

## Течения непрерывно стратифицированной жидкости, индуцированные прерыванием диффузионного переноса неподвижной пластиной

Численными методами решена задача установления течения, индуцированного диффузией на неподвижной пластине, погруженной в покоящуюся непрерывно стратифицированную жидкость. В результате прерывания естественного диффузионного потока стратифицирующей компоненты (соли) на непроницаемой поверхности в жидкости наблюдается дефицит вещества над пластиной и избыток под ней, что приводит к формированию структурированных циркуляционных движений, компенсирующих возникающие отклонения. Численные результаты, полученные для значительных расстояний от краев пластины, согласуются с асимптотическими оценками поля течений на бесконечной наклонной непроницаемой плоскости в приближении малых и больших времен. Исследованы зависимости максимальной скорости и толщины струйного течения около пластины от угла ее наклона к линии горизонта. При больших временах рассчитанные картины течения согласуются с результатами теневой визуализации в лабораторных опытах, в которых отчетливо фиксируются протяженные горизонтальные полосчатые структуры, отходящие от кромок пластины или полосов неподвижных препятствий.

**Ключевые слова:** непрерывно стратифицированная жидкость, диффузия, влияние пластины на диффузию, генерация течений, решения численные.

**Введение.** Неоднородность полей температуры, концентрации соли и давления в таких термодинамически неравновесных системах, как гидросфера и атмосфера, приводит к формированию профилей плотности, меняющихся в достаточно широких пределах, включающих неустойчивые, нейтральные и устойчивые состояния [1]. В последние годы значительное внимание уделяется изучению устойчивой стратификации, обуславливающей существование внутренних волн, переносящих на большие расстояния энергию и импульс, а также специфических процессов, формирующих тонкую структуру среды. К их числу относятся и течения, вызванные неравномерностью фонового потока стратифицирующей компоненты, по современной терминологии – «течения, индуцированные диффузией на топографии» [2].

С действием градиентов плотности, формирующих течения возле непроницаемых наклонных поверхностей, связывается образование интенсивных долинных и горных ветров в устойчиво стратифицированной атмосфере [3], а также плотностных течений в океане [4]. Струйные склоновые течения, образующиеся и в стратифицированной, и в глобально вращающейся жидкости [5], влияют на перемешивание вод и формирование тонкой структуры морской среды.

Первая математическая модель течений, индуцированных диффузией на склоне, была построена в середине прошлого века применительно к задаче о

горных и долинных ветрах [2]. Замеченная универсальность механизма формирования склоновых течений, действующего и в стратифицированной атмосфере, и в океане [6, 7], восстановила интерес к задаче после длительной паузы. Вначале были найдены стационарные решения линеаризованной системы уравнений [1], затем в виде асимптотического [8] и точного [9] решений была рассмотрена практически важная задача установления течений, индуцированных диффузией на бесконечном склоне.

Постоянный интерес к данной задаче обусловлен расширяющимся набором практических приложений, в который вошли, в частности, экологические и биологические. Экспериментально показано, что течения, индуцированные диффузией, могут служить пропульсивными механизмами и обеспечивают самодвижение тел нейтральной плавучести специальной формы в устойчиво стратифицированной морской среде [10]. Такие течения, влияющие на перемещение отдельных элементов планктона, поддерживаются как прерыванием фонового диффузионного переноса стратифицирующей компоненты, так и дополнительными градиентами концентрации, сопровождающими естественный метаболизм. Интенсивность течений, индуцированных диффузией, может определять форму поверхности мельчайших морских организмов.

Ранее теоретические исследования течений, индуцированных диффузией, проводились в упрощенной постановке: рассматривались течения около бесконечной плоскости [2, 5 – 9] или в глубокой клиновидной полости [11]. Поскольку в реальных условиях препятствия имеют конечные размеры, большой интерес представляет изучение структуры течений около их полюсов – крайних точек, максимально разнесенных по вертикали. В данной работе впервые численно рассмотрена задача установления течения, индуцированного диффузией, около наклонной полосы конечной длины, прослежена зависимость его свойств от размерных параметров задачи (величины стратификации, длины и положения полосы). Построенные решения сопоставляются с данными теневой визуализации течений, индуцированных диффузией на пластине в лабораторном бассейне.

**Постановка задачи.** Течения формируются градиентами давления, обусловленными нарушением однородности диффузионного потока вблизи непроницаемых границ в покоящейся непрерывно стратифицированной по соли жидкости.

Стратификация предполагается линейной. Уравнение состояния, выражающее зависимость плотности  $\rho$  от солёности  $S$  (эффектами сжимаемости и температуропроводности пренебрегается), линеаризуется с учетом слабости стратификации и выбирается в виде  $\rho = \rho_{00} \left( 1 - \frac{z}{\Lambda} + s \right)$ , где  $\rho_{00}$  – значение плотности на нулевом уровне,  $\Lambda = |d \ln \rho / dz|^{-1}$  – масштаб плавучести,  $s$  – возмущения солёности, ось  $z$  направлена вверх. Частота  $N = \sqrt{\frac{g}{\rho} \frac{d\rho}{dz}}$  и период плавучести  $T_b = 2\pi / N$  считаются постоянными ( $g$  – ускорение свободного падения). Молекулярный поток соли в невозмущенной среде направлен против действия силы тяжести.

Рассматриваются перестройка стратификации и установление компенсационного течения, индуцированного прерыванием диффузионного потока непроницаемой пластиной длиной  $L$ , наклоненной под углом  $\varphi$  к горизонту. Задача решается в двумерной постановке, ось  $x$  – горизонтальна.

Фундаментальная система уравнений механики неоднородной жидкости [1], включающая уравнения Навье – Стокса, неразрывности и переноса вещества с постоянным коэффициентом диффузии  $\kappa_S$ , в приближении Буссинеска принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} &= 0, \quad \frac{\partial s}{\partial t} + v_x \frac{\partial s}{\partial x} + v_z \frac{\partial s}{\partial z} = \kappa_S \left( \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} \right) + \frac{v_z}{\Lambda}, \\ \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho_{00}} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho_{00}} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) - sg, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ ,  $P$ ,  $\rho$  – переменные скорость, давление, плотность;  $\nu$  – коэффициент кинематической вязкости.

Система (1) дополняется стандартными граничными условиями на каждой стороне пластины  $\Sigma$ : прилипания для скорости  $v_x|_{\Sigma} = v_z|_{\Sigma} = 0$  и непротекания вещества для полной солености  $\left[ \frac{\partial s}{\partial n} \right]_{\Sigma} = 0$ . Для возмущений солености

граничное условие принимает вид  $\left[ \frac{\partial s}{\partial n} \right]_{\Sigma} = \frac{1}{\Lambda} \frac{\partial z}{\partial n}$ , где  $n$  – внешняя нормаль к поверхности пластины. На бесконечности все возмущения затухают.

Рассматривается задача установления течения. В начальный момент времени и пластина, и жидкость с однородным распределением градиента плотности находятся в состоянии покоя. Со временем прерывание пластиной молекулярного потока стратифицирующей компоненты нарушает однородность распределения плотности. Возникающие силы плавучести формируют нестационарное компенсационное течение, уносящее избыток солености и восполняющее ее дефицит под и над пластиной.

В систему уравнений (1) с граничными условиями входят масштабы длины, времени ( $T_b = 2\pi/N$ ) и скорости. Стратификацию и геометрию задачи характеризуют большие масштабы: плавучести  $\Lambda$  и длины пластины  $L$ . Малые масштабы  $\delta_N = \sqrt{\nu/N}$  и  $\delta_S = \sqrt{\kappa_S/N}$  характеризуют тонкоструктурные компоненты течения, обусловленные совместным влиянием диссипации (вязкости и диффузии) и стратификации [12]. Отношение микромасштаба длины  $\delta_N$  и времени  $T_b$  задает характерную скорость течений  $U_N = \sqrt{\nu N}$ .

Отношения характерных масштабов позволяют ввести традиционные безразмерные комплексы – числа Рейнольдса  $Re = U_N L / \nu$ , Пекле  $Pe = U_N L / \kappa_s$  (или их отношение – число Шмидта  $Sc = \nu / \kappa_s$ ), Фруда  $Fr = U_N / NL$ , а также параметр  $C = \Lambda / L$ .

Большое число собственных масштабов задачи ( $\Lambda$ ,  $L$ ,  $\delta_N$  и  $\delta_s$ ) и безразмерных параметров свидетельствует о сложной внутренней структуре медленного течения, порождаемого прерыванием диффузионного потока на непроницаемом препятствии, что учитывалось при разработке алгоритма и программ расчета.

Для сокращения записи рассмотрение проводится в двух ортогональных системах координат: лабораторной ( $xOz$ ) и локальной ( $\xi O\zeta$ ), в которой ось абсцисс лежит в плоскости пластины, наклоненной под углом  $\varphi$  к горизонту. Переход от лабораторной к локальной системе координат осуществляется по формулам:  $\xi = x \cos \varphi + z \sin \varphi$ ;  $\zeta = z \cos \varphi - x \sin \varphi$ . В локальных координатах  $\xi O\zeta$  система (1) принимает вид

$$\begin{aligned} \cos \varphi \left( \frac{\partial v_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial v_\zeta}{\partial \zeta} \right) + \sin \varphi \left( \frac{\partial v_\xi}{\partial \xi} - \frac{\partial v_\zeta}{\partial \zeta} \right) &= 0, \\ \rho &= \rho_{00} \left( 1 - \frac{\zeta \cos \varphi + \xi \sin \varphi}{\Lambda} + s \right), \\ \frac{\partial v_\xi}{\partial t} + (v_\xi \cos \varphi + v_\zeta \sin \varphi) \frac{\partial v_\xi}{\partial \xi} + (v_\zeta \cos \varphi - v_\xi \sin \varphi) \frac{\partial v_\xi}{\partial \zeta} &= \\ &= sg \sin \varphi - \frac{1}{\rho_{00}} \left( \cos \varphi \frac{\partial P}{\partial \xi} - \sin \varphi \frac{\partial P}{\partial \zeta} \right) + \nu \Delta v_\xi, \\ \frac{\partial v_\zeta}{\partial t} + (v_\xi \cos \varphi + v_\zeta \sin \varphi) \frac{\partial v_\zeta}{\partial \xi} + (v_\zeta \cos \varphi - v_\xi \sin \varphi) \frac{\partial v_\zeta}{\partial \zeta} &= \\ &= -sg \cos \varphi - \frac{1}{\rho_{00}} \left( \sin \varphi \frac{\partial P}{\partial \xi} + \cos \varphi \frac{\partial P}{\partial \zeta} \right) + \nu \Delta v_\zeta, \\ \frac{\partial S}{\partial t} + (v_\xi \cos \varphi + v_\zeta \sin \varphi) \frac{\partial S}{\partial \xi} + (v_\zeta \cos \varphi - v_\xi \sin \varphi) \frac{\partial S}{\partial \zeta} &= \kappa_s \Delta s + \frac{v_\zeta}{\Lambda} \end{aligned} \quad (2)$$

с граничными условиями на поверхности пластины

$$v_\xi|_\Sigma = v_\zeta|_\Sigma = 0, \quad \left[ \frac{\partial s}{\partial \zeta} \right]_\Sigma = \frac{\cos \varphi}{\Lambda}. \quad (3)$$

Аналитические исследования системы (2) с граничными условиями (3) в полной постановке выполнены только для бесконечной пластины, когда нелинейные члены исчезают вследствие двумерности течения [2, 6, 11]. В общем случае необходимо учитывать нелинейные эффекты, влияние которых

особенно выражено вблизи кромок пластины. Силы плавучести, порождающие компенсационное течение у непроницаемой поверхности, одновременно ограничивают высоту подъема частиц жидкости, искажают их траектории после схода с пластины. Визуализации данного участка течения было уделено особое внимание, поскольку ранее картина течения в данной области не изучалась.

**Алгоритм решения задачи.** Численное решение системы (2) с граничными условиями (3) находилось в естественных физических переменных «скорость – давление» на разностном шаблоне с разнесенной «шахматной» структурой расположения сеточных узлов [13]. Рассчитываемые скорость и давление определялись в разных узлах сетки.

В пространстве  $(x, z, t)$  вводится в рассмотрение основная прямоугольная сетка  $G_0(x_i, z_j, t^n)$ , состоящая из точек

$$x_i = x_0 + i\Delta x, \quad z_j = z_0 + j\Delta z, \quad t^n = n\tau,$$

и две вспомогательные полуцелые сетки  $G_1$  и  $G_2$ :

$$G_1(x_{i+1/2}, z_j, t^n), \quad x_{i+1/2} = x_0 + (i+1/2)\Delta x, \quad z_j = j\Delta z, \quad t^n = n\tau;$$

$$G_2(x_i, z_{j+1/2}, t^n), \quad x_i = i\Delta x, \quad z_{j+1/2} = z_0 + (j+1/2)\Delta z, \quad t^n = n\tau,$$

где  $\tau$  – шаг по времени,  $n$  – число шагов. В соответствии с выбранным сеточным шаблоном вводятся следующие обозначения:

$$P(x_i, z_j, t^n) = P_{i,j}^n, \quad v_x[(i+1/2)\Delta x, j\Delta z, n\tau] = v_{xi+1/2,j}^n,$$

$$v_z[i\Delta x, (j+1/2)\Delta z, n\tau] = v_{zi,j+1/2}^n,$$

где  $i=1, \dots, N_x; j=1, \dots, N_z$ . Количество точек в каждом из направлений  $N_x, N_z$  менялось в диапазоне 500 – 2000 и 50 – 300 соответственно. Рассчитанные картины течения оставались устойчивыми при изменении числа узлов разностной сетки во всем указанном диапазоне.

В узлах основной сетки  $G_0(i, j)$  располагаются сеточные функции давления  $P_{i,j}$  и солёности  $S_{i,j}$ , а на серединах граней контрольных объемов, т.е. в узлах вспомогательных полуцелых сеток  $G_1(i+1/2, j)$  и  $G_2(i, j+1/2)$ , – сеточные функции компонент скорости. Шаги сеток выбирались как равномерными, так и переменными в обоих направлениях. Для нахождения значений параметров в точках, не соответствующих их положению на разностном шаблоне, использовалась линейная интерполяция.

Процедура определения неизвестных функций – скорости  $\mathbf{v}$ , давления  $P$  и возмущения солёности  $S$  в момент времени  $t^n = (n+1)\tau$  – организована в виде трехэтапной схемы расщепления по физическим параметрам с использованием их известных значений с предыдущего временного слоя  $t^n = n\tau$ .

На первом этапе предполагается, что перенос количества движения осуществляется за счет конвекции и диффузии, и вычисление промежуточных значений скорости проводится по уравнениям

$$\begin{aligned}\frac{\tilde{v}_x - v_x}{\tau} &= -\frac{\partial(v_x^2)}{\partial x} - \frac{\partial(v_x v_z)}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\tilde{v}_z - v_z}{\tau} &= -\frac{\partial(v_x v_z)}{\partial x} - \frac{\partial(v_z^2)}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) + Sg.\end{aligned}\quad (4)$$

На втором этапе по найденному промежуточному полю скоростей  $\tilde{v}_x$ ,  $\tilde{v}_z$  с учетом уравнения неразрывности находится поле давления из уравнения Пуассона:

$$\frac{\partial^2 P^{n+1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P^{n+1}}{\partial z^2} = \frac{\rho_{00}}{\tau} \left( \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial z} \right).\quad (5)$$

На третьем этапе предполагается, что перенос количества движения осуществляется только за счет градиента давления, и тогда окончательные значения скорости и концентрации соли на  $(n+1)$ -м временном слое рассчитываются по уравнениям

$$\begin{aligned}\frac{v_x^{n+1} - \tilde{v}_x}{\tau} &= -\frac{1}{\rho_{00}} \frac{\partial P^{n+1}}{\partial x}, \quad \frac{v_z^{n+1} - \tilde{v}_z}{\tau} = -\frac{1}{\rho_{00}} \frac{\partial P^{n+1}}{\partial z}, \\ \frac{S^{n+1} - S^n}{\tau} &= -\frac{\partial(v_x^{n+1} S^n)}{\partial x} - \frac{\partial(v_z^{n+1} S^n)}{\partial z} + \kappa_s \left( \frac{\partial^2 S^{n+1}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 S^{n+1}}{\partial z^2} \right) + \frac{v_z^{n+1}}{\Lambda}.\end{aligned}\quad (6)$$

Конечно-разностные аппроксимации рассматриваемых уравнений строятся по неявной схеме на пятиточечном шаблоне в соответствии с известной схемой «крест». Слагаемые с градиентом давления вычисляются с помощью односторонних разностей по формулам вида

$$\left[ \frac{\partial P}{\partial x} \right]_{i+1/2, j}^{n+1} = \frac{P_{i+1, j}^{n+1} - P_{i, j}^{n+1}}{\Delta x}, \quad \left[ \frac{\partial P}{\partial z} \right]_{i, j+1/2}^{n+1} = \frac{P_{i, j+1}^{n+1} - P_{i, j}^{n+1}}{\Delta z}.\quad (7)$$

Для аппроксимации диффузионных членов уравнений используется схема с центральными разностями, например,

$$\begin{aligned}\left[ \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \right]_{i+1/2, j} &= \frac{1}{\Delta x^2} (v_{x, i+3/2, j} - 2v_{x, i+1/2, j} + v_{x, i-1/2, j}), \\ \left[ \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right]_{i+1/2, j} &= \frac{1}{\Delta z^2} (v_{x, i+1/2, j+1} - 2v_{x, i+1/2, j} + v_{x, i+1/2, j-1}).\end{aligned}\quad (8)$$

Конвективные слагаемые исходных уравнений аппроксимируются по следующим формулам:

$$\left[ \frac{\partial v_x^2}{\partial x} \right]_{i+1/2,j} = \frac{1}{\Delta x} \left[ (v_x^2)_{i+1,j} - (v_x^2)_{i,j} \right],$$

$$\left[ \frac{\partial (v_x v_z)}{\partial z} \right]_{i+1/2,j} = \frac{1}{\Delta z} \left[ (v_x v_z)_{i+1/2,j+1/2} - (v_x v_z)_{i+1/2,j-1/2} \right],$$
(9)

а для уменьшения влияния вычислительной вязкости на устойчивость решения используется противопоточная схема [13].

Полученные конечно-разностные уравнения представляют собой систему алгебраических уравнений, связывающих явно искомое давление с компонентами скорости на  $(n+1)$ -м временном шаге, которые удовлетворяют уравнению неразрывности. Она аппроксимирует рассматриваемую систему дифференциальных уравнений (1) с первым порядком точности по времени и со вторым порядком точности по пространственным переменным. Проведенный анализ показал устойчивость схемы.

Решение полученной системы разностных алгебраических уравнений с пятидиагональной матрицей коэффициентов осуществляется методом переменных направлений, который состоит в редукции исходного уравнения для давления (5) к двум одномерным уравнениям второго порядка точности с трехдиагональными матрицами, рассчитываемыми методом прогонки.

Процесс установления течения начинается в момент времени  $t = 0$ , когда пластина мгновенно прерывает поток стратифицирующей компоненты. Критерием окончания каждого вычислительного эксперимента служит условие малости максимальной относительной разности между значениями искомых переменных на последовательных временных шагах по сравнению с заданной

величиной ошибки  $\varepsilon$ :  $\max \left\{ 1 - \frac{v_x^n}{v_x^{n+1}}, 1 - \frac{v_z^n}{v_z^{n+1}} \right\} \leq \varepsilon$ . На протяжении всего рас-

чета контролировалось выполнение уравнения неразрывности во всех узлах рассматриваемой расчетной области.

При проведении вычислений разностная сетка сгущалась в областях течения с большими градиентами (вблизи поверхности пластины и ее кромок) так, чтобы на масштабе солёности  $\delta_\sigma$  помещалось наперед заданное число разностных ячеек  $n_\sigma$ . Параметры задачи варьировались в следующих диапазонах: длина пластины  $L = 5 - 40$  см, период плавучести  $T_b = 5 - 10$  с, угловое положение пластины относительно горизонта  $\varphi = 0 - 70^\circ$ .

Ниже приведены результаты решения нелинейной системы (2) с граничными условиями (3) на разностной сетке  $1000 \times 300$  узлов с  $n_\sigma = 5$  узлам на масштабе солёности  $\delta_\sigma$ . Рассчитывается течение, возникающее около пластины длиной  $L = 5$  см, помещенной в жидкость с частотой плавучести  $N = 1,26 \text{ с}^{-1}$  и периодом плавучести  $T_b = 5$  с.

**Расчет картины течения.** Для иллюстрации структурных особенностей течения, индуцированного диффузией на неподвижной пластине, из ряда расчетов эволюционирующей картины выбраны моменты времени, при которых течение близко к установившемуся состоянию. Конкретные значения

времени зависят от угла наклона пластины относительно горизонта и задаваемой точности выхода на установившийся режим. Для частоты плавучести  $N = 1,26 \text{ с}^{-1}$  при погрешности в 0,02% время установления течения составляет  $\tau_{\infty} = t_{\infty} / T_b \approx 500$  при горизонтальном размещении пластины,  $\tau_{\infty} \approx 90$  при  $\varphi = 10^\circ$  и далее убывает с увеличением угла наклона:  $\tau_{\infty} \approx 60$  при  $\varphi = 20^\circ$  и  $\tau_{\infty} \approx 40$  при  $\varphi = 40^\circ$ .

Общее представление о сложной структуре установившегося течения стратифицированной жидкости, индуцированного диффузией около неподвижной пластины, дают картины линий тока, представленные на рис. 1. В них наблюдаются отдельные циркуляционные ячейки различного размера как в непосредственной окрестности, так и вдали от пластины.

Непосредственно вблизи пластины как наклонной (рис. 1, *a*), так и горизонтальной (рис. 1, *б*) линии тока располагаются параллельно ее поверхности. Однородность картины линий тока свидетельствует о неизменности профиля скорости вдоль большей части длины пластины. Исключения составляют переходные области в окрестности кромок наклонной пластины и зоны контакта симметричных ячеек в центре горизонтальной пластины.

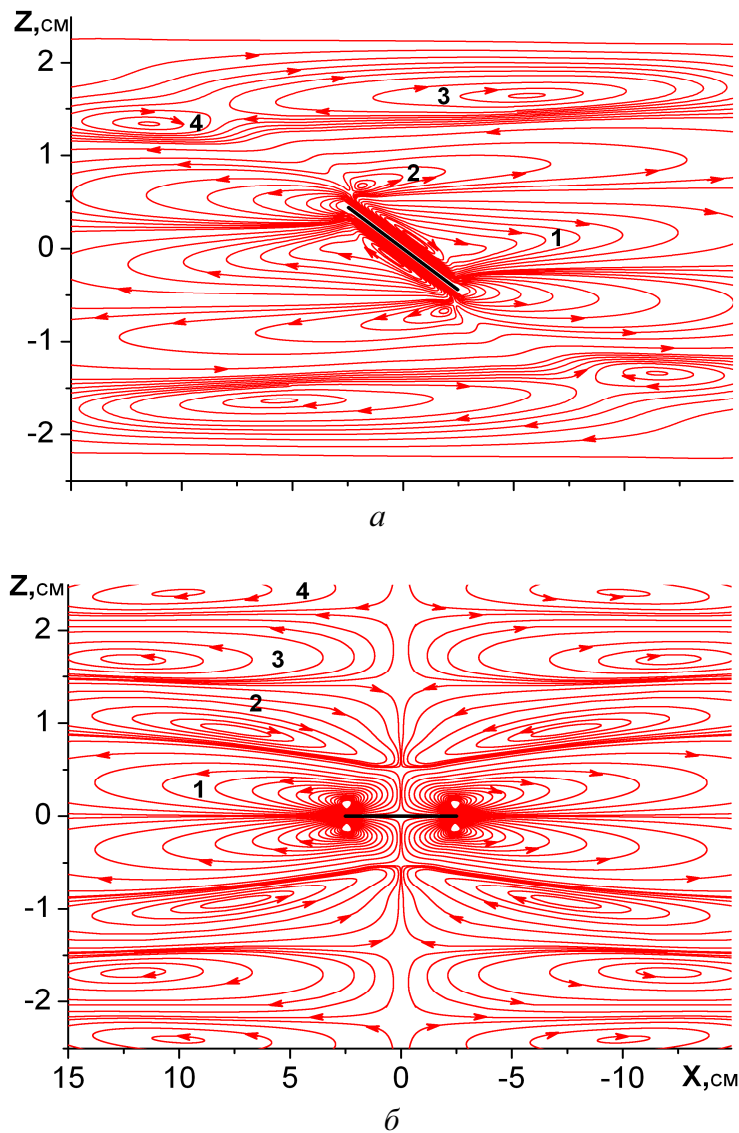
Справа снизу к верхней стороне наклонной пластины (рис. 1, *a*) примыкает главное восходящее течение, которое в виде узкой струи подтекает к нижней кромке, резко поворачивает и далее поднимается параллельным потоком вдоль поверхности. В области отрыва от верхней кромки приповерхностная струя расщепляется на две струйки, одна из которых отворачивает влево, а вторая – вправо. Отходящая вправо струйка образует вихревую ячейку 1, одна из линий тока которой, примыкающая к главному восходящему течению, характеризует относительно слабое противотечение. Остальные линии тока удаляются от пластины и образуют замкнутую ячейку 1, в которой жидкость вращается по часовой стрелке. Ее вертикальный размер равен разности высот пластины и подтекающего снизу течения.

Над верхней кромкой в области бифуркации главного течения располагается компенсационная ячейка 2, жидкость в которой вращается против часовой стрелки. Над ней на разной высоте располагаются центры следующей пары ячеек 3 и 4.

Элементы картины погружающегося течения под пластиной располагаются антисимметрично относительно ее центра. Линии тока подтекающего сверху главного спадающего струйного течения отклонившейся главной восходящей струи плавно переходят друг в друга. Течение, примыкающее к нижней стороне пластины, также расщепляется на две струйки у нижней кромки. В области бифуркации погружающейся струи располагается еще одна компенсационная ячейка, ниже которой находятся центры ячеек следующего уровня.

Факт существования противотечений, примыкающих к главным струям вдоль наклонных поверхностей, был замечен еще в пионерских работах [2, 6, 7]. Природу их формирования, которая оставалась неизвестной длительное время, проясняет анализ особенностей полной картины линий тока, из которого следует, что струйные течения составляют лишь часть элементов системы замкнутых циркуляционных ячеек различного масштаба (рис. 1, *a*).





**Р и с. 1.** Линии тока течения, индуцированного диффузией на неподвижной пластине в непрерывно стратифицированной жидкости ( $L = 5$  см,  $N = 1,26$  с $^{-1}$ ,  $T_b = 5$  с):  $a$  – наклоненной под углом  $\varphi = 10^\circ$  ( $\tau \approx 90$ );  $b$  – горизонтальной,  $\varphi = 0^\circ$  ( $\tau \approx 500$ )

Всего в приведенной на рис. 1,  $a$  картине течения около наклонной пластины выделяются 10 ячеек – по 5 с каждой стороны, которые отличаются локализацией, интенсивностью и знаком циркуляции. В табл. 1 приведены данные по положению центров, величин циркуляции и завихренности в циркуляционных ячейках, которые на рис. 1 пронумерованы от 1 до 4 по мере уменьшения их интенсивности.

Т а б л и ц а 1

**Координаты центров вихревых ячеек ( $x_c, y_c$ ), углы наклона ( $\alpha$ ) линий, соединяющих центры антисимметрично расположенных ячеек, длины их контуров ( $L_\omega$ ), величины циркуляции ( $C_\Gamma$ ) и максимальной завихренности  $\omega_{\max}$  для наклонной ( $\varphi = 10^\circ$ ) и горизонтальной ( $\varphi = 0^\circ$ ) пластин ( $L = 10$  см,  $N = 1,26$  с $^{-1}$ )**

$\varphi,^\circ$	Номер ячейки	$x_c, \text{см}$	$y_c, \text{см}$	$\alpha,^\circ$	$L_\omega, \text{см}$	$C_\Gamma \times 10^4$	$\omega_{\max}$
10	1	-0,563	0,0925	-9,33	44,91	40,23	7,07
	2	1,875	0,67	19,66	5,66	1,278	0,1085
	3	-5,62	1,65	-16,36	43,13	0,9117	0,0424
	4	11,48	1,34	6,65	11,65	0,1723	0,00886
0	1	2,426	0,113	2,67	51,16	15,828	16,95
	2	7,358	0,9225	7,15	40,61	2,4126	1,624
	3	12,096	1,683	7,92	47,86	0,2358	0,0288
	4	10,034	2,4	13,45	33,88	0,03813	0,0031

Еще две пограничные ячейки (по одной у каждой кромки), расположенные между отходящими и подтекающими струйками, здесь не пронумерованы. В них замыкаются линии тока главных струйных течений – отходящего (сверху) и подтекающего (снизу) слева над пластиной, а также уходящего (снизу) и подтекающего (сверху) под пластиной. Вращение в этих ячейках циклоническое, т.е. против часовой стрелки. Они образуют единую циркуляционную систему, в которой жидкость стекает по нижней стороне пластины, разворачивается в большой циркуляционной ячейке, примыкающей к пластине справа, затем поднимается вдоль верхней стороны пластины, поворачивает влево и замыкается на погружающееся главное струйное течение.

Такое сложное движение формируется градиентами давления, обусловленными неоднородностями поля плотности вблизи непроницаемого препятствия. Наиболее компактные ячейки ( $I$  и антисимметричная ей на рис. 1,  $a$ ) примыкают к внешнему контуру струйных течений в области их поворота после схождения с кромки пластины – справа сверху и слева снизу.

Именно циклонический характер вращения жидкости в примыкающих ячейках обеспечивает формирование противотечений, прилегающих к внешней стороне главных струйных течений, где формируются области максимальных сдвигов скорости. Линии тока двух противоструй, имеющие достаточно сложную форму, остаются регулярными на всем протяжении, что свидетельствует о глобальной устойчивости течения.

Выше и ниже главных струйных и циркуляционных течений около пластины располагаются крупномасштабные компенсационные замкнутые ячейки с центрами в точках  $(x_{lc}, z_{lc}) = (-1,875; -0,67)$  и  $(x_{rc}, z_{rc}) = (1,875; 0,67)$  (значения приведены в сантиметрах), отделенные незамкнутой линией тока (сепаратрисой). Центры ячеек располагаются антисимметрично относительно

центра пластины, следовательно, линия, соединяющая центры ячеек, проходит через начало координат и составляет с горизонталью угол  $\alpha \approx 19,66^\circ$ .

Размеры и положение центров компактных ячеек существенно зависят от угла наклона пластины к горизонту. Так, длина контура висячего вихря 2 и расстояние от его центра до ближайшей кромки пластины составляют  $L_\omega = 3,87; 4,01; 1,164; 0,91; 0,56; 0,21$  см и  $D_\omega = 0,12; 0,4027; 0,0824; 0,0581; 0,031; 0,019$  см для соответствующих значений угла наклона пластины к горизонту  $\varphi = 5; 10; 20; 30; 40; 60^\circ$ . Следовательно, наибольшие размеры данного вихря достигаются при  $\varphi \approx 10^\circ$ .

Выше и ниже рассмотренных циркуляционных ячеек располагаются еще две достаточно крупномасштабные вихревые структуры, отмеченные на рис. 1 номерами 3 и 4. Они располагаются по разные стороны от наклонной пластины, при этом размеры и интенсивность вихря 3 больше и его центр расположен ближе к соответствующей кромке пластины (табл. 1).

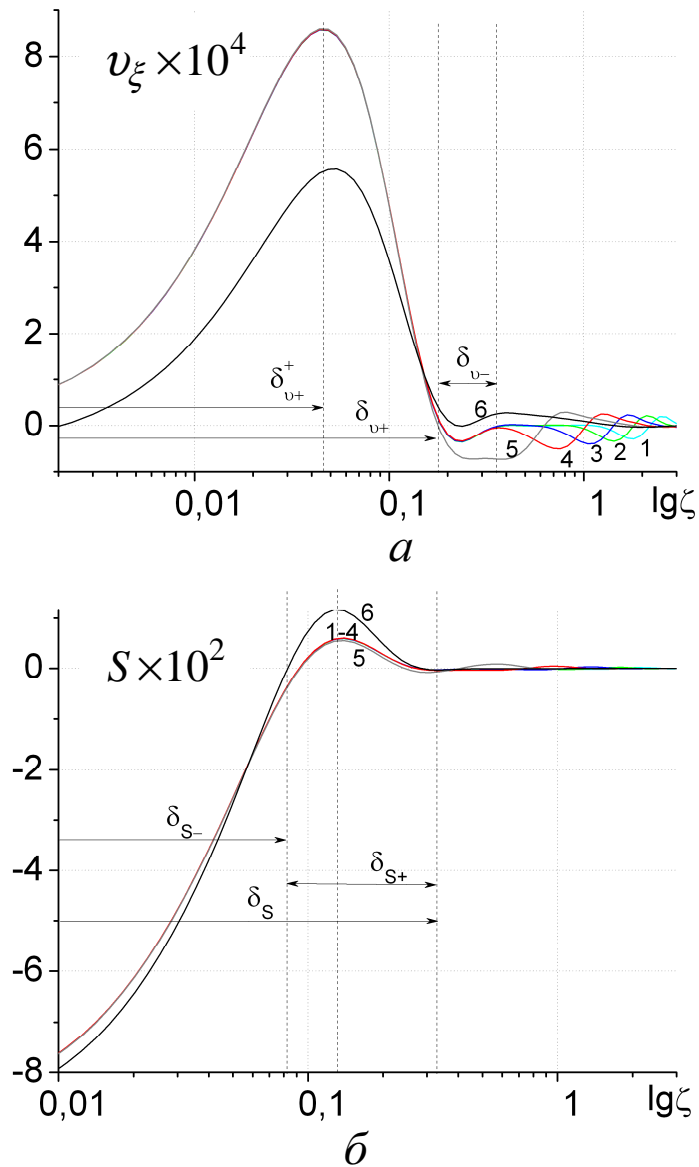
Картина линий тока около горизонтальной пластины, моделирующей центральное сечение непроницаемого препятствия произвольной формы, более простая и состоит из последовательности симметрично расположенных горизонтальных вихревых ячеек (рис. 1, б). Скорость и завихренность течения резко уменьшаются с удалением от поверхности пластины. Такие течения, представляющие большой практический интерес, не могут рассчитываться в традиционной постановке [2, 6, 7], поскольку условия применимости метода построения стационарных решений исключают диапазон малых углов наклона плоскости к горизонту. Для используемого метода построения решения таких ограничений нет.

Во всех случаях и при горизонтальном, и при наклонном положении пластины циркуляция в соприкасающихся ячейках над и под пластиной, как и в соседних ячейках на одном горизонте, имеет противоположные знаки, и скорость на границах соседних ячеек однонаправлена. Такие пространственно-периодические течения можно отнести к классу диссипативно-гравитационных волн [14], в которых скорость на границах достигает максимального значения в отличие от ячеек многокомпонентной конвекции, где скорости разнонаправлены и границы ячеек отмечены слоем покоящейся жидкости.

Анализ результатов вычислений показал, что увеличение стратификации приводит к пропорциональному росту возмущения солёности, а следовательно, и к интенсификации циркуляционного движения жидкости, компенсирующего прерывание диффузионного потока на непроницаемой поверхности. Скорость жидкости в главной струе пропорциональна, а поперечные размеры (толщины) структурных элементов – обратно пропорциональны корню квадратному из частоты плавучести. При этом масштабы периодического течения Стокса  $\delta_N = \sqrt{\nu/N}$  и толщины пограничного слоя Прандтля  $\delta_U = \nu/U$  оказываются равными, поскольку для течений, индуцированных диффузией,  $U \sim \sqrt{\nu N}$ .

Структуру течения иллюстрируют детальные профили продольной компоненты скорости и возмущения солёности в зависимости от удаления от поверхности, приведенные на рис. 2, в различных сечениях по длине пластины

в полулогарифмическом масштабе. Выбор представления определяется условием визуализации внешней кромки течения, при этом теряется возможность визуализации граничного условия на пластине.



**Р и с. 2.** Профили продольной компоненты вектора скорости ( $a$ ) и возмущения солёности ( $b$ ) в различных сечениях вдоль поверхности наклонной пластины, погруженной в непрерывно стратифицированную жидкость ( $L = 20$  см,  $N = 1,26$  с $^{-1}$ ,  $\varphi = 10^\circ$ ; для кривых 1 – 6 значения  $\xi/L = 0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5$  соответственно)

Скорость примыкающего струйного течения монотонно растет с удалением от поверхности, достигает максимума на некотором расстоянии, после чего плавно убывает на масштабах, определяемых главным образом вязкостью среды (рис. 2, *a*). Далее картина распределения скорости имеет «волноподобный» вид: над областью каждого течения располагается соответствующее противотечение, что характерно для диссипативно-гравитационных волн, или, как их еще называют, внутренних волн «нулевой» частоты [14]. Профили главной струи и примыкающего противотечения остаются практически неизменными вдоль большей части длины пластины, за исключением узкой области в окрестности кромок.

Различие в структурах профилей возмущений солёности и скорости проявляется в картинах течения в непосредственной окрестности пластины. Полная солёность на поверхности пластины удовлетворяет условию непротекания, т.е. изолинии солёности подходят по нормали к поверхности, и далее возмущения солёности монотонно спадают с удалением от непроницаемой поверхности (рис. 2, *b*).

Значения толщин областей возмущений солёности и продольной компоненты скорости (отсчитываются по нормали к пластине от ее поверхности до первого нулевого значения величины), рассчитанные для установившегося течения при различных углах наклона пластины к горизонту, приведены в табл. 2. Сравнение значений показывает, что толщины плотностного и скоростного возмущений, непосредственно прилегающих к поверхности пластины, так же как и максимальные значения скорости и солёности, убывают с увеличением угла наклона  $\varphi$ . Отношение пространственных масштабов изменчивости скорости и плотности в установившемся течении составляет порядка двух и практически не зависит от угла наклона пластины к горизонту. При этом полная ширина прилегающего струйного течения превышает толщину нарастающей его части приблизительно в 4 раза.

Т а б л и ц а 2

Полная толщина области возмущения солёности ( $\delta_{s-}$ ), полная толщина примыкающего к пластине струйного течения ( $\delta_{v+}$ ), включая область нарастания скоростного возмущения ( $\delta_{v+}^+$ ), максимальные значения продольной компоненты скорости ( $v_{\xi}^{\max}$ ) и возмущения солёности ( $S^{\max}$ ) для различных углов наклона ( $\varphi$ ) пластины к горизонту в сравнении с асимптотическими оценками в приближении больших времен (отмечены жирным шрифтом) ( $L = 10$  см,  $N = 1,26$  с<sup>-1</sup>)

$\varphi$	5°	10°	20°	30°	40°	60°
$\delta_{s-}$	0,135	0,092	0,062	0,058	0,049	0,042
$\delta_{v+}$	0,228 <b>0,26</b>	0,19 <b>0,184</b>	0,132 <b>0,131</b>	0,11 <b>0,109</b>	0,096 <b>0,096</b>	0,083 <b>0,083</b>
$\delta_{v+}^+$	0,064 <b>0,065</b>	0,045 <b>0,046</b>	0,032 <b>0,033</b>	0,0286 <b>0,028</b>	0,024 <b>0,024</b>	0,021 <b>0,021</b>
$v_{\xi}^{\max} \times 10^4$	12,02 <b>12,55</b>	8,59 <b>8,787</b>	5,95 <b>5,974</b>	4,53 <b>4,55</b>	3,5 <b>3,55</b>	1,98 <b>1,99</b>
$S^{\max} \times 10^2$	1,158	0,897	0,617	0,472	0,37	0,208

Картину линий тока дополняют поля различных физических параметров, приведенные на рис. 3. Возмущения полей различных переменных включают ряд общих особенностей, наиболее выраженных вблизи боковых поверхностей, где собственно и формируются струйные течения, и кромок пластины, где они отрываются от препятствия.

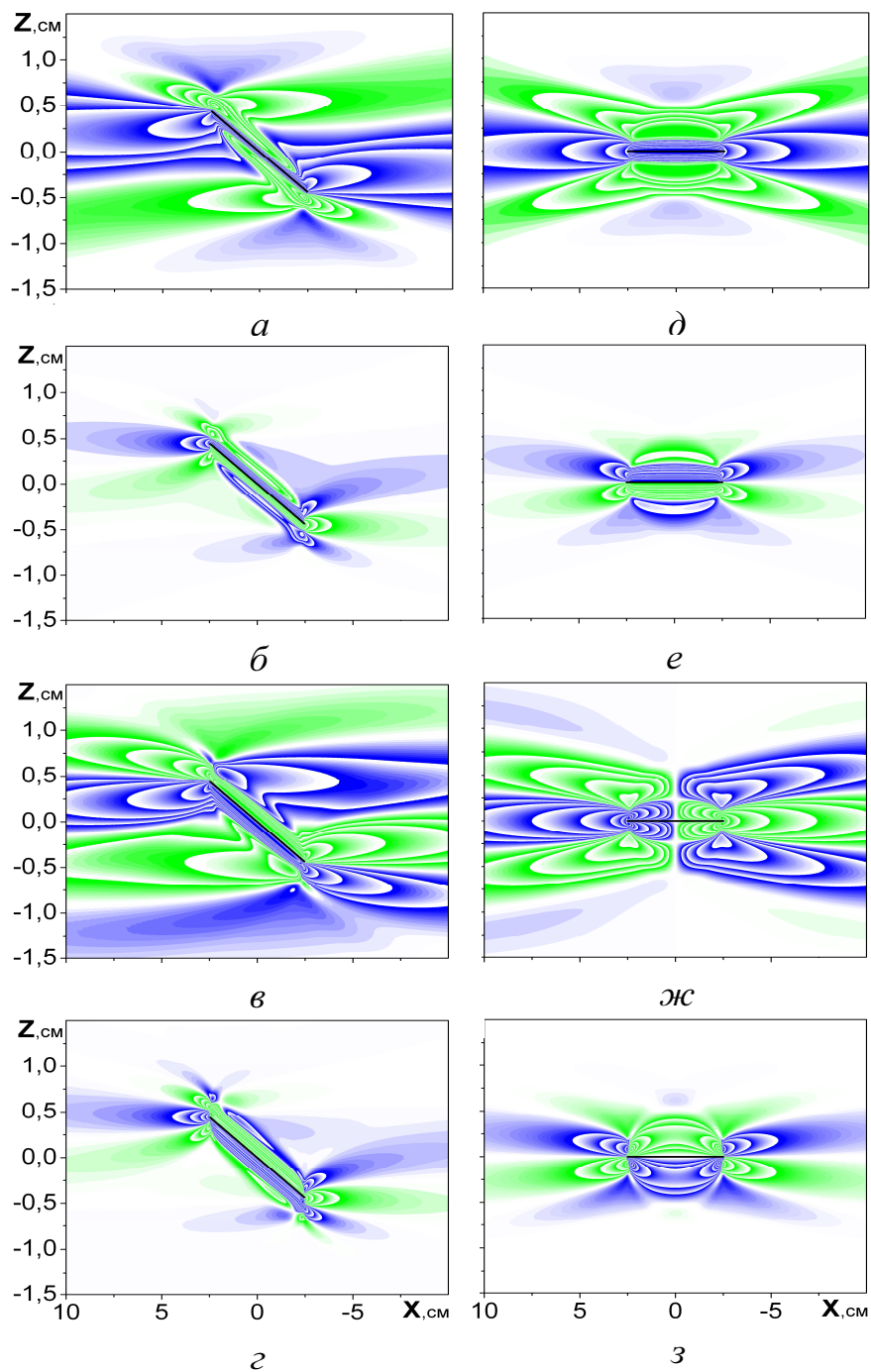
Первопричиной образования течений служат градиенты давления, обусловленные неоднородностями полей солености, возникающими в результате прерывания молекулярного потока погруженной пластиной, которые формируют и поддерживают возникающие течения (рис. 3, *а*). В силу сложности их структуры поле возмущений солености вблизи наклонной пластины оказывается немонотонным: к тонким слоям дефицита солености над пластиной и избытка под ней (чему соответствуют темно- и светло-серые области на рис. 3, *б*) примыкают полосы с избыточным значением солености над и ее дефицитом под пластиной.

Образование таких полосок обусловлено существованием противотечений, структура которых показана ниже. Имеются существенные различия в геометрии главных, примыкающих к пластине, и вторичных возмущений солености: внутренние слои антисимметрично продолжаются вглубь жидкости, внешние слои над пластиной ограничены снизу, под пластиной – сверху. Верхний конец внешнего возмущения над пластиной (как и нижний конец под ней) раздваивается. Центры верхней и нижней компактных областей примыкающего возмущения совпадают с центрами компенсационных ячеек  $(x_{lc}, z_{lc})$  и  $(x_{rc}, z_{rc})$  в областях поворота главной струи. К ним сверху (снизу) примыкает область возмущений противоположного знака. Такая структура типична для волн «нулевой» частоты, которые наблюдаются около границ конвективных течений [14].

При горизонтальном положении пластины наблюдаются некоторые особенности: возмущения имеют вид правильных ячеек; в целом картина возмущений антисимметрична относительно центральной плоскости – областям дефицита солености над пластиной соответствуют области ее избыточности под ней (рис. 3, *е*). Семейство диссипативно-гравитационных волн [14] отходит от кромок пластины.

В картине поля горизонтальной компоненты скорости  $v_x$  отчетливо выражены главные струйные течения, восходящее над пластиной (светло-серый цвет) и погружающееся под ней (темно-серый). Их геометрия антисимметрична относительно центра пластины. К струйным течениям примыкают снаружи ячейки с противоположным направлением скорости. Сравнение рис. 3, *б* и 3, *в* отчетливо демонстрирует различие толщин примыкающих полос возмущений солености и скорости. В таких течениях все независимые переменные характеризуются собственной геометрией и масштабами.

С увеличением угла наклона пластины относительно горизонта интенсивность и толщины прилегающих течений уменьшаются.



**Р и с. 3.** Поля возмущений давления (*a*, *д*), солёности (*б*, *е*), горизонтальной (*в*, *ж*) и вертикальной (*г*, *з*) компонент вектора скорости течений, индуцированных диффузией на непроницаемой тонкой пластине ( $L = 5 \text{ см}$ ,  $N = 1,26 \text{ с}^{-1}$ ,  $T_b = 5 \text{ с}$ ): *a* – *г* – наклонная пластина,  $\varphi = 10^\circ$  ( $\tau \approx 90$ ), *д* – *з* – горизонтальная пластина ( $\tau \approx 500$ )

Поле продольной компоненты скорости около горизонтально установленной пластины оказывается симметричным относительно плоскости пластины и антисимметричным относительно центральной вертикальной плоскости. В центре пластины по условиям симметрии течение отсутствует. Особая роль принадлежит краям пластины, в окрестности которых контактируют разнонаправленные течения. Непосредственно на горизонте пластины продольная компонента скорости жидкости направлена к центру и достигает максимальных значений у кромок пластины в областях максимальных градиентов плотности и давления. Ее величина плавно убывает к центру пластины, где значение модуля скорости минимально. Циркуляционные ячейки имеют в целом сложную форму.

Структура поля вертикальной компоненты скорости  $v_y$  (рис. 3, з) в общем повторяет картину распределения продольной компоненты. В нем выражены главные струйные течения, продолжающиеся в толщу жидкости, и примыкающие компенсационные течения (светло-серым цветом обозначены положительные значения скорости, темно-серым – отрицательные). Существенные отличия наблюдаются только у кромок пластины, где представлена «розетка» возмущений, типичная для нестационарных внутренних волн. Их формирование обусловлено угловым ускорением потока, поворачивающегося под действием архимедовых сил после отрыва от поверхности пластины к горизонту нейтральной плавучести.

Следует отметить, что поскольку скорости индуцированных течений невелики, заметную роль в пристеночной области играют диффузионные потоки между главным струйным течением и примыкающим противотечением.

Поле вертикальной компоненты скорости (в отличие от продольной) около горизонтальной пластины, наоборот, оказывается антисимметричным относительно плоскости пластины и симметричным относительно центральной вертикальной плоскости (рис. 3, д). Здесь также наиболее сложные и контрастные структуры наблюдаются у кромок пластины. Циркуляционные ячейки имеют в целом сложную форму, вертикальная компонента скорости присутствует в широком слое, примыкающем к пластине. Максимумы вертикальной компоненты скорости наблюдаются у внутреннего края пластины. В центре скорость несколько меньше, и ее максимальное значение наблюдается на большем расстоянии от пластины, чем у края.

**Сравнение с результатами других работ.** В большинстве публикаций внимание в основном уделяется расчету прилегающей к наклонной поверхности струи и примыкающего к ней противотечения.

Характерные параметры течения – максимальное значение скорости  $v_{\xi \max}$ , профиль которой задается выражением  $v_{\xi} = \frac{2\kappa_s}{\delta_{\mu}} e^{-\xi/\delta_{\mu}} \sin(\xi/\delta_{\mu}) \operatorname{ctg} \varphi$ , и

поперечный размер струи  $\delta_{\mu} = \left( \frac{4\nu\kappa_s}{N^2 \sin^2 \varphi} \right)^{1/4}$  (одинаковый для полей скорости и возмущений солёности — формулы Прандтля – Филлипса – Вунша [2, 6, 7], полученные в стационарном описании) – не применимы к случаю малых углов наклона плоскости к горизонту.



Значения толщины прилегающего к поверхности струйного течения и максимальные значения скорости для различных углов наклона поверхности к горизонту приведены в табл. 2. Рассчитанные профили продольной компоненты скорости в центральном сечении пластины достаточно хорошо согласуются с аналитическими оценками в приближении больших времен. Согласованность численных и асимптотических результатов ухудшается с уменьшением угла  $\varphi$ , поскольку точность метода построения стационарных решений падает с приближением  $\varphi$  к нулевому значению.

Оценка асимптотическими методами точного решения нестационарной задачи установления течения, индуцированного диффузией на бесконечной наклонной плоскости [9], согласующаяся с асимптотическими оценками системы (1) в приближении малых времен, выражается через интегралы от функции ошибок следующим образом [8, 15]:

$$v_{\xi} = \frac{N^2}{2} \frac{(4\kappa_S t)^{3/2}}{\nu - \kappa_S} \left[ i^3 \operatorname{erfc}\left(\frac{\zeta}{2\sqrt{\nu t}}\right) - i^3 \operatorname{erfc}\left(\frac{\zeta}{2\sqrt{\kappa_S t}}\right) \right] \sin 2\varphi,$$

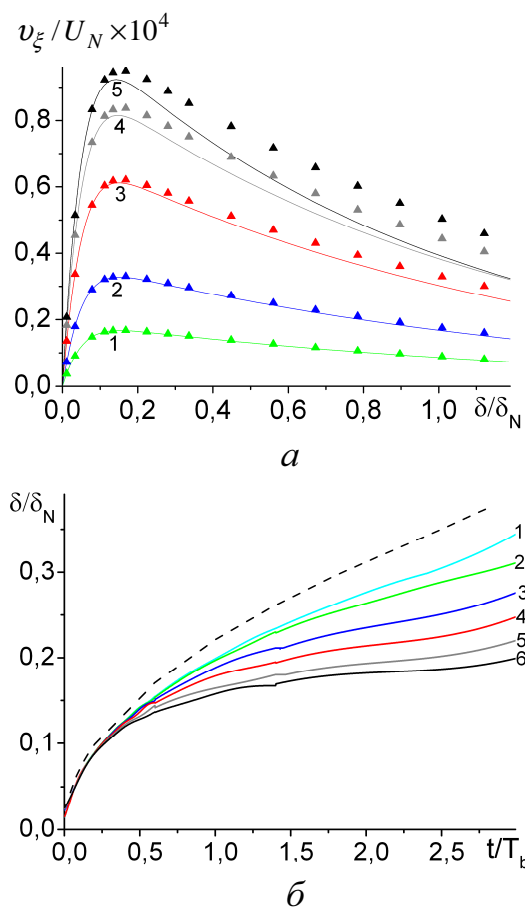
$$S = -2 \frac{\sqrt{\kappa_S t}}{\Lambda} i \operatorname{erfc}\left(\frac{\zeta}{2\sqrt{\kappa_S t}}\right) \cos \varphi.$$

Рассчитанные профили продольной компоненты скорости, приведенные на рис. 4, а для различных углов наклона пластины к горизонту в момент времени  $\tau = 0,75$ , демонстрируют наилучшую согласованность с асимптотическими оценками в приближении малых времен в области нарастающей части прилегающего струйного течения и при малых углах наклона поверхности к горизонту.

На рис. 4, б показана эволюция во времени толщины нарастающей части индуцированного скоростного возмущения в центральном сечении пластины для различных углов ее наклона к горизонту. Асимптотические оценки показывают, что при малых временах толщина струйного течения, так же как и максимальные значения скорости, растет степенным образом во времени и не зависит от угла наклона пластины к горизонту, при этом наибольшее значение скорости наблюдается при  $\varphi = 45^\circ$ . Численное и асимптотическое решения в целом согласуются, однако с увеличением времени расхождение между ними растет. Толщина прилегающего струйного течения начинает уменьшаться с увеличением  $\varphi$ , а угол наклона пластины, которому соответствует максимальное значение скорости индуцированного течения, остается неизменным в асимптотических расчетах и плавно убывает в численном решении.

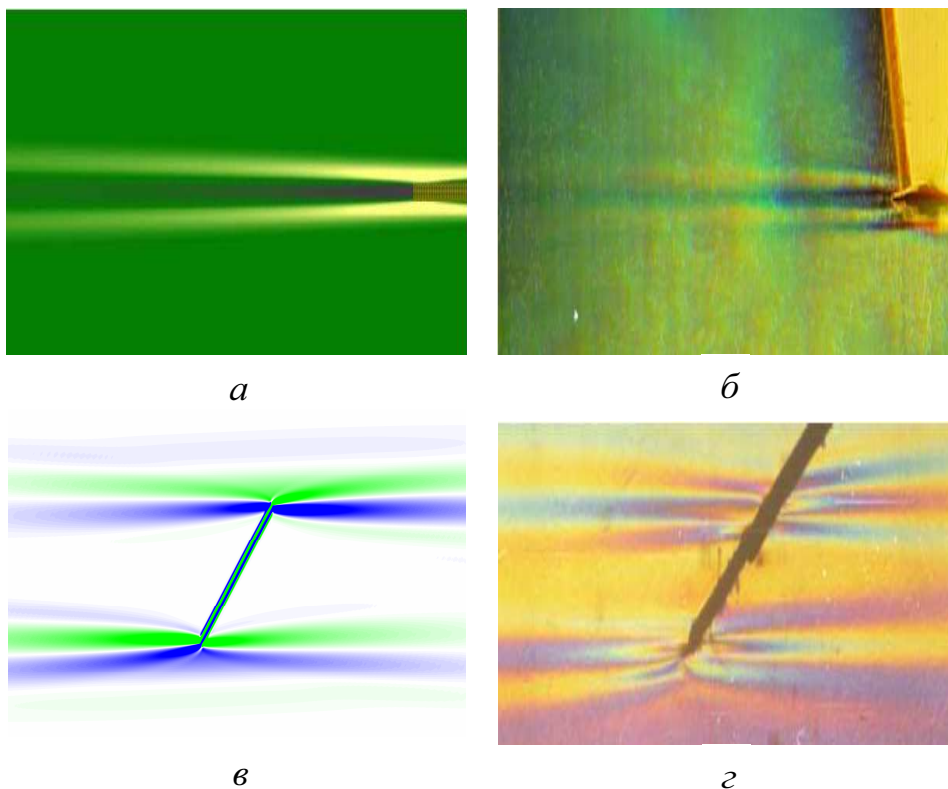
Рассчитанные поля течения, индуцированного диффузией на горизонтальной и наклонной пластинах, при больших временах согласуются с картинами теневой визуализации, полученными в лабораторных опытах. В теневой картине такого течения, полученной методом «вертикальная щель – вертикальный нож Фуко» и «цветным теневым» методом с горизонтальной щелью и решеткой (рис. 5, б, в), так же как и в численном расчете (рис. 5, а, в), отчетливо фиксируются протяженные горизонтальные полосчатые структуры,

примыкающие непосредственно к кромкам пластины. Вертикальный размер возмущенной области определяется параметрами стратификации жидкости и зависит от длины пластины только при отличных от нуля углах ее наклона к горизонту.



**Р и с. 4.** Профили продольной компоненты вектора скорости (*a*) и зависимость от времени толщины нарастающей части струйного течения, примыкающего к поверхности пластины (*б*) ( $L=10$  см,  $N=1,26$  с $^{-1}$ ,  $\tau=0,75$ ), для различных углов наклона к горизонту:  $\varphi=5, 10, 20, 30, 45, 60^\circ$  – кривые 1 – 6 соответственно (фигурные точки на рис. 4, *a* и штриховая линия на рис. 4, *б* – асимптотические оценки в приближении малых времен)

Длина тонкоструктурных особенностей растет с увеличением чувствительности метода регистрации. Так, при использовании более чувствительного «цветного теневого» метода с горизонтальным положением осветительной щели и визуализирующей решетки [16] сложная ячеистая структура течения около кромок наклонной пластины выражена еще более отчетливо. Наблюдаемые и рассчитанные для условий опыта картины возмущений градиента плотности согласуются достаточно хорошо.



**Р и с. 5.** Рассчитанные (*а, в*) и теневые (*б, г*) картины течений, индуцированных диффузией на пластине ( $L = 5$  см,  $T_b = 7,5$  с): *а, б* –  $\varphi = 0^\circ$ , метод «вертикальная щель – вертикальный нож Фуко»; *в, г* –  $\varphi = 40^\circ$ , «цветной теневой» метод с горизонтальной щелью и решеткой

**Выводы.** Численными методами выполнены расчеты ближнего и дальнего полей течений на тонкой наклонной пластине, индуцированных прерыванием молекулярного потока вещества, обусловленного стратификацией.

Погруженное в покоящуюся непрерывно стратифицированную жидкость неподвижное препятствие блокирует фоновый диффузионный перенос и формирует сложную систему структурированных течений, включающую тонкие главные струи вдоль каждой из сторон с примыкающими противотечениями и систему компенсационных циркуляционных ячеек.

Особо сложная структура течений формируется возле кромок пластины, где области поворота главной струи служат источниками диссипативно-гравитационных волн, наиболее контрастно выраженных в полях нормальной компоненты скорости.

Рассчитанные картины полей различных переменных (солености, компонент скорости) существенно отличаются, каждая из них демонстрирует общие свойства структуры течений и содержит индивидуальные особенности, специфические для данного параметра. В частности, толщины главных струй

в полях скорости и плотности различаются в два раза в рассчитанном примере.

Полученная картина течений согласуется с ранее выполненными асимптотическими оценками параметров структурных элементов течений (в частности главной струи) и с данными теневой визуализации.

Эксперименты выполнены на УСУ «ГФК ИПМех РАН» при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (Госконтракт № 16.518.11.7059), Президиума РАН (Программа П-20 «Фундаментальные проблемы океанологии: физика, химия, геология и биология»), РФФИ (проект 10-05-90905-моб\_снг\_ст).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Müller P. The Equations of Oceanic Motions. – Cambridge: CUP, 2006. – 302 p.
2. Прандтль Л. Гидроаэромеханика. – М.: Изд-во иностр. лит., 1949. – 520 с.
3. Oerlemans J., Grisogono B. Glacier winds and parameterization of the related heat fluxes // *Tellus*. – 2002. – 54a. – P. 440 – 452.
4. Thompson L., Johnson G.C. Abyssal currents generated by diffusion and geothermal heating over rises // *Deep-Sea Res.* – 1996. – 43, № 2. – P. 193 – 211.
5. Garrett C., MacCready P., Rhines P. Boundary mixing and arrested Ekman layers: rotating stratified flow near a sloping boundary // *Ann. Rev. Fluid Mech.* – 1993. – 25. – P. 291 – 323.
6. Phillips O.M. On flows induced by diffusion in a stably stratified fluid // *Deep-Sea Res.* – 1970. – 17. – P. 435 – 443.
7. Wunsch C. On oceanic boundary mixing // *Ibid.* – 1970. – 17. – P. 293 – 301.
8. Linden P.F., Weber J.E. The formation of layers in a double-diffusive system with a sloping boundary // *J. Fluid Mech.* – 1977. – 81. – P. 757 – 773.
9. Кистович А.В., Чашечкин Ю.Д. Структура нестационарного пограничного течения на наклонной плоскости в непрерывно стратифицированной среде // *Прикладная математика и механика*. – 1993. – 57, вып. 4. – С. 50 – 56.
10. Allshouse M.R., Barad M.F., Peacock T. Propulsion generated by diffusion-driven flow // *Nat. Phys.* – 2010. – 6. – P. 516 – 519.
11. Кистович А.В., Чашечкин Ю.Д. Индуцированные диффузией нестационарные пограничные течения в клиновидной впадине // *Прикладная математика и механика*. – 1998. – 62, вып. 5. – С. 803 – 809.
12. Чашечкин Ю.Д. Иерархия моделей классической механики неоднородных жидкостей // *Морской гидрофизический журнал*. – 2010. – № 5. – С. 3 – 10.
13. Белоцерковский О.М., Гуцин В.А., Коньшин В.Н. Метод расщепления для исследования течений стратифицированной жидкости со свободной поверхностью // *Журнал вычисл. математики и мат. физики*. – 1987. – 27, № 4. – С. 594 – 609.
14. Кистович А.В., Чашечкин Ю.Д. Образование внутренних волн нулевой частоты при свободной конвекции в стратифицированной жидкости // *Прикладная математика и механика*. – 1990. – 54, № 4. – С. 683 – 687.
15. Байдулов В.Г., Чашечкин Ю.Д. Пограничные течения, индуцированные диффузией около неподвижного горизонтального цилиндра в непрерывно стратифицированной жидкости // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана*. – 1996. – 32, № 6. – С. 818 – 823.

16. Chashechkin Y.D. Schlieren visualization of a stratified flow around a cylinder // J. Visualiz. – 1999. – 1, № 4. – P. 345 – 354.

\* Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН,  
Москва

E-mail: chakin@ipmnet.ru

\*\* Институт гидромеханики НАН Украины,  
Киев

E-mail: zagemennyi@gmail.com

Материал поступил  
в редакцию 15.06.11

**АНОТАЦІЯ** Чисельними методами розв'язано задачу встановлення течії, індукованої дифузією на нерухомій пластині, зануреній у неперервно стратифіковану рідину, яка знаходиться у стані покою. В результаті переривання природного дифузійного потоку стратифікуючої компоненти (солі) на непроникній поверхні в рідині спостерігається дефіцит речовини над пластиною та надлишок під нею, що призводить до формування структурованих циркуляційних рухів, які компенсують виникаючі відхилення. Чисельні результати, отримані для великих відстаней від країв пластини, узгоджуються з асимптотичними оцінками поля течій на нескінченній похилій непроникній площині в наближенні малих і великих значень часу. Досліджені залежності максимальної швидкості та товщини струменевої течії біля пластини від кута її нахилу до лінії горизонту. При великих значеннях часу розраховані картини течії узгоджуються з результатами тіншової візуалізації в лабораторних дослідах, в яких виразно фіксуються протяжні горизонтальні смугасті структури, які відходять від кромок пластини або полюсів нерухомих перешкод.

**Ключові слова:** неперервно стратифікована рідина, дифузія, вплив пластини на дифузію, генерація течій, чисельні розв'язання.

**ABSTRACT** Non-stationary problem of a diffusion-induced flow around a motionless plate submerged in a quiescent continuously stratified fluid is solved by numerical methods. Deficiency and excess of the stratifying salt component above and under the plate, respectively, are observed as a result of breaking of a natural diffusion flux on its impermeable surface that leads to formation of the structured circulation flows compensating the arising deviations. The numerical results obtained for considerable distances from the plate edges are in a good agreement with the asymptotic evaluations of the flows' fields on the infinite sloping impermeable plane in approximation of low and large times. The values of maximum velocity and thickness of the up- and down-slope jet flow along the both sides of the plate are investigated depending on its slope angle to horizon. At large times the calculated flow patterns agree with the schlieren images in laboratory experiments which visualize extensive horizontal streaky structures generated by the plate edges or the poles of motionless obstacles.

**Keywords:** continuously stratified fluid, diffusion, plate's influence on diffusion, flow generation, numerical solutions.