УДК 519.862

А.А. АЛЄКСЄЄВ

МОДЕЛЬ ОПТИМІЗАЦІЇ У СТАНІ ЕКОНОМІЧНОЇ РІВНОВАГИ

Abstract: *This article deals with the question of developing complete models of functioning of an economic system with determination of optimum prices, labor inputs, production volumes, export-import, and taxation. These parameters are determined from systems of balance equations of demand and supply in labor and commodity markets products taking into account kinds of production functions and utility functions.*
Key words: *iprice, expenses, labor, production, consumption, export, import, production function, utility function.*

Анотація: *Розглядається питання розробки цілісних моделей функціонування господарської системи з визначенням оптимальних цін, витрат праці, обсягів виробництва, експорту-імпорту, податків. Ці показники визначаються з систем рівнянь балансів попиту та пропозиції на ринках праці і продуктів з урахуванням видів виробничих функцій і функцій корисності.*
Ключові слова: *ціна, витрати, праця, виробництво, споживання, попит, пропозиція, розподіл, експорт, імпорт, виробнича функція, функція корисності.*

Аннотация: *Рассмотрены вопросы разработки целостных моделей функционирования хозяйственной системы с определением цен, затрат труда, объёмов производства, экспорта-импорта, налогов. Эти показатели определяются из систем уравнений балансов спроса и предложения на рынках труда и продуктов с учетом видов производственных функций и функций полезности.*
Ключевые слова: *цена, затраты, труд, производство, потребление, спрос, предложение, распределение, экспорт, импорт, производственная функция, функция полезности.*

1. Вступ

Мова йде про необхідність розробки цілісних моделей функціонування господарської системи з визначенням оптимальних цін товарів, витрат праці, обсягів виробництва, нормативів податків тощо. Історично такий цілісний підхід в економічних дослідженнях пов'язаний з іменем швейцарського економіста Л. Вальраса (1834–1910). Він описується системою рівнянь виробництва і споживання та балансів попиту і пропозиції на ринку праці і ринку продуктів. Загальний результат угод і-го індивіда на ринку j-го продукту врівноважується ціновими атрибутами праці та продукції, що виробляється [1].

2. Основні позначення

Розглянемо структуру господарства в районі, що складають n індивидів, споживачів, кожен з яких одночасно може бути робітником певної ферми господарства з виробництва продукції.
Нехай задані виробничі функції, які характеризують технології виробництва:

$$B_{ij} = B_{ij}(L_{ij}), \qquad i = \overline{1,n}, \qquad j = \overline{1,m}, \tag{1}$$

де B_{ij} – об'єм продукту в деяких натуральних одиницях (наприклад, в т), який виробляє і-ий виробник (об'єм j-го продукту); L_{ij} – витрати праці.

Розподіл виробленого:

$$B_{ij} = x_{ij} + y_{ij} + E_{ij}, \qquad i = \overline{1,n}, \qquad j = \overline{1,m}, \tag{2}$$

де x_{ij} – власне споживання; y_{ij} – на споживання інших виробників господарства (крім і-го); E_{ij} – на експорт.

Сума споживання:

$$Q_{ij} = x_{ij} + Z_{ij} + IM_{ij}, \qquad i = \overline{1,n}, \qquad j = \overline{1,m}, \tag{3}$$

де Z_{ij} – надходження j-го продукту i-му споживачу від інших членів господарства; ІM_{ij} – за імпортом.

Ясно, що виконуються баланси

$$\sum_{i=1}^{n} y_{ij} = \sum_{i=1}^{n} Z_{ij}, \qquad j = \overline{1,m}. \tag{4}$$

Якщо $y_{ij} > 0$, то $Z_{ij} = 0$, якщо $Z_{ij} > 0$, то $y_{ij} = 0$.

$$x_{ij} \ge 0,\ y_{ij} \ge 0,\ Z_{ij} \ge 0,\ E_{ij} \ge 0,\ IM_{ij} \ge 0, \qquad i = \overline{1,n}, \qquad j = \overline{1,m}. \tag{5}$$

Прибуток від власного виробництва складає

$$\prod\nolimits_{ij} = P_j B_{ij} - r_{ij} L_{ij}, \quad i = \overline{1,n}, \qquad j = \overline{1,m}, \tag{6}$$

де P_j – ціна j-го продукту; r_{ij} – ціна (доходність) праці.

Обмеження витрат праці:

$$\sum_{j=1}^{m} L_{ij} = L_i, \qquad i = \overline{1,n}. \tag{7}$$

Бюджетні обмеження споживачів:

$$\sum_{j=1}^{m} \left(P_j B_{ij} - \tilde{P}_j E_{ij} + \tilde{\tilde{P}}_j IM_{ij} + З_{ij} \right) = Б_i, \quad i = \overline{1,n}, \tag{8}$$

де $З_{ij}$ – показник збереження коштів.

Величина $Б_i$ визначає бюджет (доход) і-го виробника, який одночасно є споживачем:

$$Б_i = (1 - Z) \sum_{j=1}^{m} \mathrm{r_{ij} L_{ij}} + (1\text{-}\mathrm{q})\gamma_{\mathrm{i}} \prod\nolimits_{\mathrm{i}}, \quad i = \overline{1,n}; \tag{9}$$

$$\prod\nolimits_i = \sum_{j=1}^{m} \prod\nolimits_{ij}, \quad i = \overline{1,n}, \tag{10}$$

де Z – ставка податку на заробітну плату; q – ставка податку на прибуток; γ_{I} – частка всього прибутку господарства, яка надається для і-го виробника робітниками господарства на основі деякої угоди. Найчастіше така частка пропорційна вкладеному виробником об'єму капіталу, землі і т.д.

3. Критерійна функція

Критерійна функція будується за методом Лагранжа комплексно по максимуму прибутку виробників і корисності продукції для споживачів. Ці два критерії зважені через експертний коефіцієнт порівняння з урахуванням фактора обміну продуктами (у тому числі завдяки експорту та імпорту) і з урахуванням обмежень за витратами праці та бюджетних обмежень (7), (8):

$$F=\sum_{i=1}^{n}\left\{\prod_i+K\cdot\prod_{j=1}^{m}Q_{ij}^{\beta_{ij}}+\lambda_i\left[\sum_{j=1}^{m}\left(P_jB_{ij}-\tilde{P}_jE_{ij}+\tilde{\tilde{P}}_jIM_{ij}+З_{ij}\right)-Б_i\right]+\lambda_i^T\left(\sum_{j=1}^{m}L_{ij}-L_i\right)\right\}, \quad (11)$$

де Q_{ij} – об'єм споживання j-го продукту і-м споживачем; $\prod_{j=1}^{m}Q_{ij}^{\beta_{ij}}$ – функція корисності i-го споживача, яка визначає міру його задоволення набором m товарів; β_{ij} – числовий параметр функції корисності $\left(0<\beta_{ij}<1\right)$; K – коефіцієнт порівняння показників прибутку і корисності продуктів; $\tilde{P}_j$ – експортна ціна j-го продукту; $\tilde{\tilde{P}}_j$ – імпортна ціна j-го продукту; λ_i, λ_i^T – множники Лагранжа.

З (8) – (10), (6) випливає

$$\sum_{j=1}^{m}\left\{(1-Z)r_{ij}L_{ij}+\left[(1-q)\gamma_i-1\right]\cdot P_jB_{ij}-(1-q)\gamma_ir_{ij}L_{ij}+\tilde{P}_jE_{ij}-\tilde{\tilde{P}}_jIM_{ij}-З_{ij}\right\}=0,\ i=\overline{1,n}, \quad (12)$$

а з (2), (3) випливає

$$Q_{ij}=B_{ij}+Z_{ij}-y_{ij}-E_{ij}+IM_{ij},\quad i=\overline{1,n},\quad \mathrm{j}=\overline{1,\mathrm{m}}. \quad (13)$$

4. Рівняння оптимізації

Система рівнянь для оптимізації витрат праці з урахуванням (11) – (13), (6) – (10) має вигляд

$$\frac{dF}{dL_{ij}}=\left\{P_j\left[1-\lambda_i\left(1-(1-q)\gamma_i\right)\right]+\frac{K\beta_{ij}}{Q_{ij}}\prod_{j-1}^{m}Q_{ij}^{\beta_{ij}}\right\}B'_{ij}(L_{ij})+$$

$$+r_{ij}\left\{\lambda_i\left[1-Z-(1-q)\gamma_i\right]-1\right\}+\lambda_i^T=0,\quad i=\overline{1,n},\quad \mathrm{j}=\overline{1,\mathrm{m}}. \quad (14)$$

Система рівнянь (14) дійсно відповідає завданню максимізації критерійної функції. Наприклад, якщо покласти

$$B_{ij}=B_{ij}(L_{ij})=a_{ij}L_{ij}^{\alpha_{ij}},\qquad 0<\alpha_{ij}<1, \quad (15)$$

де a_{ij}, α_{ij} – числові параметри виробничої функції, тоді

$$\frac{d^2F}{dL_{ij}^2}=\left(\frac{\beta_{ij}-1}{Q_{ij}}B'_{ij}+B''_{ij}\right)\frac{K\beta_{ij}}{Q_{ij}}\prod_{j=1}^{m}Q_{ij}^{\beta_{ij}}<0, \quad (16)$$

оскільки $\beta_{ij}<1,\quad B'_{ij}>0,\quad \mathrm{B}''_{\mathrm{ij}}<0$.

Від'ємність другої похідної є ознакою точки максимуму. Отримана система рівнянь нелінійна і потребує застосування чисельних методів.

Приклад 1. Нехай $m=1$ (один товар), тоді система бюджетних балансів (12) має вигляд

$$(1-Z)r_iL_i-\left[1-(1-q)\gamma_i\right]\cdot PB_i-(1-q)\gamma_ir_iL_i+\tilde{P}E_i-\tilde{\tilde{P}}IM_i=З_i, \quad (17)$$

$$B_i=a_iL_i^{\alpha_i},\quad i=\overline{1,n}. \quad (18)$$

Нехай $n = 2$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $\beta_1 = 0{,}8$, $\beta_2 = 0{,}5$,

$\alpha_1 = 0{,}75$, $\alpha_2 = 0{,}5$,

$P = 1$, $Z = 0{,}13$, $q = 0{,}3$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 0{,}5$,

$L_1 = 5$, $L_2 = 1{,}5$, $\tilde{P} = 1{,}2$, $\tilde{\tilde{P}} = 0{,}8$,

$r_1 = 1$ $r_2 = 1{,}2$, $E_1 = 0{,}5$, І$M_1 = 0{,}2$,

$E_2 = 0{,}8$, І$M_2 = 0{,}7$.

Тоді $B_1 = 5^{0,75} = 3{,}344$, $B_2 = 2 \cdot 1{,}5^{0,5} = 2{,}449$.

$З_1 = 0{,}87 \cdot 5 - (1 - 0{,}7 \cdot 0{,}5) \cdot 3{,}344 - 0{,}7 \cdot 0{,}5 \cdot 5 + 1{,}2 \cdot 0{,}5 - 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 0{,}87$;

$З_2 = 0{,}87 \cdot 1{,}2 \cdot 1{,}5 - 0{,}65 \cdot 2{,}449 - 0{,}7 \cdot 0{,}5 \cdot 1{,}2 \cdot 1{,}5 + 1{,}2 \cdot 0{,}8 - 0{,}8 \cdot 0{,}7 = -0{,}26$.

Тобто перший виробник має збереження, а другий – збитки.

5. Визначення рівноважних цін

Розглянемо спрощені умови задачі, коли функція споживання співпадає з виробничою функцією $\left(Q_{ij} = B_{ij}\right)$, відсутні експорт – імпорт, ціна праці однакова для всіх виробників та ін. Тоді можна знайти явний розв’язок цієї багатокритерійної задачі [2].

Функцію попиту на працю для вироблення j-го продукту визначимо спочатку з умови максимізації прибутку:

$$\prod\nolimits_j = \prod\nolimits_j (L) = P_j Q_j (L) - r \cdot L, \qquad j = \overline{1,m}. \tag{19}$$

При $Q_j = Q_j(L) = a_j L^{\alpha_j}$ з використанням умов екстремуму

$$\frac{d\prod_j}{dL} = P_j a_j \alpha_j L^{\alpha_j - 1} - r = 0, \qquad \mathrm{j} = \overline{1,\mathrm{m}}, \tag{20}$$

визначимо функції попиту на працю:

$$L = L_j^{\mathrm{D}} = \left(\frac{P_j a_j \alpha_j}{r} \right)^{\frac{1}{1-\alpha_j}}, \qquad \mathrm{j} = \overline{1,\mathrm{m}}. \tag{21}$$

Тоді прибуток можна подати у вигляді функції цін:

$$\prod\nolimits_j = \prod\nolimits_j (L_j^{\mathrm{D}}) = \frac{(P_j a_j \alpha_j)^{\frac{1}{1-\alpha_j}}}{r^{\frac{\alpha_j}{1-\alpha_j}}} (\alpha_j^{-1} - 1), \qquad j = \overline{1,m}. \tag{22}$$

Функції пропозиції товарів знайдемо через підстановку (21) в (18):

$$Q_j^S = Q_j^S (L_j^{\mathrm{D}}) = a_j^{\frac{1}{1-\alpha_j}} \left(\frac{P_j \alpha_j}{r} \right)^{\frac{\alpha_j}{1-\alpha_j}}, \qquad \mathrm{j} = \overline{1,\mathrm{m}}. \tag{23}$$

Бюджетне обмеження:

$$\sum_{j=1}^{m} P_j Q_{ij} = rL_i^S - \gamma_i \prod, \qquad \mathrm{i} = \overline{1,\mathrm{n}}\,, \tag{24}$$

де

$$\Pi = \sum_{j=1}^{m} \Pi_j \ , \tag{25}$$

L_i^S – пропозиція праці, $i = \overline{1,n}$.

Щоб пропозиція праці була збалансована з оптимальним попитом на неї, маємо враховувати рівняння

$$\sum_{j=1}^{m} L_j^{\mathrm{D}} = \sum_{i=1}^{n} L_i^S \ . \tag{26}$$

Функцію попиту на товари визначимо з умови максимізації функції корисності споживачів з урахуванням бюджетного обмеження (24) методом побудови функції Лагранжа:

$$F_i = \prod_{j=1}^{m} Q_{ij}^{\beta_{ij}} - \lambda \left(\sum_{j=1}^{m} P_j Q_{ij} - rL_i^S - \gamma_i \cdot \prod\nolimits_i \right), \qquad i = \overline{1,n}\,. \tag{27}$$

Умови екстремуму:

$$\frac{dF_i}{dQ_{ij}} = \frac{\beta_{ij}}{Q_{ij}} \prod_{j=1}^{m} Q_{ij}^{\beta_{ij}} - \lambda \sum_{j=1}^{m} P_j = 0, \qquad \mathrm{i} = \overline{1,\mathrm{n}}, \quad \mathrm{j} = \overline{1,\mathrm{m}}\,, \tag{28}$$

з яких знайдемо вираз споживчого кошика через один товар:

$$Q_{ij} = Q_{i1} \frac{P_1}{P_j} \frac{\beta_{ij}}{\beta_{i1}}, \qquad i = \overline{1,n}, \qquad \mathrm{j} = \overline{1,\mathrm{m}}\,. \tag{29}$$

З (24) знайдемо Q_{i1} з використанням рівнянь

$$Q_{i1} \frac{P_1}{\beta_{i1}} \sum_{j=1}^{m} \beta_{ij} = rL_i^S + \gamma_i \prod, \qquad i = \overline{1,n}\,. \tag{30}$$

та визначимо Q_{ij} через ціни з (29):

$$Q_{ij} = Q_{ij}^{\mathrm{D}} = \frac{\overline{\beta}_{ij}}{P_j} \left(r \cdot L_i^S + \gamma_i \prod \right), \quad \mathrm{i} = \overline{1,\mathrm{n}}, \qquad \mathrm{j} = \overline{1,m}\,, \tag{31}$$

де

$$\overline{\beta}_{ij} = \frac{\beta_{ij}}{\sum_{j=1}^{m} \beta_{ij}} \ . \tag{32}$$

Баланс пропозиції товарів (23) та попиту на них (31) у вигляді

$$\sum_{i=1}^{n} Q_{ij}^{\mathrm{D}} = Q_j^S, \qquad j = \overline{1,m}\,, \tag{33}$$

з урахуванням (22), (25) дозволяє визначити рівноважні ціни P_j з системи m рівнянь з m невідомими.

Дійсно, з (31)

$$\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} Q_{ij}^{\mathrm{D}} = \frac{1}{P_j}\left(r \cdot A_j + \prod \cdot G_j\right) = a_j^{\frac{1}{1-\alpha_j}} \left(\frac{P_j \alpha_j}{r}\right)^{\frac{\alpha_j}{1-\alpha_j}}, \qquad j = \overline{1,m}, \tag{34}$$

де

$$A_j = \sum_{i=1}^{n} \overline{\beta}_{ij} L_i^S, \qquad G_j = \sum_{i=1}^{m} \overline{\beta}_{ij} \cdot \gamma_i \,. \tag{35}$$

З (34) маємо

$$P_j = \frac{\left(r^{\frac{1}{1-\alpha_j}} \cdot A_j + \prod \cdot r^{\frac{\alpha_j}{1-\alpha_j}} \cdot G_j\right)^{1-\alpha_j}}{a_j \alpha_j^{\alpha_j}}, \qquad j = \overline{1,m}. \tag{36}$$

Відповідно з (21) маємо

$$L_j^{\mathrm{D}} = \frac{\left(r^{\frac{1}{1-\alpha_j}} A_j + \prod \cdot r^{\frac{\alpha_j}{1-\alpha_j}} G_j\right)}{r^{\frac{\alpha_j}{1-\alpha_j}}} \cdot \left(\frac{\alpha_j}{\alpha_j^{\alpha_j}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha_j}} = \alpha_j\left(rA_j + \prod \cdot G_j\right), \qquad j = \overline{1,m}. \tag{37}$$

Тоді з (26)

$$\sum_{j=1}^{m} L_j^{\mathrm{D}} = r\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \cdot A_j + \prod \cdot \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \cdot G_j = \sum_{i=1}^{n} L_i^S \,; \tag{38}$$

$$\prod = \frac{\sum_{i=1}^{n} L_i^S - r \cdot \sum_{j=1}^{m} \alpha_i A_j}{\sum_{j=1}^{m} \alpha_j G_j} \,. \tag{39}$$

<u>Приклад 2.</u> Нехай $n = 2$, $m = 2$, $r = 1$, $L_1^S = 2$, $L_2^S = 3$,

$a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $\beta_{11} = 0{,}8$, $\beta_{12} = 0{,}4$,

$\alpha_1 = 0{,}75$, $\alpha_2 = 0{,}5$, $\beta_{21} = 0{,}25$, $\beta_{22} = 0{,}5$.

Тоді $\overline{\beta}_{11} = 2/3$, $\overline{\beta}_{12} = 1/3$, $\overline{\beta}_{21} = 1/3$, $\overline{\beta}_{22} = 2/3$,

$A_1 = 7/3$, $A_2 = 8/3$, $G_1 = 0{,}5$, $G_2 = 0{,}5$, $\prod = 3{,}07$, $P_1 = 0{,}87$, $P_2 = 0{,}72$,

$L_1^{\mathrm{D}} = 2{,}9$, $L_2^{\mathrm{D}} = 2{,}1$, $\prod_1 = 0{,}97$, $\prod_2 = 2{,}10$, $Q_1 = 4{,}44$, $Q_2 = 5{,}76$.

Результат співпадає з іншим засобом обчислення в [1].

6. Висновки

Розглянуті підходи до моделювання та оптимізації стану економічної рівноваги ведуть, як ми бачимо, до класу задач обчислення розв’язків систем трансцендентних рівнянь. Для здійснення оптимізації необхідним етапом є побудова багатокритерійних функцій, які враховують виробничі, споживацькі, гуманітарні та інші фактори, що визначають економічну систему. А самі процедури узгодження економічних інтересів доводиться вирішувати іноді в невласних, суперечливих та ймовірнісних умовах.

Можливі напрямки удосконалення моделей охоплюють більш широкі класи виробничих функцій. Наприклад, можливе використання функції Коббі-Дугласа [2]. А введення такого "гуманітарного" фактора, як вільний час виробників, можливе через кошторисну оцінку цього "блага" у функції корисності. Додання цих факторів, без сумніву, зробить підхід до моделювання стану економічної рівноваги більш цілісним і конструктивним.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Тарасевич Л., Гальперин В., Гребенников П., Леусский А. Макроэкономика. – Спб.: Санкт-Петербургский государственный университет экономики и финансов, 1999. – С. 237.
2. Алексеев А.А. Модель ценообразования в схеме экономического равновесия Вальраса // Кибернетика и системный анализ. – 2001. – № 1. – С. 115 – 123.