УДК 517.5:518.5:519.7

Г.С. ТЕСЛЕР

МЕТРИКИ И НОРМЫ В ИЕРАРХИИ КАТЕГОРИАЛЬНЫХ СЕМАНТИК И ФУНКЦИЙ

Abstract: *In the paper the meanings of metrises and norms in the hierarchy of the categorical semanticses and functions are discussed. These notions are discussed more detaily in mathematics, including the theory of approximation of functions, theory of probality and so on. For practical approximations using these notions in the theory of graphs generally and for trees in particular is the adequate approach. In the paper only first steps in the decision of this important for theory and practice problem are being done.*
Key words: *metrics, norm, function, category, graph, tree, sign system.*

Анотація: *У статті розглядаються значення метрик і норм в ієрархії категоріальних семантик і функцій. Більш детально розглянуті ці поняття у математиці, включаючи теорію наближень функцій, теорію ймовірності і т.д. Для практичних наближень адекватним підходом є використання цих понять у теорії графів взагалі і дерев, зокрема. У статті зроблені тільки перші кроки у вирішенні цієї важливої для теорії і практики проблеми.*
Ключові слова: *метрика, норма, функція, категорія, граф, дерево, знакова система.*

Аннотация: *В статье рассматриваются значения метрик и норм в иерархии категориальных семантик и функций. Более подробно рассмотрены эти понятия в математике, включая теорию приближения функций, теорию вероятности и т.д. Для практических приближений адекватным подходом является использование этих понятий в теории графов вообще и деревьев, в частности. В статье делаются только первые шаги в решении этой важной для теории и практики проблемы.*
Ключевые слова: *метрика, норма, функция, категория, граф, дерево, знаковая система.*

1. Введение

Знаковые системы охватывают широкий спектр понятий, включающих язык (устный, письменный, знаковый, движений и т.д.), искусство, культуру, научные категории и т.п.

Эволюция знаковых систем связана, прежде всего, с развитием семиотики – науки, изучающей общие свойства знаков и знаковых систем. Напомним, что знаковая система – это набор знаков с внутренними отношениями между ними, при употреблении которых может существовать определённая регулярность в употреблении каждого из знаков и их сочетаний [1].

В ряде знаковых систем довольно легко вводятся такие понятия, как синтаксис, грамматика, орфография, семантика, метрика и т.п. Большинство этих понятий присущи в той или иной мере естественным и искусственным языкам, частным видом которых являются языки и системы программирования.

Как известно [2], понятие метрики имеет греческие корни и означает меру, размер и имеет в различных знаковых системах разные понятия. Так, в стихосложении метрика есть ученье о стихотворных размерах и ритме стихов, а в музыке – совокупность всех конкретных проявлений метра, т.е. порядка чередований сильных и слабых долей такта, а также учение о метре.

В общем виде метрики и нормы в иерархии категориальных семантик и функций близки к таким понятиям, как расстояние, близость, подобие, порядок, равенство, сходство и т.п., а также как уклонение от чего-нибудь либо измерение качества чего-нибудь и т.п.

Понятно, что в общем виде описанную выше проблему построения метрик и норм категориальных семантик решить весьма проблематично, но некоторые подходы к ее решению можно рассмотреть. Наиболее адекватно понятие нормы и метрики по отношению к таким объектам, как множества, векторы, матрицы, функции и т.д., определены в математике.

2. Постановка задачи

Наиболее точно метрика определена в знаковой системе, именуемой математикой, где под метрикой понимается неотрицательная функция $\rho(x, y)$ двух точек множества, удовлетворяющая следующим трём условиям:

1. $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$; (аксиома нульрефлексивности или тождества) и $\rho(x, y) \geq 0$.
2. $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$; (аксиома треугольника).
3. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$; (аксиома симметричности).

Понятие метрики тесно связано с понятием меры – неотрицательной аддитивной функции множества, которая равна нулю на пустом множестве. Понятие меры является обобщением понятий длины, площади и объёма и обозначается для множества E через $mesE$.

С понятием метрики связаны ряд пространств (метрических) – точечных множеств с определённой на них метрикой, где метрика отождествляется с понятием расстояния на множестве E .

Как известно [3], в математике под пространством понимается логически мыслимая структура, служащая средой, в которой осуществляются другие структуры, формы и те или иные конструкции, а также фиксируются отношения между ними (арифметическое, аффинное, векторное, гильбертово, евклидово, линейное, проективное, риманово, топологическое и т.п.)

Понятие метрики коррелируется также с понятием нормы [3], которое представляет собой неотрицательное число || x ||, сопоставляемое каждому элементу x некоторого векторного пространства и удовлетворяющее следующим условиям:

1. $\|x\| = 0$ только при $x = 0$.
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$, где λ – любой скаляр.
3. $\|x\| + \|y\| \leq \|x\| + \|y\|$; (неравенство треугольника).

Но наряду с чисто математическим введением метрики и расстояний, в практике используют и другие подходы. Так, выдающийся американский математик Р. Хемминг ввёл понятие метрики (расстояния), носящее его имя. Расстояние Хемминга $d(u,v)$ между двумя словами u и v одинаковой длины равно числу несовпадающих разрядов этих слов [4]. Эта метрика нашла своё применение в теории блочных кодов для обнаружения и исправления ошибок.

Если длина слов u и v конечна, то расстояние Хемминга между этими словами также конечно, так как $\rho(u,v) \leq n$.

Эта мера удовлетворяет всем трём условиям (аксиомам) математической меры.

Более сложно вводится метрика для оценки качества программ [1]. Например, метрика Боэма основана на статистической обработке экспертной оценки характеристик программы: полнота функций, независимость от устройств и т.п.

Всего оценивается 51 характеристика. Эта метрика, как и последующие две, предложены в 1977 г.

М. Джилби для этих же целей ввёл метрику, основанную на шкале надёжности функционирования программ, удобства их сопровождения, адаптивности, универсальности, переносимости, сложности, прозрачности и т.п.

М. Холстед предложил метрику оценки качества программ в виде количественной оценки характеристик программ на основе количества операций и операндов, числа вхождений наиболее часто встречающихся операций и операндов. Эти оценки делаются на основе системы эмпирических аналитических выражений.

Довольно оригинально определяется метрика пространственно-временного в физике в рамках теории относительности – как геометрические свойства системы.

Ещё один подход, коррелирующий с вышеизложенным, – анализ размерности, который представляет метод установления связи между величинами, существенными для данного явления, основанный на рассмотрении этих величин.

Как видно из вышеизложенного, существуют различные подходы к определению метрики как расстояния в некотором пространстве. Наряду с чисто детерминированным подходом определения меры, существуют и стохастические подходы, т.е. свойства рассматриваемых объектов зависят от случая.

Как известно, понятие категория имеет следующие значения [2, 5]:

1. Общее понятие, которое отражает универсальные свойства и отношения объективной действительности, общие закономерности развития всех материальных, природных и духовных явлений (время, пространство, движение, необходимость и случайность, форма и содержание и т.д.).

2. Родовое понятие, что означает разряд предметов.

3. Группа однородных предметов, явлений и особ.

В свою очередь, семантика изучает смысловое значение слов и выражений и изменение этих значений либо отношение объектов логического языка к объектам и смыслу, который они выражают.

В вышеприведенном смысле категориальная семантика подчинена определённой иерархии подчинённости связей. Для большинства категорий эта семантическая связь может быть представлена в виде графовых систем либо каким-либо другим способом. Для оценки метрики и норм этих отношений необходимо представить категориальные семантики в виде неких метрических пространств, элементами которых они являются.

3. Различные подходы определения метрики и нормы в математике

В математике метрика обычно рассматривается как некое расстояние, определяющее число, характеризующее взаимное расположение объектов метрического пространства [6].

Так, расстояние точки x метрического пространства до некоторого множества M этого пространства определяется нижней гранью расстояний точки x до точки множества M :

$$\rho(x, M) = \inf_{y \in M} d(x, y).$$

Расстояние на множестве действительных чисел в метрическом пространстве R^1 определяется как

$$\rho(x, y) = |x - y|.$$

Расстояние на множестве n-мерных векторов $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ в евклидовом пространстве R^n определяется как

$$\rho(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2 \right)^{1/2}.$$

Расстояние на множестве n-мерных векторов в метрическом пространстве R_0^n определяется как

$$\rho_1(x, y) = \max_{1 \le i \le n} |y_i - x_i| \text{ либо } \rho_1(x, y) = \sup_{1 \le i \le n} |y_i - x_i|.$$

Расстояние на множестве n-мерных векторов в метрическом пространстве R_1^n определяется как

$$\rho_2(x, y) = \sum_{i=1}^{n} | y_i - x_i |.$$

Особый случай представляет дискретная метрика. Так, на любом множестве существует дискретная метрика вида

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1 \text{ при } x = y; \\ 0 \text{ при } x \ne y. \end{cases}$$

Такого типа метрика хорошо описывает матрицы-столбцы и матрицы-строки, а также матрицы связности (смежности) графа.

В нормированных векторных пространствах для любого элемента определена норма – неотрицательное число $\|x\|$, сопоставимое каждому элементу x некоторого векторного пространства и удовлетворяющее условиям аксиом тождества, треугольника и $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$, где λ – любой скаляр. При этом норма вектора – положительное число квадратного корня из скалярного произведения вектора на себя.

До сих пор мы рассматривали различные нормы векторов, элементами которых были значения или функции. Но для представления иерархии категориальных семантик нам потребуются также и нормы матриц.

Существуют различные способы измерения матрицы. Следуя [7], мы будем рассматривать норму матрицы в виде

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Норма – это наибольшая длина вектора, которую он имеет после применения линейного преобразования, определяемого матрицей A. Таким образом, рассматриваемая норма определяется в терминах векторной нормы. Далее мы поступим аналогично для определения метрики матрицы. Как мы видели выше, существуют различные векторные нормы. Соответственно норма матрицы может быть выражена в одном из видов:

$$\|A\| = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \text{ или } \|A\| = \max_i \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|\text{, либо } \|A\| = \max_j \left(\sum_{j}^{n} (a_{ij})^2 \right)^{1/2} \text{ и т. п.}$$

Последнее значение нормы равно корню квадратному наибольшего собственного значения выражения $A^T A$.

Первые нормы широко применяются, так как легко вычисляются, $\rho(A) \le A$ для любой из вышеприведенных норм и обеспечивает простую оценку спектрального радиуса матрицы.

Для определения метрики матрицы можно использовать векторные метрики для векторов-столбцов либо векторов-строк. Приведём ещё один пример, связанный с нормой.

Так, в векторном пространстве в качестве нормы вектора $\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ используют следующие нормы в n-мерном евклидовом пространстве R^n:

$$\|x\| = (\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2)^{1/2} \text{ – сферическая норма;}$$

$$\|x\| = \max_{k \in [1,n]} |x_k| \text{ – кубическая норма;}$$

$$\|x\| = \sum_{k=1}^{n} |\, x_k \,| \text{ – октаэдральная норма.}$$

Так, в общем виде можно записать [8]:

$$\|x\|_\rho = (\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |\, x_i \,|^p)^{1/p}.$$

При $\rho = 1$ получаем октаэдральную норму, при $\rho = 2$ – сферическую норму, а при $\rho \to \infty$ чебышевскую норму. Аналогично обстоит и для пространства L_p – множества функций $x(t)$, определённых на отрезке $t \in [0,1]$ и интегрируемых по модулю с p-й степенью, имеющего норму

$$\|x\| = (\int_0^1 |\, x(t) \,|^p \, dt)^{1/p}.$$

Сходимость в такой норме называется в среднем, а пространство L_2 называется гильбертовым. Выбор того или иного вида пространства при решении практических задач определяется в основном её физическим смыслом. При этом необходимо учитывать, что

$$\| x(t) \|_{L_1} \le \| x(t) \|_{L_2} \le \ldots \le \| x(t) \|_C \text{ для } x(t)\text{, определённой для } t \in [0,1].$$

Наиболее часто используется норма вектора – положительное значение квадратного корня из скалярного произведения вектора на себя и норма функции – квадратный корень из интеграла от квадрата модуля функции на некотором интервале или в некоторой области. Особое место в математике занимают нормы оператора. Для функций $f(x)$ на множестве в метрическом пространстве $C[a,b]$ всех непрерывных действительных функций, определенных на отрезке $[a,b]$, нормы определяются как

$$\|f\| = \max_{x\in[a,b]} |f(x)| \text{ (норма Чебышева);}$$

$$\|f\|_2 = \left(\int_a^b f(x)^2 dx \right)^{1/2} \text{ (евклидова норма).}$$

Для дискретного задания аргумента эти нормы записываются в виде

$$\|f\| = \max_i |f(x_i)|;$$

$$\|f\| = \left(\sum_i f(x_i)^2 \right)^{1/2}.$$

В связи с этими двумя нормами возникают задачи чебышевского (минимаксного) приближения и приближения методов наименьших квадратов [10].

Сопоставляя понятия нормы вектора и функции, необходимо отметить, что норма вектора- длина любого вектора в евклидовом пространстве, а норма функции – понятие, характеризующее уклонение функции от тождественного нуля. В свою очередь, норма разности функций уже определяет расстояние между ними.

Учитывая слова лауреата Нобелевской премии Рассела о том, что весь мир подчинён законам аппроксимации, целесообразно, наряду с вышеприведенными мерами, рассмотреть меры, существующие при приближении функций. Мера в этом понимании означает количественное выражение погрешности приближения.

Пусть мы хотим приблизить функцию $f(x)$ более простой в том или ином смысле функцией $\varphi(x)$. В этом случае мера приближения $\rho(f,\varphi)$ обычно определяется метрикой некоторого функционированного пространства, содержащего как $f(x)$, так и $\varphi(x)$.

Так, если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$ при использовании равномерной метрики пространства $C[a,b]$, то

$$\rho(f,\varphi)=\max_{x\in[a,b]}|f(x)-\varphi(x)|.$$

Для интегральной метрики пространства $L_p[a,b]$, определяющей в основном близость в среднем, имеем

$$\rho(f,\varphi)=\int_a^b q(x).|f(x)-\varphi(x)|^p\,dt,\ p>0,$$

где $q(x)$ – некоторая положительная весовая функция, при $p=2$ имеем среднеквадратичное приближение.

Аналогично определяется мера для функций двух и большего числа переменных.

В случае, когда функции заданы не аналитически, а табличным способом, то вышеприведенные меры приобретают вид

$$\rho(f,\varphi)=\max_{1\le k\le n}|f(x_k)-\varphi(x_k)|;$$

$$\rho(f,\varphi)=\sum_{k=1}^{n}q_k\,|f(x_k)-\varphi(x_k)|^p,$$

где q_k – весовые положительные числа.

Для произвольного метрического пространства X меры приближения $\rho(x,u)$ элемента x элементом u либо множеством F есть соответственно расстояния $\rho(x,y)$ и $\rho(x,F)$ в смысле метрики пространства X.

В теории вероятностей, математической статистике, механике при решении интерполяционных задач в действительной или комплексной области и ряда других задач в качестве некоторого характеристического элемента используются моменты.

Так, в теории вероятности и математической статистике под понятием момента случайной величины понимается числовая характеристика распределения вероятностей. Моментом порядка k, где $k>0$ и целое, случайной величины X и определяется как математическое ожидание EX^k либо $E(X-a)^k$.

Для функции распределения $F(x)$ случайной величины X момент порядка k имеет вид

$$EX^k=\int_{-\infty}^{\infty}x^k dF(x),$$

т.е. математическое ожидание k-ой степени отклонения случайной величины.

Момент 1-го порядка в механике – статический момент.

Величина $E(X-a)^k$ называется моментом порядка k относительно a, т.е. математическое ожидание k-ой степени отклонения случайной величины от некоторого числа.

Центральный момент порядка k определяется как

$$E(X - EX)^k,$$

т.е. вместо величины взято математическое ожидание.

При $k = 2$ в теории вероятности обозначают величину дисперсии DX, а в механике – момент инерции.

Величина $E|X|^k$ называется абсолютным моментом порядка k. Аналогично определяется момент совместного распределения случайных величин $X_1, X_2, ..., X_n$, т.е. при многомерном распределении.

В работе Р. Хемминга [8] продемонстрирована возможность выбора совпадения моментов в качестве критерия близости приближения функций.

Так, пусть $y(x)$ представляет распределение вероятностей

$$y(x) = e^{-x^2/2\sigma^2} / \sigma\sqrt{2\pi}$$

и, конечно, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} y(x)dx = 1$.

Моменты первоначального распределения

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k e^{-x^2/2\sigma^2} dx = m_k.$$

Как известно, $m_0 = 1, m_1 = 0, m_2 = \sigma^2$.

Поэтому для приближения вида $y = A(1 - b^2 x^2)$, для $-1/b < x \le 1/b$ будем иметь начальное приближение [8]:

$$y = (3/4\sigma\sqrt{5})(1 - (x^2/5\sigma^2)^2).$$

Оно приближает нормальное распределение, сохраняя нулевой, первый и второй моменты.

Другой подход оценки близости между аппроксимируемой функцией состоит в рассмотрении функционального уравнения

$$Z_0 = F(x, y_0), \tag{1}$$

которое при $y_0 = y(x)$, где $y(x)$ – аппроксимируемая функция, превращается в уравнение неявной функции для $y(x)$, т.е.

$$F(x, y) = 0. \tag{2}$$

Таким образом, z_o – невязка уравнения (2), т.е. в простейшем случае – разность между рассматриваемой и некоторой фиксированной величиной. Например, невязка приближенного решения x_0 уравнения $f(x)=0$ определяется величиной $z_0 = f(x_0)$.

Более подробно с таким подходом для приближения элементарных и некоторых функций можно ознакомиться в работах автора [9 – 12]. Важно отметить тот факт, что данный подход справедлив для функции многих переменных, т.е. x превращается в вектор $\overline{X}$ и даже, когда вместо x рассматривается матрица $\left\|x_{ij}\right\|$ (в частности, получение обратной матрицы на основе разложения в ряд [13]).

Все вышеприведенные рассуждения справедливы не только для действительной, но и комплексной области.

На основе (1) в работах [9–12] приведены полученные автором как известные нормы погрешностей (абсолютной и относительной), так и специальные, позволяющие оптимизировать погрешность начального приближения y_0 и итерационных формул произвольного порядка сходимости, полученных на основе разложения функций по невязкам на основе широкого спектра базовых методов аппроксимации.

Аналогично обстоит дело при использовании релаксационных методов решения линейных и нелинейных уравнений. В этом случае невязка приближенного решения уравнения является характеристикой качества приближенного решения $\overline{x}$ уравнения $P(x)=0$, которое определяется величиной $P(\overline{x})$ или некоторым функционалом $F(P,\overline{x})$.

Важное место при исследовании различных задач, связанных с исследованием иерархии категориальных семантик, занимают графы как средство отображения реальных процессов.

4. Прикладные аспекты теории

Метричные характеристики связанных графов вводятся следующим образом.

Пусть $G=(V,E)$ – связный граф, u и v – две его разные вершины. Тогда расстоянием между вершинами u и v называется длина наикратчайшего маршрута и обозначается $\rho(u,v)$. Отметим, что введенные таким образом выполняются все аксиомы метрики, представленные в разд. 2. Известно, что всякое бинарное отношение можно задать в виде матрицы, элементы которой равняются нулю или единице. Такая матрица называется матрицей смежности. Из однозначного соответствия между бинарными отношениями и графами на некотором конечном множестве следует, что всякий граф можно представлять в виде матрицы смежности.

Элементы матрицы смежности $A(G)$ имеют вид

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \textit{ когда вершины } v_i \textit{ и } u_j \textit{ смежны;} \\ 0 - \textit{в противоположном случае.} \end{cases}$$

Рангом графа G называется ранг его матрицы смежностью и обозначается как $rank(G)$.

Пусть u некоторая фиксированная вершина графа $G = (V, E)$, то величина $e(u) = \max \rho(u, v)$, $v \in V$ и называется эксцентриситетом вершины u. Диаметром графа G называется максимальная среди всех эксцентриситетов вершин и обозначается $d(G) = \max e(u)$, $u \in V$. В ряде случаев под матрицей смежности для заданного графа $G = (V, E)$ понимают матрицу $\|a_{ij}\|$, в которой каждый элемент a_{ij} равен числу ребер между вершинами v_i и v_j графа.

Для введения матрицы инцидентности $I(G)$ графа $G = (V, E)$, где $V = \{1, 2, ..., n\}$, $E = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$, определим ее элементы в виде

$$i_{kj} = \begin{cases} 1, \textit{ если вершины } k \textit{ и ребро } e_i \textit{ инцидентны;} \\ 0 - \textit{в противоположном случае,} \end{cases}$$

т.е. каждой вершине v графа соответствует строка, элементами которой являются те вершины, которые соединяются ребром с вершиной v.

В случае ориентированного графа

$$i_{kj} = \begin{cases} 1, \textit{ если вершина } k - \textit{начало дуги } e_j; \\ -1, \textit{ если вершина } k - \textit{конец дуги } e_j; \\ 0, \textit{ если вершина } k \textit{ и дуга } e_j \textit{ не инцидентны.} \end{cases}$$

Напомним, что под термином инцидентность понимается отношение принадлежности между ребром графа и любыми парами вершин, задающими это ребро. Такое отношение является взаимно инцидентным.

Важной для практики разновидностью графа являются деревья. Дерево в теории графов – связный неориентированный граф без циклов. При n вершинах деревья и только деревья содержат $n-1$ ребер. Имеется и другой подход к определению дерева как ориентированного графа, такого, что существует единственный особый узел, и остальные узлы делятся на $n \geq 0$ непересекающихся множеств $T_1, T_2, ... T_n$, каждое из которых является деревом. Множества T_i, $i = \overline{1, n}$ называются поддеревьями корня.

Таким образом, дерево – ациклический граф, в котором существует единственная вершина, в нее не входит ни одна дуга (корень), а в каждую из оставшихся вершин входит только одна дуга, и существует единственный путь из корня в другую вершину. Число разных деревьев, которые можно построить на n вершинах, равно n^{n-2} (теорема Кели). В соответствии с настоящими деревьями в деревьях различают листья, ветви и ярусы, а иногда строят и ствол.

В ряде случаев каждому ребру сопоставляют число-вес этого ребра. Весу ребра может придаваться различный смысл в зависимости от интерпретации графа и решаемой задачи (длина пути, интенсивность потока, стоимость, интенсивность перехода процесса из одного состояния в другое и т.п.).

В качестве примера иерархии категориальных семантик можно привести дерево болезней человека и их связи в зависимости от причин их возникновения и механизмов их развития (патогенеза). При этом корень – номенклатура болезней, ствол – список органов и систем человека, ветви – классы болезней, патогенетические механизмы и структуры болезней, отражающие стадность, формы течения и т.п. Структуры болезней в свою очередь связаны с деревом симптомов, отражающим качество и параметры симптомов, распределенных в пространстве и времени. И все это объединяется структурой диагноза болезни.

В качестве метрики в таких системах часто используют теорему Байеса, где вероятность осуществления некой гипотезы H при наличии определенных подтверждающих свидетельств E вычисляется на основе априорной вероятности этой гипотезы без подтверждающих свидетельств и вероятности осуществления свидетельств при условиях, что гипотеза верна или неверна. Конкретное использование такого подхода в виде экспертной системы для медицинской базы знаний приведено в работе [14]. Подобные подходы на основе весовых функций и соответствующих норм для анализа кристаллических структур химических соединений приведены в работе [15].

Проиллюстрируем один из изложенных выше подходов на примере классификации вычислительных средств.

Предварительно необходимо сделать несколько замечаний. Системная организация системы может быть представлена в следующих трех видах: функциональном, структурном и структурно-функциональном. При этом функциональная структурная организация системы описывается моделью системы на основе функциональных элементов и отражает основные связи между элементами системы соответствующего уровня, часто отражающего функциональную подсистему. В свою очередь, структурная организация системы описывается моделью покрытия функциональных моделей виртуальной системы i-того уровня набором конструктивных элементов.

Функционально-структурная организация системы отражает связь и взаимное влияние функциональной и структурной организации и системы, учитывая особенности строения и взаимодействия элементов в системе.

При проектировании систем учитываются заданное множество функций F и взаимосвязь функциональной и структурной организации системы. Учитывая многоуровневость декомпозиции множества F, каждая из функций может рассматриваться как макро- либо микрофункция, в зависимости от уровня декомпозиции. При этом необходимо отметить [15], что для сложных систем число уровней декомпозиции множества F обычно не превышает 5 – 7 (дерево функций системы). Ограничение числа уровней декомпозиции в основном связано с прагматическим подходом к синтезу систем.

В качестве примера, следуя [16], приведем схему классификации вычислительных систем, основанных на следующих шести признаках: типы потока команд и данных, способы обработки данных, а также степень связности компонент и тип внутренних связей, а также их однородность. Эти признаки и определяют схему классификации ВС, содержащую семь уровней иерархии, в которой переход от i-того уровня к $i+1$ – тому уровню определяется соответствующим i-тым признаком. На рис. 1 изображена классификация ВС [16].

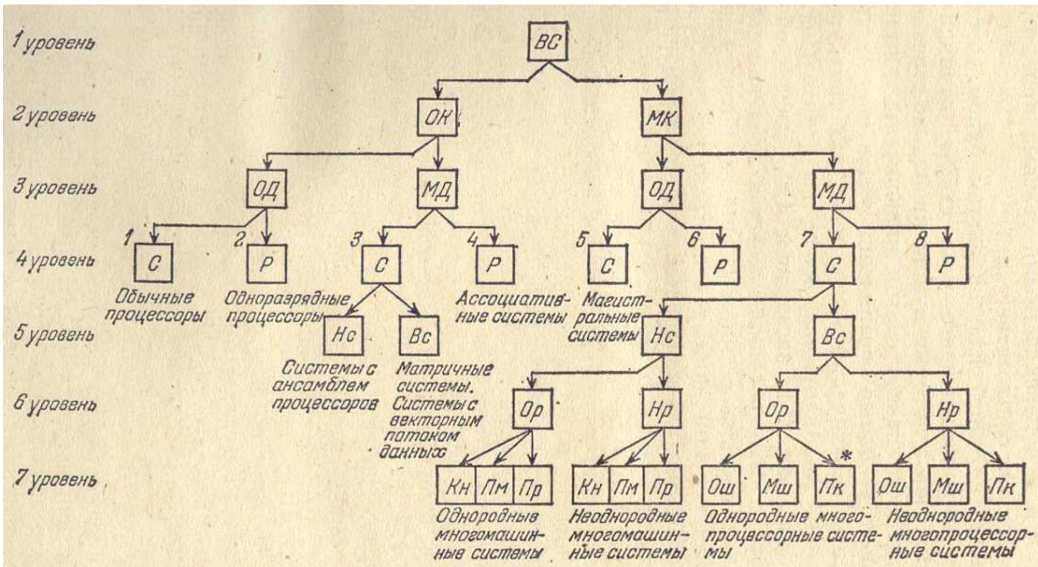

Рис. 1. Схема классификации вычислительных систем

В схеме рис. 1 приняты следующие условные обозначения:

– ВС – вычислительные системы;

– ОК, МК – одиночный и множественный потоки команд соответственно;

– ОД, МД – одиночный и множественный потоки данных соответственно;

– С, Р – пословная и поразрядная обработка данных в центральных обрабатывающих устройствах соответственно;

– Нс, Вс – низкая и высокая степени связности вычислительной системы соответственно;

– Ор, Нр – однородная и неоднородная вычислительная система соответственно;

– Кн, Пм, Пр – система со связями «канал-канал», через общую внешнюю память и непосредственно между процессорами соответственно;

– Ощ, Мш, Пк – системы со связями через одну общую шину с разделением ее времени, со связями через множество шин при использовании многовходовых модулей оперативной памяти и с перекрестными связями при помощи матричного коммутатора соответственно.

5. Выводы

В статье систематически рассматривается широкий спектр норм и метрик в современной науке. Показана возможность их использования в иерархии категориальных семантик и функций. Наиболее полно рассмотрены метрики и нормы, представленные в таких разделах математики, как приближение функций, теория вероятности, алгебра, теория графов, а также непрерывные и дискретные случаи их определения. С точки зрения использования метрик в иерархии категориальных семантик, наиболее приспособлены дискретная метрика, метрики для матриц инцидентности, вероятностные метрики, а также метрики, основанные на характеристиках объекта исследования наподобие метрик М. Холстеда и Р. Хемминга.

Автор надеется, что статья будет тем раздражителем для дальнейшего развития теоретических и практических шагов в этом направлении.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Заморин А.П., Марков А.С. Толковый словарь по вычислительной технике и программированию. – М.: Русский язык, 1988. – 221 с.
2. Краткий словарь иностранных слов. – М.: Советская энциклопедия, 1966. – 384 с.
3. Микиша А.М., Орлов В.Б. Толковый математический словарь. – М.: Русский язык, 1988. – 244 с.
4. Толковый словарь по вычислительным системам / Под ред. В.И. Иллингуорта и др.: Пер. с англ. – М.: Машиностроение, 1991. – 560 с.
5. Словник іншомовних слів / Під ред. чл.-кор. АН УССР О.С. Мельничука. – К.: ГРУРЕ АН УССР, 1974. – 775 с.
6. Математическая энциклопедия: В 5 т. – М.: Советская энциклопедия, 1977 – 1985. – Т. 1 – 5.
7. Райс Д.Ж. Матричное вычисление и математическое обеспечение: Пер с англ. – М.: Мир, 1984. – 264 с.
8. Хемминг Р.В. Численные методы для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1972. – 400 с.
9. Благовещенский Ю.В., Теслер Г.С. Вычисление элементарных функций на ЭВМ. – К.: Техника, 1972. – 400 с.
10. Попов Б.А., Теслер Г.С. Приближение функций для технических приложений. – К.: Наукова думка, 1980.– 352 с.
11. Попов Б.А., Теслер Г.С. Вычисление функций на ЭВМ: Справочник. – К.: Наукова думка, 1984. – 600 с.
12. Теслер Г.С. Новая кибернетика. – К.: Логос, 2004. – 400 с.
13. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 552 с.
14. Величко В.Ю. Розв'язання аналітичних задач в дискретних середовищах методами виведення за аналогією: Автореф. дис… канд. техн. наук. – Київ: Інститут кібернетики, 2004. – 19 с.
15. Нейлор К. Как построить свою экспертную систему: Пер. с англ. – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 286 с.
16. Головкин Б.А. Параллельные вычислительные системы. – М.: Наука, 1988. – 552 с.