УДК 530.3+550.344

ПОБУДОВА ЯДЕР ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ВОЛЬТЕРРА ЗА ДОПОМОГОЮ РЕОЛОГІЧНИХ ТІЛ ВИСОКОГО РАНГУ

Бицань Є. М.
(Інститут геофізики НАНУ, м. Київ, Україна)

Предлагается алгоритм построения ядер и резольвент интегральных уравнений Вольтерра с помощью функций ползучести и функций релаксации реологических тел высокого ранга.

Algorithm for core formation and resolvents of Volterra integral equations of second kind with the help of creep and relaxation functions of rheologic bodies of high rank is proposed.

Великі промислові об’єкти паливно-енергетичного комплексу (АЕС, нафтосховища, домни тощо) створюють значний тиск на ґрунт, внаслідок чого має місце повзучість. В умовах повзучості знаходяться і всілякі підземні об’єкти, зокрема шахтні виробки. Це вимагає створення постійного геодинамічного моніторингу на цих об’єктах з метою підвищення безпеки їхньої експлуатації. Під моніторингом розуміється не лише спостереження та обробка інформації, потрібної для створення умов безпечної експлуатації цих об’єктів, але і прогнозування їхньої безпеки та видача надійних рекомендацій щодо режиму їх функціонування та прийняття рішень. Для природних та промислово-технологічних об’єктів важливе значення має візуальний контроль, який є одним з найважливіших елементів моніторингу. Моніторинг складається з кількох блоків. Важливим блоком являється моніторинг фізичного стану ґрунтів – дослідження їхньої повзучості.

Якщо ми маємо експериментально отриману функцію повзучості, то її можна розкласти в ряд по експонентах, які розглядаються як базис, і по цьому розкладанню одержати спектр часів післядії і релаксації, за допомогою яких можна будувати реологічні тіла (РТ). В реології на даний час використовуються реологічні тіла, ранг яких не перевищує чотири, і які використовують не більше двох часів післядії (часів повзучості) [1, 2]. Розширення спектру часів післядії потребує використання РТ більш високого порядку, а ще точніше процес повзучості описується за допомогою інтегральних рівнянь Вольтерра 2-го роду, що дозволяють повніше описати процес повзучості на потрібний інтервал часу, тобто прогнозувати повзучість по експериментально отриманим даним.

В доповіді розглядається задача про побудову ядер і резольвент інтегральних рівнянь Вольтерра 2-го роду, що описують процеси післядії в непружних середовищах, і записуються таким чином [1 – 3]:

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E}[\sigma(t) + \int_0^t K(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau], \qquad (1)$$

$$\sigma(t) = E[\varepsilon(t) - \int_0^t R(t-\tau)\varepsilon(\tau)d\tau], \qquad (2)$$

де $K(t-\tau)$ – ядро інтегрального рівняння (1), а $R(t-\tau)$ – його резольвента, так що вираз (2) є розв'язком рівняння (1), і навпаки – вираз (1) буде розв'язком рівняння (2).

Приведемо деякі дані про структуру реологічних тіл і про метод побудови РТ високого порядку [4]. РТ n-го рангу поділяються на чотири типи. Їхні реологічні рівняння (РР) у стандартному виді записуються таким чином:

$$\begin{gathered}
\left(1 + a_1 D + \cdots a_{n-1} D^{n-1}\right)\sigma = \mathrm{H}_n^R D\left(1 + b_1 D + \cdots b_{n-1} D^{n-1}\right)\varepsilon\left(N_{2n-1}\right) \\
\left(1 + a_1 D + \cdots a_n D^n\right)\sigma = \mathrm{H}_n^R D\left(1 + b_1 D + \cdots b_{n-1} D^{n-1}\right)\varepsilon,\left(N_{2n}\right) \\
\left(1 + a_1 D + \cdots a_{n-1} D^{n-1}\right)\sigma = E_n^R\left(1 + b_1 D + \cdots b_n D^n\right)\varepsilon,\left(H_{2n}\right) \qquad (3) \\
\left(1 + a_1 D + \cdots a_n D^n\right)\sigma = E_n^R\left(1 + b_1 D + \cdots b_n D^n\right)\varepsilon,\left(H_{2n+1}\right)
\end{gathered}$$

де $D = \partial / \partial t$, H і N – квазіпружні та квазів'язкі РТ, E_n^R і H_n^R – релаксуючі пружні і в'язкі модулі відповідно, нижній індекс вказує на число елементів у невиродженому РТ, а n – його ранг.

Ядро інтегрального рівняння (1) визначається через швидкість функції повзучості $\dot{\varepsilon} = v$ так [1]:

$$K(t) = \frac{E}{\sigma_0}\dot{\varepsilon}, \tag{4}$$

звідки випливає, що для побудови швидкості деформації доцільно брати квазів'язке реологічне тіло, реологічне рівняння якого записується таким чином:

$$\left(1 + a_1 D + \cdots a_n D^n\right)\sigma = \mathrm{H}_n^R\left(1 + b_1 D + \cdots b_{n-1} D^{n-1}\right)\dot{\varepsilon}, \tag{5}$$

і в випадку, коли σ = σ_0 = *const*, для швидкості деформації (функції швидкості повзучості) $\dot{\varepsilon} = v$ одержимо з рівняння (5) наступне диференціальне рівняння:

$$v^{(n)} + c_1 v^{(n-1)} + \ldots + c_{n-1}\dot{v} + v = \sigma_0 / \left(E_n^R c_n\right), \tag{6}$$

де $c_i = b_{n-i}/b_n$. Його загальний розв'язок запишеться таким чином:

$$v = \sum_{i=1}^{n} d_i \exp\left(\lambda_i t\right) + \hat{\varepsilon}, \tag{7}$$

де $\hat{\varepsilon} = \sigma_0 / \left(E_n^R b_n\right)$ – частковий розв'язок рівняння (5), $\lambda_i = -1/\nu_i$ – корені характеристичного рівняння, породженого диференціальним рівнянням (6):

$$\nu^n + c_1 \nu^{n-1} + c_2 \nu^{n-2} + \ldots c_{n-1} = 0,$$

де ν_i – часи релаксації деформацій при постійному напруженні (часи післядії або часи повзучості), а d_i – сталі інтегрування, що визначаються з початкових умов.

Функція швидкості повзучості, записана згідно рівняння (7), являється по суті розкладом швидкості деформації в ряд по експонентах. Зауважимо, що розкладання функції повзучості в ряд буде тим точніше, чим більша кількість експонент в ньому, а це означає, що для кращої апроксимації функції повзучості треба брати ранг реологічного тіла якомога більшим. Побудова РТ високого рангу проводиться шляхом об'єднання РТ меншого порядку. При паралельному об'єднанні двох РТ, РР яких мають такий вид:

$$P_1\sigma_1 = Q_1\varepsilon_1, P_2\sigma_2 = Q_2\varepsilon_2,$$

одержимо РТ, РР якого запишеться так:

$$P_1P_2\sigma = \left(P_1Q_2 + P_2Q_1\right)\varepsilon,$$

а при послідовному об’єднанні для РР буде мати місце такий запис:

$$\left(P_1Q_2 + P_2Q_1\right)\sigma = Q_1Q_2\varepsilon.$$

Підставимо в рівняння (4) значення функції швидкості повзучості, підрахованої за допомогою рівняння (6), і одержимо для ядра $K(t)$ інтегрального рівняння (1) такий вираз:

$$K(t) = \frac{E}{\sigma_0}\sum_{i=1}^{n}\left[d_i e^{-t/\tau_i} + \hat{\varepsilon}\right]. \tag{8}$$

В випадку, коли швидкість функції повзучості не має адитивної константи, функцію повзучості знаходимо за допомогою любого з квазіпружних РТ n-го рангу з системи (1). Для випадку, коли $\sigma = \sigma_0 = const$ для деформації (функції повзучості) ε одержимо наступне диференціальне рівняння:

$$\varepsilon^{(n)} + c_1\varepsilon^{(n-1)} + \ldots + c_{n-1}\dot{\varepsilon} + \varepsilon / b_n = \sigma_0 / \left(E_n^R b_n\right), \tag{9}$$

де $c_i = b_{n-i}/b_n$. Його загальний розв’язок запишеться таким чином:

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} d_i \exp\left(\lambda_i t\right) + \hat{\varepsilon}, \tag{10}$$

де $\hat{\varepsilon} = \sigma_0 / \left(E_n^R b_n\right)$ – частковий розв’язок рівняння (9), $\lambda_i = -1/\nu_i$ – корені характеристичного рівняння, породженого диференціальним рівнянням (9):

$$\nu^n + c_1\nu^{n-1} + c_2\nu^{n-2} + \ldots + 1/b_n = 0, \tag{11}$$

ν_i – часи релаксації деформацій при постійному напруженні (часи післядії або часи повзучості), а d_i – сталі інтегрування, що визначаються з початкових умов.

Підставимо в рівняння (4) значення функції повзучості, підрахованої за допомогою рівняння (10), і одержимо для ядра $K(t)$ інтегрального рівняння (1) такий вираз:

$$K(t) = \frac{E}{\sigma_0} \sum_{i=1}^{n} \left[-\frac{1}{\tau_i} c_i e^{-t/\tau_i} \right]. \tag{12}$$

Далі побудуємо резольвенту $R(t)$ рівняння (1). Вона виражається через функцію релаксації $\sigma(t)$, яка описує процес релаксації напружень в середовищі при постійній деформації ε_0 таким чином [1]:

$$R(t) = \dot{\sigma}(t) / \varepsilon_0 . \tag{13}$$

Функція релаксації $\sigma(t)$ знаходиться з реологічних рівнянь квазіпружних реологічних тіл. Для прикладу розглянемо РТ, РР якого в узагальненому виді записується як H_{2n+1} і має такий вид:

$$\left(1 + a_1 D + \cdots a_n D^n\right)\sigma = E_n^R \left(1 + b_1 D + \cdots b_n D^n\right)\varepsilon,$$

і для випадку, коли $\varepsilon = \varepsilon_0 = const$, для напруження (функції релаксації) σ одержимо таке диференціальне рівняння:

$$\sigma^{(n)} + c_1 \sigma^{(n-1)} + \ldots + c_{n-1}\dot{\sigma} + c_n \sigma = \varepsilon_0 / \left(E_n^R a_n\right), \tag{14}$$

де $c_i = a_{n-i}/a_n$. Його загальний розв'язок запишеться таким чином:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} d_i \exp(\lambda_i t) + \hat{\sigma}, \tag{15}$$

де $\hat{\sigma}_0 = \varepsilon_0 / \left(E_n^R a_n\right)$ – частковий розв'язок рівняння (14), $\lambda_i = -1/\nu_i$ – корені характеристичного рівняння, породженого диференціальним рівнянням (14):

$$\nu^n + c_1 \nu^{n-1} + c_2 \nu^{n-2} + \ldots c_n = 0 , \tag{16}$$

де ν_i – часи релаксації напружень при постійній деформації (часи релаксації), а d_i – сталі інтегрування, що визначаються з початкових умов.

Підставимо з рівняння (11) вираз для функції релаксації в рівняння (8) і одержимо такий вираз для резольвенти інтегрального рівняння (13):

$$R(t) = \left[\sum_{i-1}^{n} d_i \lambda_i \exp(\lambda_i t) \right] / \varepsilon_0 . \qquad (17)$$

Підсумовуючи, скажемо, що в повідомленні запропоновано алгоритм побудови ядер і резольвент інтегральних рівнянь Вольтерра 2-го роду, які описують процеси післядії в непружних геологічних середовищах. Отримані формули для функцій повзучості і релаксции, що описують процес повзучості і релаксації в геологічному середовищі. Кількість складових у виразі для деформації дорівнює рангу РТ, звідки випливає, що для кращої апроксимації деформації доцільно брати РТ як можна більшого рангу. Побудовані за допомогою реологічних тіл ядра і резольвенти інтегральних рівнянь дають можливість точніше описати процеси деформації з урахуванням післядії і прогнозувати процес повзучості за експериментально отриманими даними. Критерієм підвищеної небезпеки є відхилення отриманих моніторингових результатів від розрахункових, що утворюються за допомогою апріорної інформації про параметри контрольо-ваних грунтів.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Колтунов М. А. Ползучесть и релаксация. — Москва : Высшая школа, 1976. — 277 с.
2. Рейнер М. Реология. — Москва : Наука, 1965. — 294 с.
3. Ржаницын А. Р. Теория ползучести. — Москва : Госстройиздат, 1968. — 416 с.
4. Бицань Є. М. Деякі особливості узагальненого реологічного тіла // Доп. НАН України. — 2009. — № 11. — С. 98—103.