

С.В.Кочергин, В.С.Кочергин

*Морской гидрофизический институт НАН Украины, г.Севастополь*

### ИДЕНТИФИКАЦИЯ НАЧАЛЬНЫХ ДАННЫХ В МОДЕЛИ ПЕРЕНОСА ПАССИВНОЙ ПРИМЕСИ

Рассматривается модель переноса пассивной примеси, основанная на *TVD*-схемах. Идентификация начального поля производится при помощи вариационного алгоритма усвоения данных измерений. Исследуется скорость сходимости итерационного процесса, которая зависит от значений входных параметров модели и структуры усваиваемой информации.

При решении экологических задач, связанных с распространением пассивной примеси, встает проблема идентификации параметров численного моделирования на основе усвоения данных измерений. Один из известных подходов к решению данной задачи является вариационный алгоритм, основанный на решении сопряженной задачи [1]. В последние годы такой алгоритм получил широкое распространение в океанологии [2 – 4] под названием «*adjoint*» метод. Применяемый в данной работе алгоритм [5] позволяет осуществлять итерационный процесс поиска минимума функционала за счет автоматического выбора итерационного параметра.

При численном моделировании распространения пассивной примеси приходится иметь дело с решениями, имеющими большие градиенты. В этих случаях применение разностных схем второго порядка аппроксимации приводит к осцилляции решения в областях резких изменений поведения решения. Одним из возможных подходов решения такой задачи являются *TVD* (*Total Variation Diminishing*) схемы, первоначально предложенные Хартемом [6].

Основной целью настоящей работы является апробация вариационного алгоритма идентификации начальных данных [5] для уравнения переноса пассивной примеси в случае применения *TVD* аппроксимаций. Кроме того, исследуются фильтрующие свойства алгоритма усвоения данных измерений и сходимость итерационного процесса.

**Алгоритм идентификации.** В области интегрирования  $D$  на интервале времени  $[0, \bar{t}]$  в качестве модели переноса пассивной примеси рассмотрим простейшее одномерное уравнение:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + U \frac{\partial \varphi}{\partial x} = k \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \begin{aligned} \Gamma : \varphi &= 0 \\ t = 0 : \varphi &= \varphi_0 \end{aligned}, \quad (1)$$

где  $U = const$ ,  $k = const$ ,  $\Gamma$  – граница области интегрирования.

Пусть на момент времени  $\bar{t}$  имеются данные измерений о поле концентрации  $\varphi_{изм}$ , тогда задача идентификации параметров модели (1) состоит в нахождении минимума функционала:

$$I_0(\varphi) = \frac{1}{2}(\varphi - \varphi_{изм}, \varphi - \varphi_{изм})_{D_t}, \quad (2)$$

где скалярное произведение определено следующим образом:

$$(\varphi, \varphi^*)_{D_t} = \int_{D_t} \varphi \cdot \varphi^* dD_t = \int_0^t \int_{D_t} \varphi \cdot \varphi^* dD dt. \quad (3)$$

Поскольку  $\varphi$  ищется как решение (1), то, умножая (1) на множители Лагранжа, минимизацию (2) при ограничениях (1) можно свести к поиску минимума функционала следующего вида:

$$I(\varphi) = I_0(\varphi) + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + U \frac{\partial \varphi}{\partial x} - k \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \varphi^* \right) + (\varphi, \varphi^*)_{\Gamma_t} - (\varphi - \varphi_0, \varphi^*)_D \Big|_{t=0}. \quad (4)$$

Следуя [3], выбираем множители Лагранжа как решение сопряженной задачи:

$$-\frac{\partial \varphi^*}{\partial t} - U \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} - k \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial x^2} = 0, \quad \begin{array}{l} \Gamma : \varphi^* = 0 \\ t = \bar{t} : \varphi^* = \nabla I(\varphi) \end{array}. \quad (5)$$

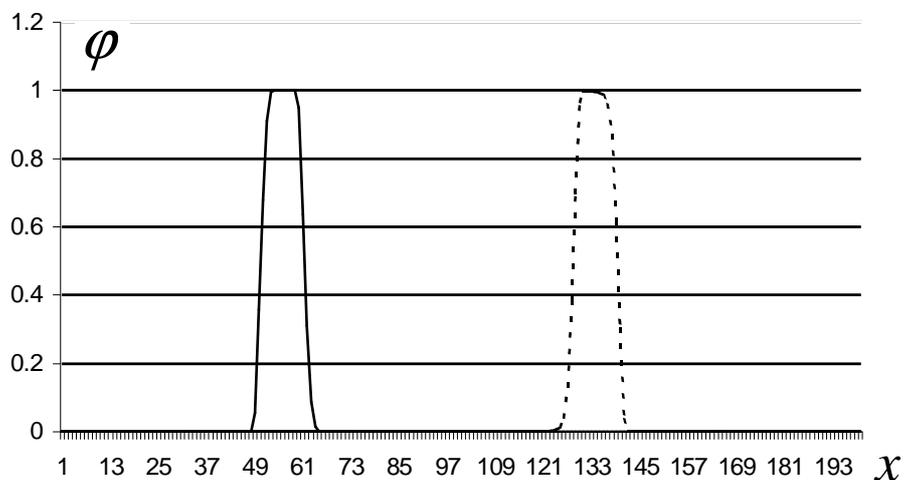
Имеем:

$$\delta I(\varphi) = -(\delta \varphi_0, \varphi^*)_D \Big|_{t=0}. \quad (6)$$

Для идентификации начального поля осуществляется итерационный спуск в направлении градиента функционала качества прогноза. Итерационный параметр  $\tau$  выбирается исходя из минимума (2). Отметим, что квадратичный функционал (2) выпуклый, следовательно, его минимум единственный. Модель (1) тоже линейна, т.е. накладываемые ею ограничения не меняют выпуклости функционала качества прогноза.

**Результаты численных экспериментов.** Численные эксперименты проводились при следующих значениях параметров:  $U = 10$  см/с,  $\Delta x = 1,4 \cdot 10^6$ ,  $\Delta t = 1,2 \cdot 10^3$  с,  $k = 10^3$  см<sup>2</sup>/с. Значения параметров в точности совпадают с параметрами существующей модели переноса пассивной примеси для Черного моря [7].

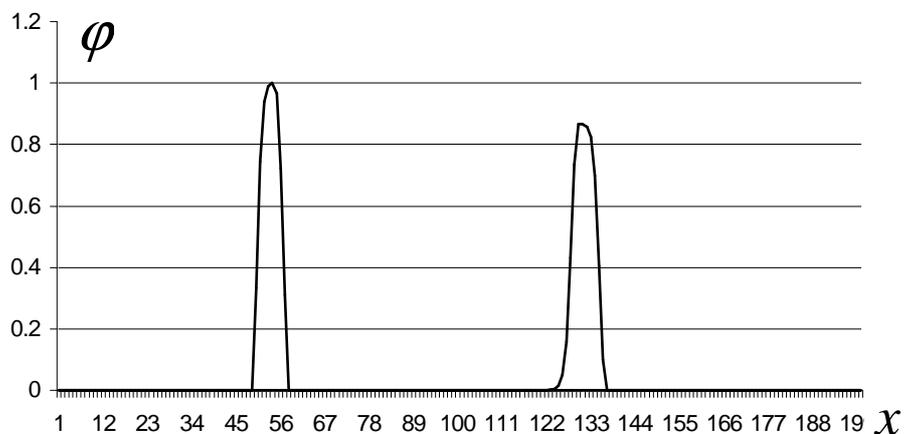
В модели используются TVD-аппроксимации для решения уравнения переноса, поэтому рассмотрим следующие численные эксперименты с учетом вышесказанного. С описанной выше моделью переноса пассивной примеси на основе вариационного алгоритма идентификации был проведен ряд численных экспериментов. Аппроксимация основной и сопряженной задачи основана на TVD схемах. Рис.1 изображает решение на конечный момент времени (штриховая линия), которая используется в качестве данных измерений, и восстановленное начальное поле (сплошная линия) в случае, когда количество точек сетки в первоначально заданном возмущении достаточно для того, чтобы максимальное значение моделируемого поля не уменьшилось по экспоненте за счет действия вязкостных членов. При заданных значениях входных параметров это количество точек должно быть больше 6. Аналогичные результаты получаются в случае применения FCT-схем и адаптивно-характеристического метода. В данном случае значения функцио-



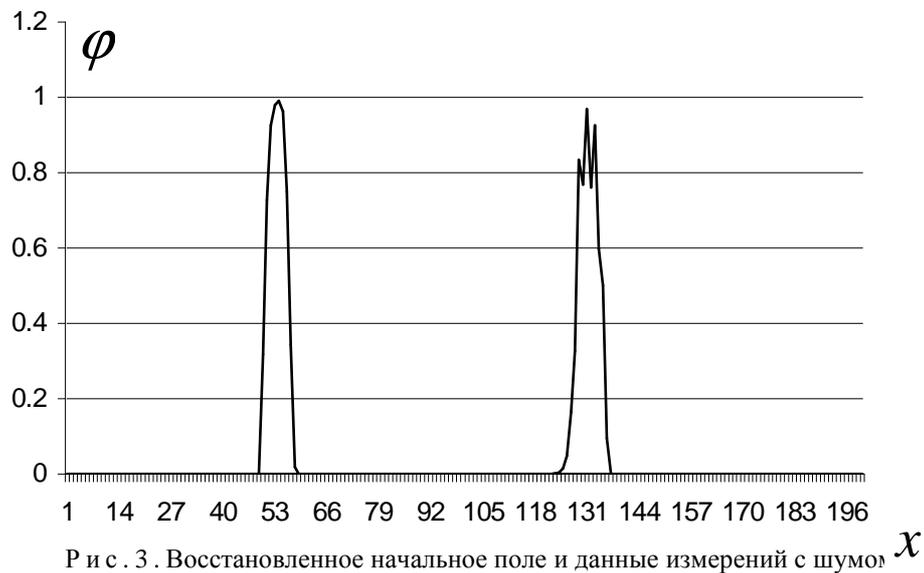
Р и с . 1 . Данные измерений ( - - - ) и восстановленное начальное поле ( — ).

нала от итерации к итерации уменьшаются очень быстро. Фактически для оценки начального поля достаточно одной итерации.

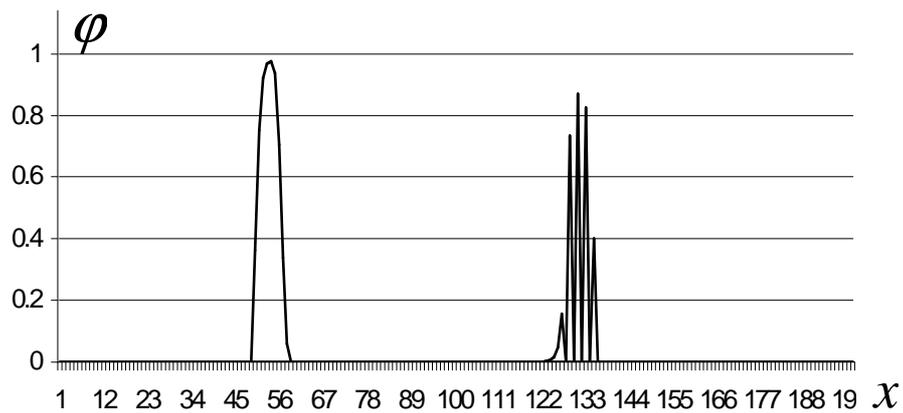
В случае, когда количество точек для данного интервала времени моделирования и значений коэффициента вязкости не достаточно для сохранения амплитуды возмущения (рис.2), исследуемый вариационный алгоритм дает возможность идентификации начального поля с достаточно степенью точности при использовании априорной информации о характере концентрации исследуемой пассивной примеси. Например, концентрация примеси не может быть меньше нуля, должна обладать определенной степенью гладкости и т.д. В этом случае итерации необходимы. Чем больше вязкость, тем больше требуется итераций для достижения минимума функционала. Необходимое число итераций [6] может служить неким регуляризатором при решении условно-корректной задачи минимизации функционала. При этом эта вязкость может быть не только физической, но и счетной. Вследствие последнего обстоятельства мы и использовали *TVD*-аппроксимации.



Р и с . 2 . Восстановленное начальное поле (слева) и данные измерений (справа).



Р и с . 3 . Восстановленное начальное поле и данные измерений с шумом  $\chi$



Р и с . 4 . Восстановленное начальное поле и «разреженные» данные измерений.

Вариант расчета, когда данные измерений зашумлены случайным образом, приведен на рис.3. В случае, когда данные имеются не во всех узлах сетки (рис.4), для достижения минимума функционала требуется большее количество итераций (рис.5). В обоих случаях начальное поле восстанавливается с достаточной степенью точности.

**Выводы.** Использование TVD-схем для реализации модели переноса позволяет реализовать алгоритм вариационной идентификации параметров модели по данным измерений. Результаты численных экспериментов показали надежную работу алгоритмов даже в случае больших значений вязкости, разреженных и случайным образом зашумленных данных. Всё это в свою очередь проводит только к увеличению требуемого числа итераций для достижения минимума квадратичного функционала качества прогноза. Проведенные тестовые расчеты дают уверенность в работоспособности алгоритма при решении данной задачи и позволяют попытаться применить его для модели переноса пассивной примеси в Черном море.

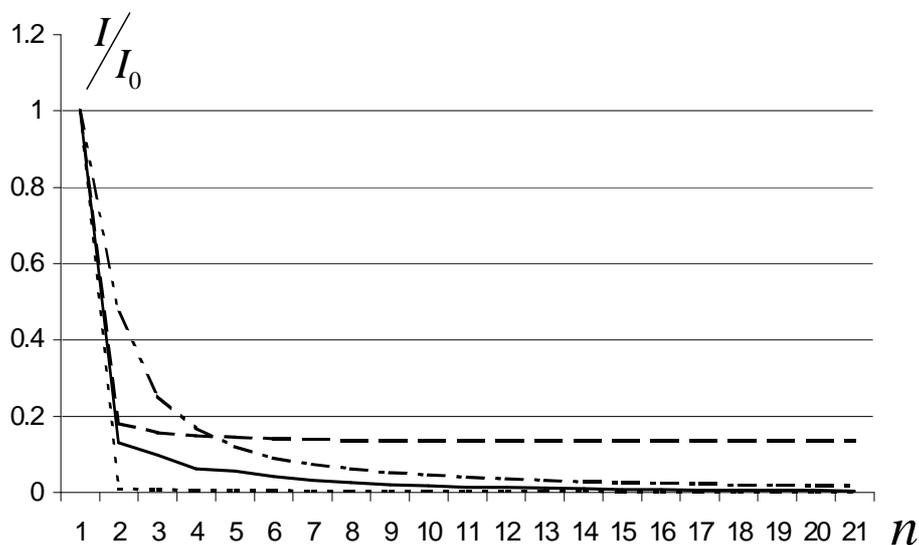


Рис. 5. Отнормированные значения функционала, зависящие от номера итерации: первый (· · · ·); второй (—); третий (зашумленные данные) (---); четвертый (разреженные данные измерений) (- · - · -) варианты расчета.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пененко В.В. Методы численного моделирования атмосферных процессов.– Л.: Гидрометеиздат, 1981.– 352 с.
2. Yu L., O'Brien J.J. Variational estimation of the wind stress drag coefficient and the oceanic eddy viscosity profile // J. Phys. Oceanogr.– 1991.– 21.– P.709-719.
3. Le Dimet F.-X., Talagrand O. Variational algorithms for analysis and assimilation of meteorological observations. Theoretical aspects // Tellus.– 1986.– 38A.– P.97-110.
4. Yu L., Malanotte-Rezzoli P. Inverse modeling of seasonal variations in the North Atlantic Ocean // J. Phys. Oceanogr.– 1998.– 28.– P.902-911.
5. Еремеев В.Н., Кочергин В.П., Кочергин С.В., Скляр С.Н. Математическое моделирование гидродинамики глубоководных бассейнов.– Севастополь: ЭКОСИ-Гидрофизика, 2002.– 238 с.
6. Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // J. Comput. Phys.– 1983.– P.353-393.
7. Фомин В.В., Алексеев Д.В., Иванча Е.В., Черкесов Л.В. Исследование гидродинамических полей в северо-западной части Черного моря, возникающих при прохождении циклона // Доповіді Національної Академії наук України.– 2004.– 5.– С.137-142.

Материал поступил в редакцию 2.02.2005 г.  
После доработки 28.03.2005 г.