УДК 681.3.019.3

В.Н. АЗАРСКОВ, ДЖАССИМ МУХАММЕД КАСМИ, В.П. СТРЕЛЬНИКОВ

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПОРЯДКОВОЙ СТАТИСТИКИ В ЗАДАЧАХ ОЦЕНКИ НАДЕЖНОСТИ РЕЗЕРВИРОВАННЫХ СИСТЕМ

Abstract: *The question of calculation of reliability of parallel systems with the loaded reserve is investigated. The technique of definition of the law of distribution of an operating time to refusal of those systems is developed on the basis of use of serial statistics. The offered law allows to calculate all necessary parameters of reliability (an average operating time to refusal of system, a scale - percent operating time (resource), probability of non-failure operation for set time, etc.). Adequacy of estimations of parameters of reliability of parallel systems is shown on the basis of an offered method.*

Key words: *reliability, an average operating time to failure, reserve system.*

Анотація: *Досліджується питання розрахунку надійності рівнобіжних систем з навантаженим резервом. Розроблено методику визначення закону розподілу наробітку до відмовлення таких систем на основі використання порядкової статистики. Запропонований закон дозволяє обчислити всі необхідні показники надійності (середній наробіток до відмові системи, гамма-процентний наробіток (ресурс), імовірність безвідмовної роботи за заданий час і ін.). Показано адекватність оцінок показників надійності рівнобіжних систем на основі пропонованої методики.*

Ключові слова: *безвідмовність, середній наробіток до відмови, резервована система.*

Аннотация: *Исследуется вопрос расчета надежности параллельных систем с нагруженным резервом. Разработана методика определения закона распределения наработки до отказа таковых систем на основе использования порядковой статистики. Предложенный закон позволяет вычислить все необходимые показатели надежности (среднюю наработку до отказа системы, гамма-процентную наработку (ресурс), вероятность безотказной работы за заданное время и др.). Показана адекватность оценок показателей надежности параллельных систем на основе предлагаемой методики.*

Ключевые слова: *безотказность, средняя наработка до отказа, резервированная система.*

1. Введение

Расчет показателей надежности систем, т.е. задача аналитической оценки надежности системы на основании известных данных о надежности составляющих элементов (компонентов), является наиболее распространенной и важной задачей надежности, которая решается на всех этапах проектирования и производства изделий. В практике проектирования как способ повышения надежности систем имеет место резервирование путем параллельного соединения элементов, когда все элементы находятся под нагружением (нагруженный резерв). К сожалению, до настоящего времени нет инженерных методик оценки и прогнозирования основных показателей надежности таковых систем, в частности, методики определения закона распределения наработки до отказа параллельных систем, на основании которого можно определить все необходимые показатели надежности. В настоящей работе предлагается метод расчета надежности таковых систем, приводящий к определению закона распределения наработки до отказа.

2. Анализ состояния проблемы

Система с параллельным соединением элементов не выходит из строя, пока не отказали все ее элементы. Блок-схема для анализа надежности систем с параллельным соединением элементов показана на рис.1. Для частных случаев, когда $n=2$, систему называют дублированной, а при $n=3$ – троированной системой. Кроме рассмотренного выше чисто параллельного соединения, используют другие способы параллельного соединения. В частности, более широкое применение имеют системы типа «k *из* n». В такой системе параллельно соединяются n элементов. Такая система продолжает работать безотказно, пока в работоспособном состоянии находятся не менее k элементов (рис. 2). Примером такой формы резервирования являются канаты висячего моста, когда для того, чтобы держать это сооружение, необходимо некоторое минимальное число таких канатов. Аналогично система, например, из четырех двигателей летательного аппарата, также может быть рассмотрена при оценке надежности как структура «k *из* n».

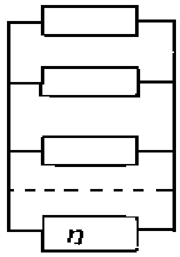

Рис. 1. Структура *"1* из n*"*: минимально необходимое число работоспособных элементов равно единице $(\kappa = 1)$

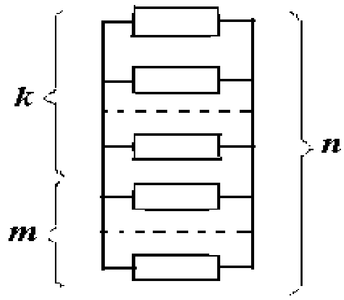

Рис. 2. Структура *"*κ из n*"*: n – общее число параллельно соединенных элементов; κ – минимально необходимое число работоспособных элементов; m – число резервных элементов

В настоящей работе рассматриваются и оцениваются основные показатели надежности таких резервированных систем, которые либо действительно являются невосстанавливаемыми (например, системы однократного действия), либо таких восстанавливаемых систем, восстановление которых по каким-либо причинам невозможно непосредственно в рассматриваемое время.

По аналогии с названием систем типа «k *из* n» будем называть параллельные системы (рис. 1) системами типа *"1* из n*"* (т.е. здесь $k = 1$).

Ранее при исследовании надежности резервированных систем с нагруженным (горячим) резервом под надежностью обычно рассматривали вероятность безотказной работы в течение заданного времени [1]. Другие показатели надежности (средняя наработка до отказа, гамма-процентная наработка до отказа (ресурс) и др.) не рассматривались по причине отсутствия аналитических выражений для функции распределения наработки до отказа системы, из которой можно было бы получать все необходимые показатели надежности. Для уяснения свойств резервирования целесообразно знать не отдельные показатели безотказности, а полную характеристику – функцию распределения наработки до отказа исследуемых резервированных систем.

Для параллельных структур типа «$1\ из\ n$», состоящих из равнонадежных элементов, используя теорему умножения вероятностей [1], получено выражение для вероятности безотказной работы системы $R_c(t)$:

$$R_c(t) = 1 - [1 - R_э(t)]^n ,$$

где $R_э(t)$ – вероятность безотказной работы элемента.

Для некоторых законов распределения наработки до отказа элементов получены оценки средней наработки до отказа системы типа «$1\ из\ n$»:

1. Экспоненциальный закон: $T_c = T_э \sum_{i=0}^{n-1} (i+1)^{-1}$.

2. Закон Вейбулла: $T_c = T_э \sum_{i=1}^{n} i^{-1/\alpha} C_n^i \cdot (-1)^{i-1}$ (здесь α – параметр функции Вейбулла).

Для структур типа «$k\ из\ n$» при равнонадежных элементах, используя, например, метод прямого перебора и теоремы сложения вероятностей получено выражение для вероятности безотказной работы системы в следующем виде:

$$R_c(t) = \sum_{i=0}^{n-k} R_э^{n-i}(t) \cdot [1 - R_э(t)]^i .$$

Оценки средней наработки до отказа системы типа «$k\ из\ n$» :

1. Экспоненциальный закон: $T_c = T_э \sum_{i=0}^{n-k} (i+k)^{-1}$.

2. Закон Вейбулла: $T_c = T_э \sum_{i=1}^{n-k+1} \left[(-1)^{i-1} C_{n-k+1}^i \, i^{-1/\alpha}\right]$.

Выигрыш надежности резервированных систем при нагруженном резерве существенно зависит от того, какой количественной характеристикой оценивается надежность. При этом при сопоставлении различных показателей надежности (вероятности безотказной работы, средней наработки до отказа системы) получают различные выводы. Так, оценивая надежность по оценке средней наработки до отказа системы T_c, получают результат, что чрезмерно повышать кратность резервирования нецелесообразно (вследствие удорожания и увеличения веса системы). Принимая за критерий надежности вероятность безотказной работы системы $R_c(t)$, приходят к противоположному выводу. Несомненно, знание закона распределения наработки до отказа систем позволит более качественно оценить выигрыш надежности резервированных систем.

3. Определение закона распределения наработки до отказа параллельных систем

В настоящей работе определяется закон распределения наработки до отказа параллельных систем на основе следующей теоретико-вероятностной интерпретации расходования ресурса системы. Предлагаемая модель расходования ресурса рассматривает систему как совокупность однотипных элементов, поставленных на испытание. При этом отказом системы является момент, соответствующий появлению r-го (r-ой порядковой статистики, где $r = m + 1$, где m – число элементов, находящихся в нагруженном резерве). Таким образом, рассматриваемая задача сводится к определению закона распределения порядковой статистики.

Если наработка до отказа элементов описывается, например, DN-распределением вида $DN(t; T_э, \nu_э)$, то, как установлено в [2], среднее выборочное наработок таких элементов описывается также DN-распределением вида $DN\left(t; T_э, \nu_э / \sqrt{n}\right)$, где n – число однотипных элементов, входящих в рассматриваемую систему. Закон распределения наработки, соответствующей появлению r-го (r-ой порядковой статистики), по аналогии с распределением выборочного среднего, также может быть описан DN-распределением вида $DN\left(t; T_r, \nu_э / \sqrt{r}\right)$:

$$DN\left(t; T_r, \nu_э / \sqrt{r}\right) = \Phi\left(\frac{t - T_r}{\nu_э \sqrt{t T_r / r}}\right) + \exp\left(\frac{2r}{\nu_э^2}\right) \cdot \Phi\left(\frac{t + T_r}{\nu_э \sqrt{t T_r / r}}\right).$$

В последнем выражении функции распределения неизвестным представляется только один параметр масштаба T_r, который может быть вычислен по формуле $T_r = T_Э\, x_r$, где x_r – относительная наработка, соответствующая появлению r-го отказа из n элементов, поставленных на испытание, то есть для структур типа «k *из* n» $x_r = x(r/n; \nu_э) = t_r / T_э$ (t_r– наработка до r-го отказа).

Значение x_r можно определить из таблиц функции DN-распределения обратным входом по значениям вероятности отказа $F = r/n$ и коэффициента вариации наработки до отказа элементов $\nu_э$ или из решения уравнения

$$F = \Phi\left(\frac{x_r - 1}{\nu_э \sqrt{x_r}}\right) + \exp\left(\frac{2}{\nu_э^2}\right) \cdot \Phi\left(\frac{x_r + 1}{\nu_э \sqrt{x_r}}\right) = \frac{r}{n}.$$

В случае, когда рассматривается система типа «1 *из* n», рекомендуется оценка $x_r = x\left(\frac{n}{n + 0{,}5};\ \nu_Э\right)$, то есть $F = \frac{n}{n + 0{,}5}$.

Таким образом, используя информацию о вероятности отказа F и коэффициенте вариации наработки элементов $\nu_Э$, определяют значение x_r и далее вычисляют среднее значение наработки до отказа системы (параметр масштаба распределения) по формуле $T_C = T_r = T_Э\, x_r$. Коэффициент вариации наработки системы (параметр формы распределения) вычисляют по формуле $\nu_C = \nu_Э / \sqrt{r}$ (для систем типа «k *из* n») и по формуле $\nu_C = \nu_Э / \sqrt{n}$ (для систем типа «1 *из* n»).

Выражение для функции распределения наработки до отказа параллельных систем имеет следующий вид:

$$F(t) = DN\left(t;\, \mu, \nu_э / \sqrt{d}\right) = \Phi\left(\frac{t-\mu}{\nu_э \sqrt{t\mu/d}}\right) + \exp\left(\frac{2d}{\nu_э^2}\right) \cdot \Phi\left(\frac{t+\mu}{\nu_э \sqrt{t\mu/d}}\right),$$

где $d = n$ для систем типа «1 *из* n» и $d = r = m+1 = n-k+1$ для систем типа «k *из* n»; $\mu = T_э x_r$.

В связи с тем, что предлагаемый метод расчета надежности основан на использовании распределения «порядковой статистики», он получил сокращенное название «ПС-метод».

В табл. 1 приведены выражения для оценки средней наработки до отказа исследуемых систем, полученные на основе использования экспоненциального распределения и распределения Вейбулла [1], а также предлагаемого ПС-метода. При расчете значения средней наработки до отказа систем T_c принято, что элементы равнонадежны и имеют коэффициент вариации наработки $\nu_э = 1$. Отметим, что при коэффициенте вариации наработки элементов, равном единице, оценки по распределению Вейбулла совпадают с оценками на основе экспоненциального распределения. Как видно, все расчетные оценки дают хорошее совпадение.

Таблица 1. Расчетные оценки средней наработки до отказа параллельных систем

Метод	Структуры				
	"1 *из* 2"	"1 *из* 3"	"1 *из* 4"	"2 *из* 3"	"3 *из* 5"
Классический метод на основе экспоненциального распределения	$1{,}5T_э$	$1{,}83T_э$	$2{,}08T_э$	$0{,}83T_э$	$0{,}78T_э$
Классический метод на основе распределения Вейбулла	$1{,}5T_э$	$1{,}83T_э$	$2{,}08T_э$	$0{,}83T_э$	$0{,}78T_э$
ПС-метод	$1{,}45T_э$	$1{,}86T_э$	$2{,}07T_э$	$0{,}99T_э$	$0{,}85T_э$

4. Выводы

В настоящей работе разработан и предлагается инженерный метод расчета надежности параллельных систем с нагруженным резервом, который приводит к определению функции распределения (DN-распределения) наработки до отказа рассматриваемых систем, на основании которой можно просто получать оценки всех необходимых показателей надежности этих систем (средней наработки до отказа, гамма-процентной наработки до отказа, вероятности безотказной работы за заданное время, остаточного ресурса и др.).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д. Математические методы в теории надежности. – М.: Наука, 1965. – 423 с.
2. Стрельников В.П., Федухин А.В. Оценка и прогнозирование надежности электронных элементов и систем. – К.: Логос, 2002. – 486 с.