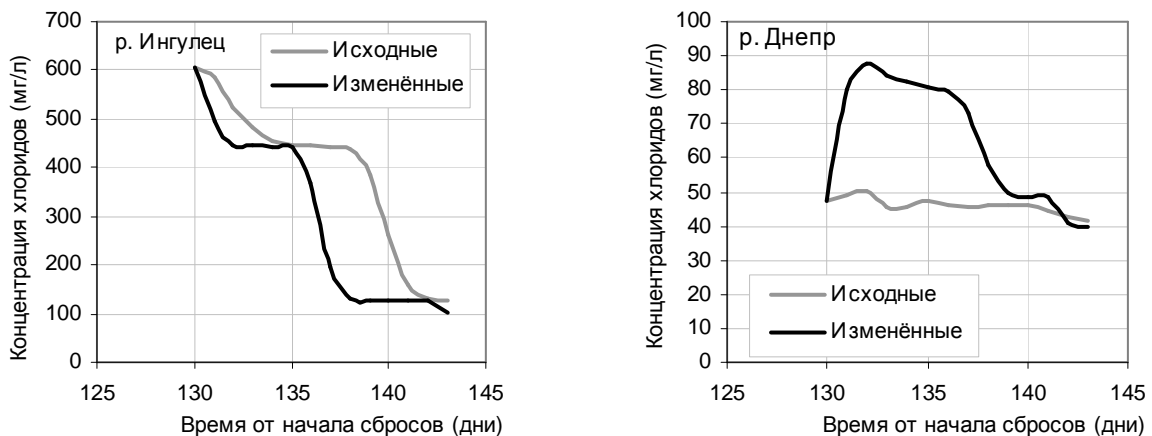


Рис. 7. Временное изменение концентрации хлоридов в реке Ингулец выше устья реки (слева) и в реке Днепр ниже по течению от устья Ингульца (справа) в условиях разных расходов через дамбу Каховской ГЭС

## 8. Выводы

Для решения проблемы управления качеством воды реки Ингулец разработана новая информационная система, основанная на современных методах численного моделирования движения воды и переноса примесей в речных системах. В результате анализа имеющихся методов решения задач расчёта гидравлических характеристик и параметров качества воды была разработана гидрологическая модель, способная описывать сложные процессы течения воды в р. Ингулец и р. Днепр. Модель учитывает эффекты обратного течения воды, что имеет место на участке р. Ингулец от населённого пункта Снигирёвка до впадения р. Ингулец в р. Днепр. Разработана модель качества воды, сравнение которой с данными измерений показало ее высокую точность для прогнозирования динамики распространения хлоридов в реке Ингулец. Программная реализация модели проведена с помощью языка программирования C++, библиотек шаблонов STL и матричных библиотек MTL, ITL для решения уравнений модели. Управление моделью и представление результатов проводится в среде Microsoft Excel, знакомой большинству пользователей.

Численные эксперименты показали возможность использования разработанной модели для управления сбросами воды на Каховской ГЭС и соответствующим управлением уровнем концентрации хлоридов в нижней части р. Ингулец, а также для разработки правил управления сбросами загрязнённой воды с хранилищ шахтных вод в верхней части р. Ингулец.

Разработанная информационная система используется в Госводхозе Украины для поддержки управления качеством воды в реке Ингулец.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. ECO Lab – DHI Software // <http://www.dhisoftware.com/ECOLab/Description/index.htm>.
2. SOBEK – WL | Delft Hydraulics Software // <http://www.sobek.nl/prod/index.html>.
3. Кюнж Ж.А., Холли Ф.М., Вервей А. Численные методы в задачах речной гидравлики. – М.: Энергоатомиздат, 1985. – 252 с.
4. Zheleznyak M., Donchyts G., Hygynyak V., Marinetz A., Lyashenko G., Tkalich P. RIVTOX – one dimensional model for the simulation of the transport of radionuclides in a network of river channels // RODOS Report WG4-TN(97)05, Forschungszentrum Karlsruhe. – 2000. – 48 p.
5. Holly F.M. Dispersion in rivers and coastal waters. – 1: Physical principles and dispersion equations // Developments in Hydraulic Engineering. – 1987. – N 3. – P. 1–37.
6. Won Seo I., Sung Cheong T. Predicting longitudinal dispersion coefficient in natural streams // J. Hydraulic Eng. – 1998. – Vol. 124, N 1. – P. 25–32.
7. Holly F.M., Yang J.C., Schwarz P., Schaefer J., Hsu S.H. and Einhellig R. CHARIMA, Numerical Simulation of Unsteady Water and Sediment Movement in Multiply Connected Networks of Mobile-Bed Channels // IIHR Report. – Iowa Institute of Hydraulic Research the University of Iowa – Iowa City, USA. – 1990. – N 343.
8. Eleuterio F. Toro, Shock-Capturing Methods for Free-Surface Shallow Flows, Wiley and Sons Ltd. – 2001. – ISBN: 0-471-98766-2. – 326 p.
9. Van Albada, Van Leer B., Roberts W.W. A Comparative Study of Computational Methods in Cosmic Gas Dynamics // Astron. Astrophys. – 1982. – Vol. 108. – P. 76–84.
10. Stroustrup B. The C++ Programming Language (3rd edition) // Addison Wesley Longman, Reading, MA. – 1997. – ISBN 0-201-88954-4. – 920 p.
11. Iterative Template Library // <http://www.osl.iu.edu/research/itl/>.
12. Matrix Template Library // <http://www.osl.iu.edu/research/mtl/>.