2M

УДК 519.161

А.В. Морозов, А.В. Панишев, В.А. Скачков
Житомирский государственный технологический университет, Украина
morozov.andriy@gmail.com

Модификация метода Литтла для решения кольцевой задачи о сельском почтальоне

В статье приведена формулировка и дан анализ обобщения гамильтоновой задачи о сельском почтальоне. Предлагается точный метод её решения, развивающий классический алгоритм Литтла.

Введение

Далеко не для каждой задачи оптимизации на транспортной сети разработаны алгоритмы поиска решений, пригодные в реальных ситуациях. Одной из таких задач является задача о сельском почтальоне, ограниченная версия которой рассматривается в данной статье. Эту версию можно рассматривать как гамильтонову задачу коммивояжера (ГЗК) с условием, сужающим пространство её решений.

Постановка задачи. Задан связный взвешенный граф $H=(V,U)$ с множеством вершин V, $|V|=n$ и множеством рёбер U. Каждому ребру $\{i,j\}\in U$ приписан вес $d_{ij}\in Z_0^+$, $i\neq j$, $i,j=\overline{1,n}$, Z_0^+ – множество неотрицательных целых чисел. Граф H полностью определяется симметричной матрицей стоимостей $\left[d_{ij}\right]_n$, где $d_{ij}\in Z_0^+$, если $\{i,j\}\in U$ и $d_{ij}=\infty$, иначе $i\neq j$, $i,j=\overline{1,n}$, $d_{ii}=\infty$, $i=\overline{1,n}$. На множестве U задано непустое подмножество рёбер $R\subset U$.

Требуется найти в графе H простой цикл, включающий каждое ребро R и имеющий минимальную сумму весов всех рёбер.

В рассматриваемой задаче в отличие от задачи о сельском почтальоне (ЗСП) искомый цикл должен быть простым. Поставленную задачу назовём кольцевой задачей о сельском почтальоне (КЗСП).

Пусть $y(R)$ – простой цикл графа H, содержащий все рёбра заданного множества R. Тогда КЗСП состоит в нахождении простого цикла $y^*(R)$, доставляющего минимум функционалу

$$C\left(y(R)\right)=\sum_{\{k,\,l\}\in y(R)} d_{kl}\,. \tag{1}$$

Основная идея метода

Ясно, что КЗСП NP-полна, и только её очень ограниченные частные случаи эффективно разрешимы.

Из NP-полноты КЗСП следует, что она не поддается эффективным точным методам решения, а из того, что множество простых циклов графа, включающих все рёбра R, может оказаться пустым, вытекает неприменимость эффективных приближенных алгоритмов минимизации (1). Таким образом, единственной приемлемой схемой поиска решения КЗСП является схема сокращения перебора, организованная по методу ветвей и границ, который остаётся универсальным и мощным инструментом комбинаторной оптимизации.

В представленном здесь методе поиска цикла $y^*(R)$ алгоритму ветвей и границ предшествует стадия эффективной проверки известных достаточных условий неразрешимости КЗСП. К ней относится процедура вершинно-рёберного преобразования (ВРП) исходного графа H в граф со структурными характеристиками, вызывающими выполнение переборного алгоритма [1].

Переборный алгоритм, выполняемый на второй стадии решения КЗСП, представляет собой модификацию классического метода Литтла [2], адаптированного для нахождения цикла $y^*(R)$ связного подграфа $H = (V, U)$ исходного подграфа, в котором: а) степень каждой вершины $i \in V$ больше 2, б) множество R образует паросочетание, в) нет точек сочленения.

В рассматриваемой модификации, как и в алгоритме Литтла для решения симметричной задачи коммивояжера (ЗК), дерево ветвлений развивается из представления матрицы стоимостей $\left[d_{ij}\right]_n$ ориентированным графом $G = (V, E)$, полученным в данном случае из графа H заменой каждого ребра $\{i, j\} \in U$ парой дуг $(i, j) \in E$ и $(j, i) \in E$. Решением КЗСП является простой контур минимальной стоимости. Следовательно, модификация алгоритма применима для нахождения решения КЗСП, сформулированной в терминах ориентированных графов.

В методе решения поставленной задачи корневой вершине X_0 дерева перебора ставится в соответствие матрица стоимостей $D = \left[d_{ij}\right]_n$ исходного графа H, матрица длин кратчайших путей M и матрица маршрутизации W. После их преобразования находятся вершины, порождённые на шаге ветвления. Для определения матриц M и W на каждом шаге ветвления применяется модификация алгоритма Флойда-Уоршелла. В совокупности, матрицы D, M и W позволяют выполнять в условиях поставленной задачи все действия, включенные в классический метод Литтла. В приведенной версии метода выбор очередной вершины ветвления выполняется по схеме, изображенной на рис. 1.

Из матриц M и W, формируемых модифицированным алгоритмом Флойда-Уоршелла для текущих параметров матрицы D, определяется дуга (p, q) или путь из вершины p в вершину q, инициирующие ветвление.

Условия рассматриваемой задачи требуют формирования множества Q запрещенных дуг, т.е. дуг, которые приводят к появлению подконтуров в искомом решении $y^*(R)$.

В множество Q включаются дуги в зависимости от способа разбиения пространства допустимых решений на подмножества.

Если ветвление инициирует дуга (k, l), соответствующая ребру $\{k, l\} \in R$, то множество допустимых решений задачи разбивается на два подмножества. Первое подмножество состоит их всех контуров, включающих дугу (k, l), а второе – из всех контуров, содержащих дугу (l, k).

Пусть ветвление вызывает дуга (k, l), $\{k, l\} \notin R$, или путь из вершины k в вершину l. При формировании множества Q он рассматривается как дуга (k, l). В этом случае множество допустимых решений разбивается на два подмножества. Первое множество включает все контуры, содержащие (k, l), а второе – не содержащие (k, l), т.е. $\overline{(k,l)}$.

Рисунок 1 – Схема ветвления в методе решения КЗСП

При формировании первого подмножества требуется проверка следующих условий. Если множество R содержит ребро $\{x, k\}$, то в искомый контур вместе с дугой (k, l) включается дуга (x, k). Аналогично, если множество R содержит ребро $\{y, l\}$, то к дуге (k, l) присоединяется дуга (l, y). Включение дуги (x, k) или (l, y) в подмножество решений означает, что определяющая его матрица D не содержит не только строку k и столбец l, но и ту строку и столбец, номера которых являются началом и концом присоединенной дуги. В случае $\{x, k\}$, $\{y, l\} \in R$ к дуге (k, l) присоединяются дуги (x, k) и (l, y), а в соответствующей матрице D, определяющей это множество, исключаются строки x, k, l и столбцы k, l, y.

Сформулируем правила определения множества Q:

– для корня X_0 дерева перебора $Q = \varnothing$;

– все элементы множества Q при вершине ветвления передаются её порожденной вершине;

– если в любое решение при вершине, порожденной на шаге ветвления, включается дуга (k, l), то к множеству Q при этой вершине добавляется дуга (l, k);

– вес каждой дуги в Q принимается равным бесконечности.

Если ветвление вызывает путь из вершины k в вершину l, включающий не менее двух дуг, то для разбиения множества допустимых решений на непересекающиеся подмножества используется правило, которое отличается от правила, применяемого для формирования множества Q. В этом случае результатом разбиения является множество вершин $V(L)$, представляющее расширение множества активных вершин, порожденных на предыдущих шагах ветвления.

В корневой вершине и вершине ветвления, для которой процесс разбиения инициирует дуга, $V(L) = \varnothing$. Множество вершин $V(R) \cup V(L)$ определяет рабочую подматрицу матрицы M. Рабочая матрица не содержит строк и столбцов, соответствующих вершинам множества $V \backslash (V(R) \cup V(L))$. В результате приведения рабочей матрицы находится рабочая приведенная матрица M_{RL}.

Пусть ветвление инициирует путь, содержащий несколько дуг. Тогда начальная и конечная вершины пути принадлежат множеству $V(R) \cup V(L)$, а его промежуточные вершины – множеству $V \backslash (V(R) \cup V(L))$. Действительно, начальная вершина соответствует строке рабочей матрицы, конечная вершина – столбцу, а рабочая матрица построена на вершинах множества $V(R) \cup V(L)$. Промежуточная вершина v_{jl}, $l = \overline{2, k-1}$ пути $\left(v_{j1}, v_{j2}, \ldots, v_{jk-1}, v_{jk}\right)$ требует включения соответствующей ей строки и столбца в рабочую матрицу. В дереве перебора вершине v_{jl} соответствует множество решений, содержащих эту вершину. Каждое такое множество можно рассматривать как разбиение на два подмножества, одно из которых содержит дугу $\left(v_{jl}, v_{jl+1}\right)$, а другое не включает её. В дереве перебора путь $\left(v_{j1}, v_{j2}, \ldots, v_{jk}\right)$ порождает k висячих вершин $X_{j_1 1}, X_{j_2 2}, \ldots, X_{j_{k-1} k-1}, X_{j_k}$, исходящих из вершины X_{j_1}. При вершинах $X_{j_1 1}$ и X_{j_k} расширение совпадает с расширением $V(L)$ для X_{j_1}, а при вершине $X_{j_l l}$, $l = \overline{2, k-1}$ – оно равно $V(L) \cup \left\{v_{jl}\right\}$.

Матрицы D при висячих вершинах формируются из матрицы D при вершине ветвления X_{j_1} следующим образом:

1. В матрице D для вершины $X_{j_i i}$, $i = \overline{i, k-1}$ элемент $\left(j_i, j_{i+1}\right)$ принимается равным ∞.

2. Чтобы получить матрицу D для вершины X_{j_k}, из матрицы для X_{j_1} исключаются те строки и столбцы, по которым строится путь $\left(v_{j1}, v_{j2}, \ldots, v_{jk}\right)$.

3. Матрица D при вершине $X_{j_l l}$, $l = \overline{2, k-1}$ содержит строку, соответствующую вершине v_{jl}, и не содержит строк и столбцов, определяющих путь $\left(v_{j1}, v_{j2}, \ldots, v_{jl}\right)$.

Множество $V(L)$ формируется согласно следующему правилу:

– в корневой вершине $V(L) = \varnothing$;

– все элементы множества $V(L)$ передаются вершине, порожденной вершиной ветвления;

– если ветвление вызывает путь (s, …, p, …, t), включающий k промежуточных вершин, то соответствующее ему множество решений с расширением $V(L)$ разбивается на последовательность из k + 2 подмножеств (S, …, P, …, T) с расширением $V(L) \cup \{p\}$ для подмножества P, $p \neq s$, t; в любом решении подмножества P содержится часть пути (s, …, p, …, t) из вершины s в вершину p; каждое решение подмножества T включает путь (s, …, p, …, t); все решения подмножества S не включают этого пути.

Модификация алгоритма Флойда-Уоршелла

Платформой, на которую опираются полученные правила ветвления, служит модификация известного алгоритма Флойда-Уоршелла, определяющего в ориентированном графе кратчайшие пути между всеми парами вершин [3]. Модификация формирует матрицы M и W в каждой точке ветвления в результате выполнения следующих действий.

Вход. D – матрица стоимостей d_{ij} подграфа $G(Q)$ ориентированного графа G = = (V, E), $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$; $G(Q) = G$ в корневой вершине дерева перебора;

R – множество рёбер, образующих паросочетание исходного графа H;

Q – множество запрещённых дуг в вершине ветвления, $Q = \varnothing$ в случае $G(Q) = G$;

$V(R)$ – множество вершин, инцидентных рёбрам паросочетания R;

$V(L)$ – расширение множества вершин в точке ветвления; $V(L) = \varnothing$ в корне дерева перебора;

I_{row}, I_{col} – множество индексов соответственно строк и столбцов матрицы D порядка $|I_{row}| = |I_{col}|$, n – порядок матрицы D в корневой вершине;

Выход. M – матрица длин m_{ij} кратчайших путей $(i, k, \dots, l, j)$, $i, j \in V(R)$, $k, l \notin V(R)$, $\{i, j\} \notin R$;

W – матрица кратчайших путей w_{ij}, соответствующая M.

Подготовительный этап:

1^0. **for all** $i \in I_{row}$ **do**

2^0. **for all** $j \in I_{col}$ **do**

3^0. **begin**

4^0. $$w_{ij} = \begin{cases} \infty, \text{ если } i = j \text{ или } m_{ij} = \infty, \\ j, \text{ если } i \neq j \text{ и } m_{ij} < \infty. \end{cases}$$

5^0. $m_{ij} = d_{ij}$

6^0. **end**

Этап нахождения элементов матриц M и W:

1. **for all** $k \in I_{col}$ **do**
2. **if** $k \notin V(R) \cup V(L)$ **then**
3. **for all** $i \in I_{row}$ **do**
4. **for all** $j \in I_{col}$ **do**
5. **if** $i \neq j$ **and** $i \neq k$ **and** $j \neq k$ **then begin**
6. **if** $\{i, j\} \in R$ **then continue**
7. **if** $(i, j) \in Q$ **then continue**
8. **if** $m_{ij} > m_{ik} + m_{kj}$ **then**
9. **begin**
10. $m_{ij} = m_{ik} + m_{kj}$
11. $w_{ij} = k$
12. **end**
13. **end**

На каждом шаге ветвления множеству Q запрещенных дуг ставится в соответствие подграф $G(Q)$ ориентированного графа $G = (V, E)$ и его матрица стоимостей D.

В строке 2 алгоритма содержится условие, исключающее возможность прохождения путей через вершины множества $V(R) \cup V(L)$, для которого формируется рабочая матрица M_{RL}. Так как в корне дерева перебора $V(L)=\varnothing$, то в этом случае M_{RL} является квадратной матрицей порядка $|V(R)|$.

Строка 6 для каждого ребра $\{i, j\} \in R$ запрещает построение кратчайшего пути между вершинами i и j и сохраняет веса дуг (i, j) и (j, i) в матрице D.

Дуги множества Q, запрещенные в процессе ветвления для устранения недопустимых контуров, должны быть запрещены и при формировании матриц M и W.

Как и алгоритм Флойда-Уоршелла, предложенная модификация имеет временную сложность, оцениваемую полиномом третьей степени от размерности входной матрицы D.

Нижние границы стоимости кольцевых маршрутов

Нижняя оценка стоимости любого решения в данной точке ветвления определяется из подматрицы M_{RL} рабочей матрицы M. В матрицу M, полученную из матрицы D модифицированным алгоритмом Флойда-Уоршелла, включены все строки с индексами множества I_{row} и все столбцы с индексами множества I_{col}, $| I_{row} | = | I_{col} |$, I_{row}, $I_{col} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$. Матрица M_{RL} состоит из тех элементов, которые принадлежат строкам $I_{row} \cap (V(R) \cup V(L))$ и столбцам $I_{col} \cap (V(R) \cup V(L))$.

Для нахождения нижней оценки выполняется приведение матрицы M_{RL}, включающее такие действия:

1) найти в каждой строке минимальный элемент g_i и вычесть его из каждого элемента этой строки;

2) исключить из рассмотрения все строки, соответствующие вершинам множества $V(L)$, в каждом столбце полученной подматрицы найти минимальный элемент h_j и вычесть его из каждого элемента этого столбца;

3) в полученной матрице найти те элементы (i, j) и (j, i), $\{i, j\} \in R$, для которых $Д_{ij} = \min\left\{m'_{ij}, m'_{ji}\right\}$, и положить

$$m'_{ij} = m'_{ij} - Д_{ij}, \text{ если } m'_{ij} \neq \infty,\ m'_{ji} = m'_{ji} - Д_{ij}, \text{ если } m'_{ji} \neq \infty .$$

Пусть E_t – совокупность всех дуг любого решения из подмножества решений, представленного точкой ветвления t. Оценка снизу в точке t определяется по формуле:

$$\varphi_t = \sum_{i \in I_{row} \cap \left(V(R) \cup V(L)\right)} g_i + \sum_{j \in I_{col} \cap V(R)} h_j + \sum_{\substack{\{i,j\} \in R \\ (i,j) \notin E_t \\ (j,i) \notin E_t}} \Delta_{ij} + \sum_{(i,j) \in E_t} d_{ij} . \qquad (2)$$

Первые два слагаемых в формуле (2) позволяют оценить стоимость маршрутов так, как и в методе Литтла. Третье слагаемое увеличивает нижнюю границу, исходя из того, что искомое решение должно содержать какую-либо одну из дуг (i, j) или (j, i), $\{i, j\} \in R$, не включенную в E_t.

Если подмножество решений, определяемое точкой ветвления t, пусто, то оценка φ_t равна ∞. В этом случае хотя бы один из элементов g_i или h_j также равен ∞.

Метод поиска оптимального решения задачи

Алгоритм поиска $y^*(R)$ строит оптимальное решение КЗСП на непустом множестве её допустимых решений или устанавливает, что для данного графа H не существует простых циклов, проходящих по всем рёбрам множества R, $|R|>1$. При $|R| = 1$ КЗСП упрощается до задачи нахождения в графе H кратчайшей цепи $(p, \ldots, q)$, соединяющей вершины $\{p, q\} \in R$. Искомым решением задачи является цикл $(p, \ldots, q, p)$ стоимостью $L_{pq} + d_{pq}$, где L_{pq} – длина кратчайшей цепи $(p, \ldots, q)$. Известно, что её можно построить за время $O(n^2)$ [3].

При изложении алгоритма поиска $y^*(R)$ предполагается, что удаление строки (столбца) в исходной или сформированной матрице состоит в присвоении ∞ каждому элементу этой строки (столбца).

S0. $\left[d_{ij}\right]_n$ – матрица стоимостей орграфа $G = (V, E)$, $|V| = n$, $n \geq 4$, построенного из связного графа $H = (V, U)$, $|E| = 2|U|$; если $\{i, j\} \in U$, то (i, j), $(j, i) \in E$; граф H не содержит мостов и точек сочленения, и степени всех его вершин больше 2; $d_{ij} \in Z_0^+$, если $(i, j) \in E$, иначе $d_{ij} = \infty$, Z_0^+ – множество целых неотрицательных чисел;

R – непустое множество зафиксированных рёбер, образующих в H паросочетание, $|R| > 1$;

$V(R)$ – множество вершин, инцидентных рёбрам R;

Q – множество дуг, запрещающих образование циклов, которые не являются допустимыми решениями $y(R)$, $Q = \varnothing$;

$V(L)$ – расширение множества вершин $V(R)$, $V(L) = \varnothing$;

положить $D = \left[d_{ij}\right]_n$; в дереве перебора матрице D соответствует корневая вершина;

положить $Rec = \infty$;

S1. Для матрицы D выполнить модифицированный алгоритм Флойда-Уоршелла и получить в результате матрицу длин кратчайших путей M и матрицу маршрутизации W.

S2. Из матрицы M выделить рабочую подматрицу и преобразовать её в приведенную рабочую матрицу M_{RL}, которая включает элементы матрицы M, принадлежащие строкам с индексами вершин из множества $I_{row} \cap (V(R) \cup V(L))$ и столбцами с индексами вершин из множества $I_{col} \cap V(R)$; I_{row}, I_{col} – множества индексов соответственно строк и столбцов матрицы M.

S3. В приведенной рабочей матрице M_{RL} для всех элементов $m'_{pq} = 0$, $p, q \in$ $\in V(R) \cup V(L)$ найти оценку

$$\gamma(p, q) = \min_{i \neq q} m'_{pi} + \min_{j \neq p} m'_{jq}, \; i, j \in V(R) \cup V(L), \tag{3}$$

и определить максимальную из них

$$\Gamma(p, q) = \max\left\{\gamma(p, q) \;\middle|\; m'_{pq} = 0\right\};$$

по матрице маршрутизации W установить кратчайший путь (k, l) из вершины k в вершину l.

S4. Если $\{k, l\} \in R$, то множество решений разбивается на два подмножества: первое подмножество включает маршруты, проходящие по дуге (k, l), а второе – маршруты, проходящие по дуге (l, k); в дереве ветвления разбиение порождает две висячие вершины;

получить из матрицы D две матрицы D' и D'': первую исключением строки k и столбца l, а вторую – исключением строки l и столбца k;

положить $D = D'$ и $D = D''$ соответственно для первого и второго подмножества разбиения;

применить для каждого подмножества разбиения правила формирования запрещенных дуг Q;

в матрице D при каждом подмножестве положить равными ∞ все элементы, соответствующие запрещённым в нём дугам;

выполнить шаги S1 и S2 для полученных матриц;

в подмножествах разбиения оценить стоимости решений по формуле (2);

для обоих подмножеств выполнить проверку: если размерность матрицы M_{RL} меньше 3 и оценка меньше *Rec*, то обновить значение *Rec* и запомнить соответствующее решение как претендент на оптимальное, в противном случае, добавить висячую вершину к дереву ветвлений;

перейти к шагу S7.

S5. Если $(k, l) \in E$, $\{k, l\} \notin R$, то множество решений включает подмножество маршрутов, содержащих дугу (k, l), и подмножество, в которых её нет;

определить для первого подмножества матрицу D' следующим образом: если существует ребро $\{x, k\} \in R$, а в матрице D при вершине ветвления элемент (x, k) не равен ∞, то получить путь (x, k, l) и удалить из D строку x, столбец l, строку и столбец k; если существует ребро $\{l, y\} \in R$ и в матрице D элемент (l, y) не равен ∞, то получить путь (k, l, y) и удалить из D строку k, столбец y, строку l и столбец l, если он не был удален ранее; удалить из D строку k и столбец l, если $\{x, k\}$, $\{l, y\} \notin R$;

определить для второго подмножества матрицу D'', положив в матрице D элемент (k, l) равным ∞;

применить для первого подмножества правило формирования запрещенных дуг, в матрице D' положить равным ∞ элементы, соответствующие запрещенным дугам Q;

положить $D = D'$ и выполнить шаги S1 и S2;

по формуле (2) определить нижнюю границу стоимости решений, входящих в первое подмножество;

если размерность матрицы M_{RL} первого подмножества меньше 3 и его оценка меньше *Rec*, то обновить значение *Rec* и запомнить соответствующее решение как претендент на оптимальное, в противном случае, добавить висячую вершину к дереву перебора;

применить для второго подмножества правило формирования запрещенных дуг; в матрице D'' запретить значения элементов, соответствующих запрещенным дугам на ∞;

положить $D = D''$ и выполнить шаги S1 и S2;

по формуле (2) найти нижнюю оценку стоимости решений второго подмножества;

если оценка меньше *Rec*, то присоединить висячую вершину к дереву перебора;

перейти к шагу S7 ;

S6. $(k, l) = (k, v_1, v_2, \ldots, v_{s-1}, v_s, \ldots, v_{r-1}, v_r, l)$ – кратчайший путь из вершины k в вершину l;

построить путь $\left(\alpha, \left(k, v_1, \ldots, v_s, \ldots, v_r, l\right), \beta\right)$, где

$$\alpha = \begin{cases} (x, k), \text{если} \{x, k\} \in R \text{ и } d_{xk} \neq \infty, \\ \varnothing, \text{иначе}, \end{cases} \qquad \beta = \begin{cases} (l, y), \text{если} \{l, y\} \in R \text{ и } d_{ly} \neq \infty, \\ \varnothing, \text{иначе}; \end{cases}$$

множество решений является разбиением на $r + 2$ подмножеств, в котором первое подмножество содержит маршруты, не включающие дуги (k, v_1) пути $\left(\alpha, \left(k, v_1, \ldots, v_s, \ldots, v_r, l\right), \beta\right)$; каждый маршрут s-го подмножества проходит по пути $\big(\alpha,$ $\left(k, v_1, \ldots, v_{s-1}\right)\big)$ и не проходит по дуге (v_{s-1}, v_s), в $(r+2)$-е подмножество входят маршруты, включающие путь $\left(\alpha, \left(k, v_1, \ldots, v_s, \ldots, v_r, l\right), \beta\right)$; в дереве перебора добавляется $r + 2$ висячих вершин;

применить для каждого подмножества разбиения правило формирования запрещенных дуг Q;

применить правило формирования множества $V(L)$ и получить в результате для каждого s-го подмножества расширение $V(L)\cup\{v_{s-1}\}$, $s=\overline{2,r+1}$, где $V(L)$ – расширение в первом, и $(r+2)$-м подмножестве разбиения;

для каждого полученного подмножества найти матрицы D_1, D_{r+2}, D_s, $s=\overline{2,r+1}$, $l=r+1$; 1) чтобы получить матрицу D_1, элемент (k,v_1) матрицы D при вершине ветвления полагается равным ∞; 2) матрица D_{r+2} определяется удалением из D строк и столбцов, соответствующих промежуточным вершинам пути $\left(\alpha,\left(k,v_1,...,v_s,...,v_r,l\right),\beta\right)$; 3) матрица D_s, $s=\overline{2,r+1}$, $l=r+1$ находится так: а) в матрице D элемент (v_{s-1}, v_s) принимается равным ∞, б) из D удаляются строки и столбцы, соответствующие промежуточным вершинам пути $\left(\alpha,\left(k,v_1,...,v_{s-1}\right)\right)$;

для всех полученных подмножеств выполнить проверку: если размерность матрицы M_{RL} меньше 3 и оценка меньше *Rec*, то обновить значение *Rec* и запомнить соответствующее решение как претендент на оптимальное, иначе присоединить висячую вершину к дереву ветвлений;

перейти к шагу S7;

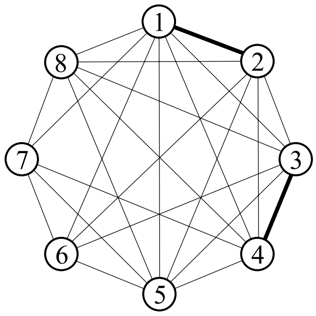
S7. Если была обновлена граница *Rec*, то просмотреть все висячие вершины дерева ветвлений и удалить те из них, оценка которых больше или равна *Rec*;

если дерево ветвлений не содержит висячих вершин, то процесс решения завершен, переход к шагу S8, иначе выбрать висячую вершину, имеющую наименьшую оценку и перейти к шагу S3;

S8. Если *Rec* равно ∞, то множество решений исходной задачи пусто, иначе оптимальным решением задачи является решение со стоимостью *Rec*.

Пример

Для связного графа $H=(V,U)$ и матрицы весов его рёбер $\left[d_{ij}\right]_n$, представленных на рис. 2, требуется построить простой цикл $у^*(R)$ минимальной стоимости, проходящий по рёбрам множества R={{1,2},{3,4}}, или установить, что множество маршрутов $у(R)$ пусто.



$$\left[d_{ij}\right]_8 = \begin{array}{c|cccccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 1 & \infty & 9 & 7 & 7 & 4 & 6 & 3 & 3 \\ 2 & 9 & \infty & 7 & 7 & 5 & 3 & \infty & 7 \\ 3 & 7 & 7 & \infty & 3 & 2 & 5 & \infty & 5 \\ 4 & 7 & 7 & 3 & \infty & 9 & \infty & 9 & 7 \\ 5 & 4 & 5 & 2 & 9 & \infty & 9 & 2 & 9 \\ 6 & 6 & 3 & 5 & \infty & 9 & \infty & 2 & \infty \\ 7 & 3 & \infty & \infty & 9 & 2 & 2 & \infty & 8 \\ 8 & 3 & 7 & 5 & 7 & 9 & \infty & 8 & \infty \\ \hline \end{array}$$

Рисунок 2 – Граф *H* КЗСП и матрица его стоимостей

Граф *H* не содержит точек сочленения, мостов и вершин, степени которых меньше 3. Имеем $V(R)$={1,2,3,4}, $Q=\varnothing$, $\mathrm{V(L)}=\varnothing$. В корне дерева перебора X_0 полагаем $D=\left[d_{ij}\right]_8$, $Rec=\infty$.

Для матрицы D модифицированный алгоритм Флойда-Уоршелла находит матрицу кратчайших путей M и матрицу маршрутизации W:

$M =$

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	∞	9	6	7	4	5	3	3
2	9	∞	7	7	5	3	5	7
3	6	7	∞	3	2	5	4	5
4	7	7	3	∞	9	11	9	7
5	4	5	2	9	∞	4	2	9
6	5	3	5	11	4	∞	2	10
7	3	5	4	9	2	2	∞	8
8	3	7	5	7	9	10	8	∞

, $W=$

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	∞	(1,2)	(1,5,3)	(1,4)	(1,5)	(1,7,6)	(1,7)	(1,8)
2	(2,1)	∞	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)	(2,6,7)	(2,8)
3	(3,5,1)	(3,2)	∞	(3,4)	(3,5)	(3,6)	(3,5,7)	(3,8)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	∞	(4,5)	(4,7,6)	(4,7)	(4,8)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	∞	(5,7,6)	(5,7)	(5,8)
6	(6,7,1)	(6,2)	(6,3)	(6,7,4)	(6,7,5)	∞	(6,7)	(6,7,8)
7	(7,1)	(7,6,2)	(7,5,3)	(7,4)	(7,5)	(7,6)	∞	(7,8)
8	(8,1)	(8,2)	(8,3)	(8,4)	(8,5)	(8,7,6)	(8,7)	∞

Из матрицы M удалим строки и столбцы, соответствующие вершинам множества $V\backslash(V(R)\cup V(L))$. В результате получим рабочую подматрицу $\left[m_{rs}\right]_4$, которая после приведения по строкам и столбцам преобразуется в приведенную рабочую матрицу $M_{RL}=\left[m'_{rs}\right]_4$:

$\left[m_{rs}\right]_4 =$

	1	2	3	4
1	∞	9	6	7
2	9	∞	7	7
3	6	7	∞	3
4	7	7	3	∞

, $M_{RL} =$

	1	2	3	4
1	∞	0	0	1
2	0	∞	0	0
3	1	1	∞	0
4	2	1	0	∞

.

По формуле (2) вычислим оценку φ_{X_0}. Сумма первых двух слагаемых равна 24, третье слагаемое представлено суммой $Д_{12}=\min\left\{m'_{12},m'_{21}\right\}=0$ и $Д_{34}=\min\left\{m'_{34},\ m'_{43}\right\}=0$, а четвёртое равно 0, поскольку $E_t=\varnothing$. Следовательно $\varphi_{X_0}=25$.

В приведенной рабочей матрице M_{RL} по формуле (3) находим для каждого элемента $m'_{pq}=0$ величину $\gamma\left(p,q\right)$. В результате получим γ(1,2)=1, γ(1,3)=0, γ(2,1)=1, γ(2,3)=0, γ(2,4)=0, γ(3,4)=1, γ(4,3)=1. Определим оценку $\Gamma(k,l)=\max\left\{\gamma\left(p,q\right)\mid m'_{pq}=0\right\}=1$ и соответствующую ей дугу (1,2) орграфа $G=\left(V,E\right)$, $\{1,2\}\in R$.

Так как дуге (1,2) соответствует в графе H ребро из R, то выполняются действия шага S4. Множество решений задачи разбивается на подмножество маршрутов, включающих дугу (1,2), и подмножество маршрутов, проходящих по дуге (2,1). В дереве перебора разбиение означает появление двух висячих вершин X_1, X_2 и двух матриц

$D' =$

	1	3	4	5	6	7	8
2	∞	7	7	5	3	∞	7
3	7	∞	3	2	5	∞	5
4	7	3	∞	9	∞	9	7
5	4	2	9	∞	9	2	9
6	6	5	∞	9	∞	2	∞
7	3	∞	9	2	2	∞	8
8	3	5	7	9	∞	8	∞

, $D'' =$

	2	3	4	5	6	7	8
1	∞	7	7	4	6	3	3
3	7	∞	3	2	5	∞	5
4	7	3	∞	9	∞	9	7
5	5	2	9	∞	9	2	9
6	3	5	∞	9	∞	2	∞
7	∞	∞	9	2	2	∞	8
8	7	5	7	9	∞	8	∞

.

Для матрицы D' при вершине X_1 X_1 Q = {(2,1)}, поэтому элемент (2,1) принимает значение ∞; $V(R)$=$\{1,2,3,4\}$, $V(L)$=$\varnothing$.

Модифицированный алгоритм Флойда-Уоршелла, входом которого является матрица $D=D'$, строит матрицы M и W

$M =$

	1	3	4	5	6	7	8
2	∞	7	7	5	3	5	7
3	6	∞	3	2	5	4	5
4	7	3	∞	9	11	9	7
5	4	2	9	∞	4	2	9
6	5	5	11	4	∞	2	10
7	3	4	9	2	2	∞	8
8	3	5	7	9	10	8	∞

, $W =$

	1	3	4	5	6	7	8
2	∞	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)	(2,6,7)	(2,8)
3	(3,5,1)	∞	(3,4)	(3,5)	(3,6)	(3,5,7)	(3,8)
4	(4,1)	(4,3)	∞	(4,5)	(4,7,6)	(4,7)	(4,8)
5	(5,1)	(5,3)	(5,4)	∞	(5,7,6)	(5,7)	(5,8)
6	(6,7,1)	(6,3)	(6,7,4)	(6,7,5)	∞	(6,7)	(6,7,8)
7	(7,1)	(7,5,3)	(7,4)	(7,5)	(7,6)	∞	(7,8)
8	(8,1)	(8,3)	(8,4)	(8,5)	(8,7,6)	(8,7)	∞

.

В матрице M при вершине X_1 I_{row}={2,3,4,5,6,7,8}, I_{col}={1,3,4,5,6,7,8}. Рабочая подматрица матрицы M состоит из элементов строк с индексами вершин множества $I_{row} \cap (V(R) \cup V(L))$={2,3,4} и столбцов с индексами вершин множества $I_{col} \cap V(R)$={1,3,4}. После её приведения по строкам и столбцам получим матрицу

M_{RL}=

	1	3	4
2	∞	0	0
3	0	∞	0
4	1	0	∞

, $[m_{rs}]_3$ =

	1	3	4
2	∞	7	7
3	6	∞	3
4	7	3	∞

.

Найдём оценку φ_{X_1}, вычисляемую по формуле (2). Сумма первых двух слагаемых в φ_{X_1} равна 16, третье слагаемое $\Delta_{34} = min\{m'_{34}, m'_{43}\}$ даёт 0, а четвёртое – вес $d_{12} = 9$ для дуги (1,2). Следовательно $\varphi_{X_1} = 25$.

По матрице D'' при вершине X_2, для которой Q={(1,2)}, $V(R)$={1,2,3,4}, $V(L)=\varnothing$, находим матрицы

$M =$

	2	3	4	5	6	7	8
1	∞	6	7	4	5	3	3
3	7	∞	3	2	5	4	5
4	7	3	∞	9	11	9	7
5	5	2	9	∞	4	2	9
6	3	5	11	4	∞	2	10
7	5	4	9	2	2	∞	8
8	7	5	7	9	10	8	∞

, $W =$

	2	3	4	5	6	7	8
1	∞	(1,5,3)	(1,4)	(1,5)	(1,7,6)	(1,7)	(1,8)
3	(3,2)	∞	(3,4)	(3,5)	(3,6)	(3,5,7)	(3,8)
4	(4,2)	(4,3)	∞	(4,5)	(4,7,6)	(4,7)	(4,8)
5	(5,2)	(5,3)	(5,4)	∞	(5,7,6)	(5,7)	(5,8)
6	(6,2)	(6,3)	(6,7,4)	(6,7,5)	∞	(6,7)	(6,7,8)
7	(7,6,2)	(7,5,3)	(7,4)	(7,5)	(7,6)	∞	(7,8)
8	(8,2)	(8,3)	(8,4)	(8,5)	(8,7,6)	(8,7)	∞

.

Поскольку $I_{row} \cap (V(R) \cup V(L))$={1,3,4}, $I_{col} \cap V(R)$={2,3,4}, то

$[m_{rs}]_3$ =

	2	3	4
1	∞	6	7
3	7	∞	3
4	7	3	∞

, M_{RL}=

	2	3	4
1	∞	0	1
3	0	∞	0
4	0	0	∞

, $\varphi_{X_2} = 12 + 4 + 0 + d_{12} = 16 + 9 = 25$.

Выберем вершину X_1 точкой ветвления. В соответствующей ей матрице M_{RL} оценки γ(2,3)=0, γ(2,4)=0, γ(3,1)=1, γ(3,4)=0, γ(4,3)=1, Γ(3,1)=1. Ветвление инициирует элемент (3,1), который в матрице маршрутизации W представляет путь (3,5,1). Поэтому выполняются действия шага S6.

Так как $\{3,4\} \in R$, $d_{43} \neq \infty$, то α =(4,3), но $\beta = \varnothing$, поскольку ребро $\{1,2\} \in R$ имеет в матрице D' вес $d_{12}=\infty$. Получен путь (4,3,5,1), который вызывает разбиение множества решений, представленного вершиной X_1 на три подмножества X_3, X_4, X_5. Каждый маршрут в X_3 не проходит по дуге (3,5), в X_4 содержатся все маршруты, включающие дуги (4,3),(3,5), а в X_5 включены маршруты, проходящие по дугам (4,3),(3,5),(5,1). В дерево перебора добавляются три вершины, исходящие из точки ветвления X_1 (рис. 3).

Для множества маршрутов X_3, не включающих дугу (3,5) Q={(2,1)}, $V(R)$ = = {1,2,3,4}, $V(L)=\varnothing$, $d_{35}=\infty$, $d_{21}=\infty$,

$D=$

	1	3	4	5	6	7	8
2	∞	7	7	5	3	∞	7
3	7	∞	3	∞	5	∞	5
4	7	3	∞	9	∞	9	7
5	4	2	9	∞	9	2	9
6	6	5	∞	9	∞	2	∞
7	3	∞	9	2	2	∞	8
8	3	5	7	9	∞	8	∞

, $M=$

	1	3	4	5	6	7	8
2	∞	7	7	5	3	5	7
3	7	∞	3	9	5	7	5
4	7	3	∞	9	11	9	7
5	4	2	9	∞	4	2	9
6	5	5	11	4	∞	2	10
7	3	4	9	2	2	∞	8
8	3	5	7	9	10	8	∞

,

$W=$

	1	3	4	5	6	7	8
2	∞	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)	(2,6,7)	(2,8)
3	(3,1)	∞	(3,4)	(3,6,7,5)	(3,6)	(3,6,7)	(3,8)
4	(4,1)	(4,3)	∞	(4,5)	(4,7,6)	(4,7)	(4,8)
5	(5,1)	(5,3)	(5,4)	∞	(5,7,6)	(5,7)	(5,8)
6	(6,7,1)	(6,3)	(6,7,4)	(6,7,5)	∞	(6,7)	(6,7,8)
7	(7,1)	(7,5,3)	(7,4)	(7,5)	(7,6)	∞	(7,8)
8	(8,1)	(8,3)	(8,4)	(8,5)	(8,7,6)	(8,7)	∞

, $M_{RL}=$

	1	3	4
2	∞	0	0
3	0	∞	0
4	0	0	∞

, $\varphi_{X_3} = 26$.

Множество маршрутов X_4, проходящих по дугам (4,3),(3,5) и не включающих дугу (5,1), формирует Q={(2,1),(5,4)}, $V(R)$={1,2,3,4}, $V(L)$={5}, $d_{21}=\infty$, $d_{54}=\infty$, $d_{51}=\infty$,

$D=$

	1	4	6	7	8
2	∞	7	3	∞	7
5	∞	∞	9	2	9
6	6	∞	∞	2	∞
7	3	9	2	∞	8
8	3	7	∞	8	∞

, $M=$

	1	4	6	7	8
2	∞	7	3	5	7
5	5	∞	4	2	9
6	5	11	∞	2	10
7	3	9	2	∞	8
8	3	7	10	8	∞

, $W=$

	1	4	6	7	8
2	∞	(2,4)	(2,6)	(2,6,7)	(2,8)
5	(5,7,1)	(5,4)	(5,7,6)	(5,7)	(5,8)
6	(6,7,1)	(6,7,4)	∞	(6,7)	(6,7,8)
7	(7,1)	(7,4)	(7,6)	∞	(7,8)
8	(8,1)	(8,4)	(8,7,6)	(8,7)	∞

, $[m_{rs}]_2 =$

	1	4
2	∞	7
5	5	∞

.

После приведения матрицы $[m_{rs}]_2$ получим матрицу

$M_{RL}=$

	1	4
2	∞	0
5	0	∞

и оценку $\varphi_{X_4} = 7 + 5 + d_{12} + d_{43} + d_{35} = 26$.

Для множества маршрутов X_5, проходящих по дугам (4,3),(3,5),(5,1), Q={(2,1)}, $V(R)$={1,2,3,4}, $V(L)=\varnothing$, $d_{24}=\infty$,

$D=$

	4	6	7	8
2	7	3	∞	7
6	∞	∞	2	∞
7	9	2	∞	8
8	7	∞	8	∞

, $M=$

	4	6	7	8
2	7	3	5	7
6	5	∞	2	10
7	9	2	∞	8
8	7	10	8	∞

, $W=$

	4	6	7	8
2	(2,4)	(2,6)	(2,6,7)	(2,8)
6	(6,7,4)	∞	(6,7)	(6,7,8)
7	(7,4)	(7,6)	∞	(7,8)
8	(8,4)	(8,7,6)	(8,7)	∞

, $M_{RL}=$

	4
2	0

.

Рабочая подматрица M_{RL} состоит из одного элемента (2,4), отсюда следует, что получено допустимое решение задачи. В матрице W элемент (2,4) представлен дугой (2,4) стоимостью $d_{24} = 7$. Стоимость решения, содержащего дуги (1,2), (2,4), (4,3), (3,5), (5,1), равна нижней границе $\varphi_{X_5} = d_{12} + d_{43} + d_{35} + d_{51} + d_{24} = 9 + 3 + 2 + 4 + 7 = 25$. Поскольку значение $Rec > \varphi_{X_5}$, то $Rec = \varphi_{X_5} = 25$. Оценка φ_{X_5} является наименьшей из всех оценок висячих вершин дерева перебора. Следовательно $y^*(R)$= = (1,2,4,3,5,1), $C(y^*(R))$=25.

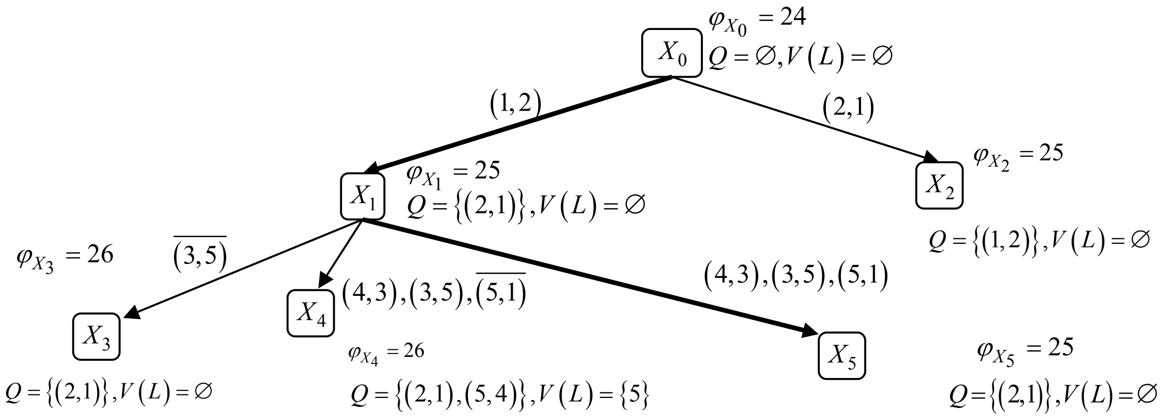


Рисунок 3 – Дерево перебора, построенное для данных примера

Выводы

В статье сформулирована ограниченная версия известной задачи о сельском почтальоне – кольцевая задача о сельском почтальоне. Предложен метод её решения, развивающий классический алгоритм ветвей и границ для решения задачи коммивояжера (алгоритм Литтла). Разработанный метод также может быть применён для решения гамильтоновой задачи о сельском почтальоне и гамильтоновой задачи коммивояжера.

Литература

1. Морозов А.В. Вершинно-рёберное преобразование в гамильтоновой задаче о сельском почтальоне / А.В. Морозов, А.В. Панишев // Искусственный интеллект. – 2009. – № 3. – С. 138-143.
2. Яблонский А.А. Минимизация кольцевых маршрутов доставки продукции потребителям / А.А. Яблонский // Экономика и математические методы. – 2006. – Том 43, № 3. – С. 124-131.
3. Кормен Т. Алгоритмы: построение и анализ / Т. Кормен, Ч. Лейзерсон, Р. Ривест. – М. : МЦНМО, 2001. – 960 с.

А.В. Морозов, А.В. Панишев, В.О. Скачков

Модифікація методу Літтла для розв'язання кільцевої задачі про сільського листоношу

У статті приведено формулювання і аналіз узагальнення гамільтонової задачі про сільського листоношу. Пропонується точний метод її розв'язання, який розвиває класичний алгоритм Літтла.

A.V. Morozov, A.V. Panishev, V.O. Skachkov

Modification of Little's Method for Solving the Circular Rural Postman Problem

In this paper the formulation and analysis of the generalization of the Hamiltonian Travelling Salesman Problem is described. The exact method of its solving developing classical Little's algorithm is offered.

Статья поступила в редакцию 02.06.2010.