

В.С. Кочергин

*Морской гидрофизический институт НАН Украины, г. Севастополь***ИДЕНТИФИКАЦИЯ НАЧАЛЬНОГО ПОЛЯ КОНЦЕНТРАЦИИ ДЛЯ
МОДЕЛИ ПЕРЕНОСА ПАССИВНОЙ ПРИМЕСИ В АЗОВСКОМ МОРЕ**

Рассматривается задача идентификации начального поля концентрации пассивной примеси при помощи вариационного алгоритма усвоения данных измерений.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: *идентификация, вариационный алгоритм, функционал невязок, поле концентрации, усвоение данных измерений, Азовское море.*

При решении задачи идентификации используется вариационный алгоритм [1]. При интегрировании модели переноса пассивной примеси применяются TVD-аппроксимации (*Total Variation Diminishing* – уменьшение полной вариации) [2, 3]. Тестовые расчеты по идентификации начального поля концентрации пассивной примеси выполнены для акватории Азовского моря.

Алгоритм. Для изучения динамики распространения примесей необходимо использование не только современных математических моделей [4], но и методов усвоения данных измерений, позволяющих идентифицировать параметры модели. Алгоритм усвоения данных измерений основан на минимизации квадратичного функционала качества прогноза, характеризующего отклонения модельного решения от измерений. При этом модель переноса пассивной примеси выступает в качестве ограничений на вариации входных параметров.

Рассмотрим модель переноса пассивной примеси в σ -координатах

$$\begin{aligned} \frac{\partial DC}{\partial t} + \frac{\partial DUC}{\partial x} + \frac{\partial DVC}{\partial y} + \frac{\partial WC}{\partial \sigma} = \\ = \frac{\partial}{\partial x} A_H \frac{\partial DC}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} A_H \frac{\partial DC}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{K_H}{D} \frac{\partial C}{\partial \sigma} \end{aligned}, \quad (1)$$

с краевыми условиями

$$\Gamma: \frac{\partial C}{\partial n} = 0, \quad (2)$$

и начальными данными

$$C(x, y, \sigma, 0) = C_0(x, y, \sigma), \quad (3)$$

где C – концентрация примеси; U, V, W – компоненты поля скорости; A_H и K_H – коэффициенты турбулентной диффузии в горизонтальном и верти-

кальном направлениях; $D(x, y)$ – динамическая глубина; σ – вертикальная координата ($\sigma = 0$ на поверхности, $\sigma = -1$ на дне); M – область интегрирования модели; Γ – граница области M ; $M_t = M \times [0, T]$

Задача усвоения данных измерений $C_{изм}$ состоит в минимизации квадратичного функционала

$$I_0 = \frac{1}{2} [P(C - C_{изм}), P(C - C_{изм})]_{M_t}, \quad (4)$$

где $M_t = M \times [0, T]$, P – оператор расширения нулями функций невязок заданных на множестве точек измерений, а скалярное произведение определяется стандартным способом. Минимизация (4) с ограничениями (1) – (3) эквивалентна поиску экстремума следующего функционала

$$I = I_0 + \left[\frac{\partial DC}{\partial t} + \frac{\partial DUC}{\partial x} + \frac{\partial DVC}{\partial y} + \frac{\partial WC}{\partial \sigma} - \frac{\partial}{\partial x} A_H \frac{\partial DC}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} A_H \frac{\partial DC}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{K_H}{D} \frac{\partial C}{\partial \sigma}, C^* \right]_{M_t} + \left(\frac{\partial C}{\partial n}, C^* \right)_{\Gamma_e} + (C - C_0, C^*)_M. \quad (5)$$

Записывая вариацию функционала (5) и интегрируя по частям с учетом краевых условий и аналога уравнения неразрывности в σ -координатах

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{\partial DU}{\partial x} + \frac{\partial DV}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial \sigma} = 0, \quad (6)$$

получим

$$\delta I = (\delta C_0, C^*), \quad (7)$$

где C^* – множители Лагранжа, которые выбираются из решения следующей сопряженной задачи

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial DC^*}{\partial t} - \frac{\partial DUC^*}{\partial x} - \frac{\partial DVC^*}{\partial y} - \frac{\partial WC^*}{\partial \sigma} - D \frac{\partial}{\partial x} A_H \frac{\partial C^*}{\partial x} - \\ & - D \frac{\partial}{\partial y} A_H \frac{\partial C^*}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{K_H}{D} \frac{\partial C^*}{\partial \sigma} = -P(C - C_{изм}) \end{aligned} ; \quad (8)$$

$$\Gamma: \frac{\partial C^*}{\partial n} = 0 ; \quad (9)$$

$$t = T: C^* = 0 . \quad (10)$$

В случае когда данные измерений имеются на конечный момент времени T в (8) задаем правую часть равную нулю, а при $t = T$ в (10) используется условие

$$t = T : C^* = P(C_{изм} - C) . \quad (11)$$

Из условия стационарности функционала (5) $\delta I = 0$ и определения градиента функционала имеем

$$\nabla_{C_0} I = C^* . \quad (12)$$

Далее осуществляется спуск по следующей итерационной процедуре

$$C_0^{n+1} = C_0^n + \tau \nabla_{C_0} I , \quad (13)$$

где τ – итерационный параметр, который выбирается одним из известных способов, например, исходя из метода наискорейшего спуска

$$\tau = \frac{(P(C - C_{изм}), \delta C)_{M_t}}{(\delta C, \delta C)_{M_t}} , \quad (14)$$

где δC – решение соответствующей задачи в вариациях.

Результаты численных экспериментов. Численные эксперименты проводились с моделью [4] для акватории Азовского моря. Для тестирования вариационного алгоритма идентификации начальных данных был проведен расчет на установление модельного поля течений с постоянным ветром 10 м/с западного направления. В результате моделирования так же было получено пространственное распределение коэффициентов A_H и K_H . Поля скоростей и коэффициентов турбулентной диффузии использовались в качестве входной информации при интегрировании модели переноса пассивной примеси на срок 5 суток.

В качестве начального поля использовалось распределение концентрации, которое изображено на рис. 1. Поле концентрации (см. рис. 2), рассчитанное при помощи модели (1) – (3), использовалось в качестве данных измерений при идентификации начального распределения. Результат идентификации на первой, пятой, десятой и пятнадцатой итерациях представлен на рис. 3 а – г, соответственно. Также на рис. 3 указаны максимальные значения концентрации примеси в восстановленном начальном поле (max). В результате итерационного процесса минимизации функционала качества прогноза, наблюдается падение его нормированного значения (см. рис. 4).

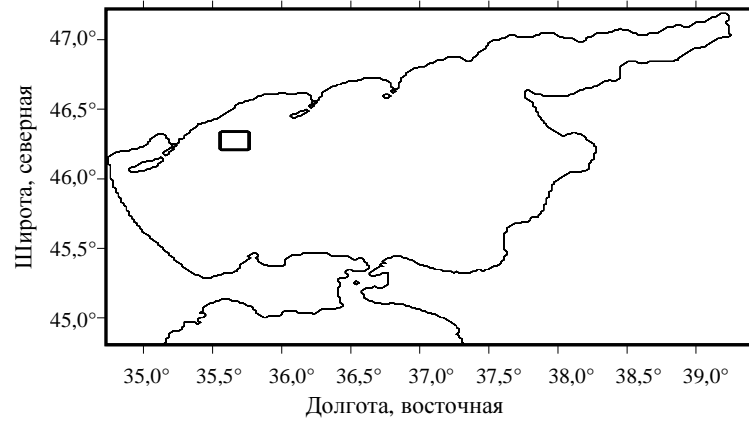


Рис. 1. Начальное распределение концентрации.

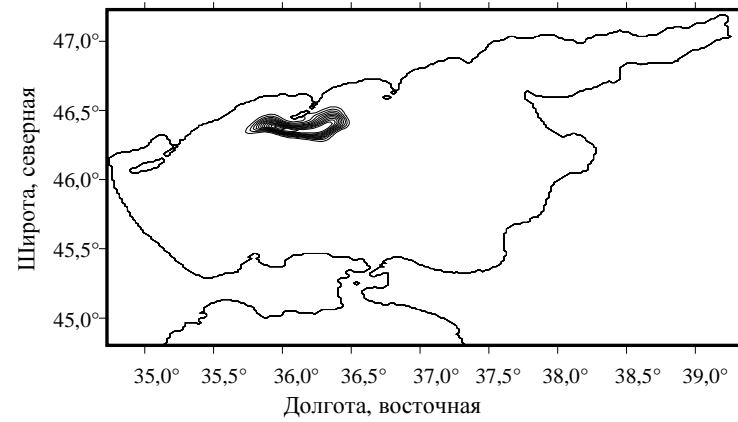


Рис. 2. Модельное распределение концентрации.

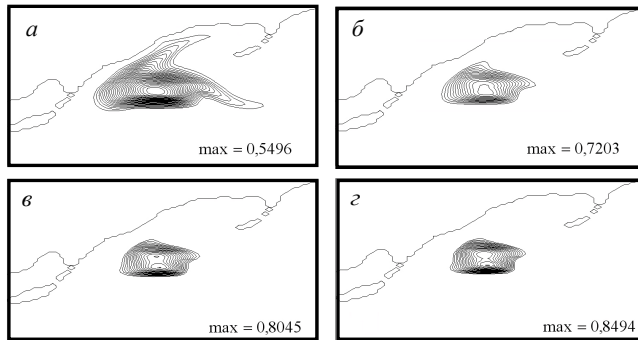
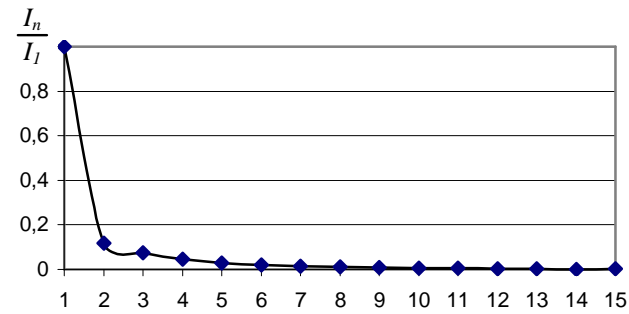
Рис. 3. Результат идентификации:
а – первая итерация, б – пятая итерация,
в – десятая итерация, г – пятнадцатая итерация.

Рис. 4. Падение нормированного значения функционала.

В результате применения вариационного алгоритма идентификации начального поля концентрации пассивной примеси для акватории Азовского моря, получена достаточно хорошая сходимость итерационного процесса и точность определения начального распределения поля концентрации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Marchuk G.I., Penenko V.V.* Application of optimization methods to the problem of mathematical simulation of atmospheric processes and environment // *Modelling and Optimization of Complex Systems* / Ed. G.I. Marchuk. Proc. Of the IFIP-TC7 Working conf. New-York: Springer. – 1978. – P. 240-252.
2. *Harten A.* High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // *I. Comput. Phys.* – 1983. – Vol. 49. – P. 357-393.
3. *Pietrzak J.* The use of TVD limiters for forward-time upstream-biased advection schemes in ocean modeling // *Mon. Wea. Rev.* – 1998. – Vol. 126. – P. 812-830.
4. *Иванов В.А., Фомин В.В.* Математическое моделирование динамических процессов в зоне моря-суша. – Севастополь: НПЦ «ЭКОСИ-Гидрофизика», 2008. – 363 с.

Материал поступил в редакцию 17.10.2012 г.

АНОТАЦІЯ Розглядається задача ідентифікації початкового поля концентрації пасивної домішки за допомогою варіаційного алгоритму засвоєння даних вимірів.

ABSTRACT The problem of the identification of the initial concentration fields of passive admixture with the help of variational assimilation algorithm of data measurements is considered.