531.3:517.9

М.М. ЖЕЧЕВ

СТАБИЛИЗАЦИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМ СИЛАМИ, ЗАВИСЯЩИМИ ОТ УСКОРЕНИЯ

Одним из наиболее важных свойств уравнений Лагранжа является их регулярность, т.е. невырожденность матрицы инерции, благодаря чему уравнения Лагранжа всегда могут быть приведены к нормальной форме. Однако матрица инерции этих уравнений может оказаться плохо обусловленной, а сами уравнения движения – сингулярно возмущенными. Вследствие этого даже относительно малые погрешности параметров исполнительных органов системы управления и сравнительно небольшие возмущающие воздействия могут привести к значительным отличиям между расчетным и реальным движениями системы.

Изменить эту ситуацию средствами традиционного управления, зависящего только от положения, скорости и времени, не всегда оказывается возможным, что приводит к необходимости разработки специальных методов управления сингулярно возмущенными системами.

В данной статье для уменьшения влияния постоянно действующих возмущений рассмотрен подход к задаче стабилизации сингулярно возмущенных систем при помощи сил, зависящих от ускорения.

Однією з найбільш важливих властивостей рівнянь Лагранжа є їхня регулярність, тобто невиродженість матриці інерції, завдяки чому рівняння Лагранжа завжди можуть бути приведені до нормальної форми. Проте матриця інерції цих рівнянь може виявитися погано обумовленою, а самі рівняння руху – сингулярними збуреними. Внаслідок цього навіть порівняльно малі погрішності параметрів виконавчих органів системи керування і порівняно невеликі збурюючі дії можуть привести до значних відмінностей між розрахунковим і реальним рухами системи.

Змінити цю ситуацію засобами традиційного керування, що залежить тільки від положення, швидкості і часу, не завжди виявляється можливим, що приводить до необхідності розробки спеціальних методів керування сингулярними збуреними системами.

У даній статті для зменшення впливу постійно діючих збурень розглянуто підхід до задачі стабілізації сингулярних збурених систем за допомогою сил, що залежать від прискорення.

One of the most important properties of the Lagrange equations is their regularity, i.e. the non-singularity of their inertia matrix, as a result of which they can be always brought to a normal form. However, their inertia matrix may be ill-conditioned, and the equations themselves may be singularly perturbed. As a consequence, even relatively small errors in the parameters of the control actuators and moderate perturbing actions may result in a significant difference between the calculated and the actual motion of the system.

It is not always possible to remedy this situation using the traditional control, which only depends on the position, velocity, and time, thus calling for the development of special methods to control singularly perturbed systems.

This paper reports a new approach to the singularly perturbed system stabilization problem, in which the effect of permanent perturbations is reduced using acceleration-dependent forces.

1. Сингулярно возмущенные механические системы. Выход в свет в 1788 году знаменитого сочинения Лагранжа "Mećanique Analitique" стал выдающимся событием в ранней истории аналитической механики. Предложенный Лагранжем метод позволил свести динамическую задачу к задаче чистого анализа, благодаря чему оказалось излишним приводить всякий раз геометрические соображения.

Применение метода Лагранжа к голономным механическим системам позволяет записать уравнения движения (уравнения Лагранжа второго рода), обладающие рядом замечательных свойств. Одним из наиболее важных свойств этих уравнений является их регулярность, т.е. невырожденность матрицы при ускорениях (матрицы инерции), в связи с чем уравнения Лагранжа всегда могут быть приведены к нормальной форме (см., к примеру, [1]). Если при этом выполняются еще и некоторые не слишком жесткие условия гладкости (которые в механике обычно считаются выполненными), то уравнения Лагранжа имеют единственное решение, и это решение зависит от параметров и правой части непрерывным образом. Благодаря этим свойствам, уравнения и метод Лагранжа даже спустя столетия являются одним из основных источников идей аналитической динамики.

Хотя уравнения Лагранжа голономных систем всегда регулярны, матрица инерции этих уравнений может оказаться плохо обусловленной, а сами уравнения движения – сингулярно возмущенными [2] и, значит, жесткими. Вследствие этого даже относительно малые погрешности параметров исполнительных органов системы управления и сравнительно небольшие возмущающие воздействия (постоянно действующие возмущения) могут привести к значительным отличиям между расчетным и реальным движениями системы. Чаще всего это происходит с многоэлементными механическими системами, у которых отличие между массо-инерционными характеристиками различных элементов почти всегда значительное, из-за чего матрицы инерции таких систем нередко оказываются плохо обусловленными.

Изменить эту ситуацию средствами традиционного управления, зависящего только от положения, скорости и времени, не всегда оказывается возможным, что приводит к необходимости разработки специальных методов управления сингулярно возмущенными системами.

В [3, 4] приведен один из способов уменьшения влияния постоянно действующих возмущений на управляемое движение сингулярных и сингулярно возмущенных систем, заключающийся в использовании поочередного управления. В данной статье рассмотрен другой подход, основанный на использовании управляющих воздействий, зависящих от ускорения.

2. Силы, зависящие от ускорения. Спор о том, могут ли силы зависеть от ускорения, ведется уже более полутора веков. "Со времен Ньютона механики привыкли писать уравнения движения, четко придерживаясь правила: в левой части должно стоять произведение массы и ускорения, а все, что записано справа, есть силы, представляющие собой причины ускоренного движения материальных объектов. "Как же причины, вызывающие ускорение, могут сами зависеть от ускорения?" – вот главное психологическое препятствие, мешающее признать реальность таких сил и заставляющее придумывать все что угодно, чтобы сохранить привычное понимание динамических уравнений" [5]. Тот факт, что Ньютон в своем знаменитом труде "Philosophiae Naturalis Principia Mathematica" обошел этот вопрос молчанием, также добавило данной проблеме загадочности и интриги.

Попытки строго доказать неприемлемость в ньютоновой механике сил, зависящих от ускорения, предпринимались в разное время разными авторами и каждый раз приводили к новому витку дискуссии [6 – 14]. Одно из наиболее известных и правдоподобных такого рода доказательств принадлежит Парсу [1], который утверждал, что силы, зависящие от ускорения, противоречат основополагающему принципу механики – принципу независимости действия сил. Другие доказательства, как правило, представляют собой варианты доказательства Парса.

Хотя утверждение Парса интуитивно всегда вызывало серьезные сомнения, строгое обоснование его ошибочности было приведено только в 2007 году в статье [15]. В ней было показано, что приведенное в [1] доказательство ошибочно, а силы, зависящие от ускорения, в такой же степени приемлемы в механике, как и традиционные силы, зависящие только от положения, скорости и времени.

Статья [15] устранила принципиальное препятствие на пути применения сил, зависящих от ускорения, открыв тем самым возможности для корректной постановки и решения различных задач с использованием таких сил. Как показали дальнейшие исследования [16, 17], существует целый ряд прикладных задач, которые могут быть решены с помощью сил, зависящих от ускорения. В одних случаях эти силы могут использоваться для объяснения различных физических явлений, в других – как средство получения наиболее эффективного решения. В некоторых случаях (к которым относится рассмотренная в [16, 17] задача стабилизации вагона с наклоняемым кузовом) – как единственный способ решения.

В данной статье рассмотрена задача о стабилизации силами, зависящими от ускорения, сингулярно возмущенных систем для уменьшения влияния постоянно действующих возмущений. В разделе 3 на примере системы с одной степенью свободы исследованы особенности данной задачи и предложены подходы к ее решению. В разделе 4 эти подходы развиты для систем с несколькими степенями свободы. В разделе 5 на основании полученных результатов решена задача стабилизации плоского четырехзвенника.

3. Системы с одной степенью свободы. На первом этапе решения задачи стабилизации сингулярно возмущенных систем рассмотрим систему с одной степенью свободы, движение которой описывается уравнением

$$\mu\ddot{\varphi} = c_1\varphi + k_1\dot{\varphi} + u\ . \tag{1}$$

Это уравнение может описывать динамику маятника, кузова вагона (рассмотренного в [16, 17]) или какой-то иной механической системы. Однако чтобы не обременять задачу второстепенными факторами, мы не будем конкретизировать физический смысл задачи, а будем просто считать, что $\mu > 0$ – малый массо-инерционный параметр, φ – обобщенная координата, c_1 и k_1 – некоторые константы, u – управление.

3.1. Традиционный подход. Рассмотрим вначале традиционный подход к стабилизации сингулярно возмущенных систем, когда управление зависит только от положения и скорости, т.е.

$$u = c_2\varphi + k_2\dot{\varphi}, \tag{2}$$

где c_2 и k_2 – некоторые константы. Уравнение (1) в этом случае примет вид

$$\mu\ddot{\varphi} = c\varphi + k\dot{\varphi}, \tag{3}$$

где $c = c_1 + c_2$, $k = k_1 + k_2$.

Управление (2) является стабилизирующим (т.е. решает задачу стабилизации), если оно обеспечивает асимптотическую устойчивость тривиального решения

$$\varphi = \dot{\varphi} = 0 \tag{4}$$

уравнения (3), для чего, как известно, должны выполняться неравенства

$$c < 0\ ,\ k < 0\ . \tag{5}$$

Если на систему действуют постоянно действующие возмущения $f(t)$, то уравнение (3) принимает вид

$$\mu\ddot{\varphi} = c\varphi + k\dot{\varphi} + f\ . \tag{6}$$

Для определенности будем считать, что

$$f(t) = \bar{f}\sin\omega t,$$

где $\bar{f} > 0$, $\omega > 0$ – амплитуда и частота постоянно действующего возмущения.

Пусть выполняются условия (5). Покажем, что при малых μ решения уравнения (6) могут быть весьма чувствительными к постоянно действующим возмущениям, для чего оценим амплитуды A_φ, $A_{\dot\varphi}$, $A_{\ddot\varphi}$ установившегося движения уравнения (6) и его производных.

При высокочастотных постоянно действующих возмущениях, когда $\omega >> \max\{-k/\mu, \sqrt{-c/\mu}\}$, указанные амплитуды равняются

$$A_\varphi = \frac{1}{\sqrt{\left(\mu\omega^2 + c\right)^2 + (k\omega)^2}}\bar{f}, \quad A_{\dot\varphi} = \omega A_\varphi, \quad A_{\ddot\varphi} = \omega^2 A_\varphi. \tag{7}$$

Как видно из (7), с ростом ω данные амплитуды стремятся к следующим величинам

$$A_\varphi \to \frac{1}{\mu\omega^2}, \quad A_{\dot\varphi} \to \frac{1}{\mu\omega}, \quad A_{\ddot\varphi} \to \frac{1}{\mu}. \tag{8}$$

К примеру, если

$$\mu = 0{,}1;\ c = -1;\ k = -0{,}5;\ \bar{f} = 1;\ \omega = 10,$$

то расчеты по формулам (7) дают $A_\varphi \approx 0{,}09$; $A_{\dot\varphi} \approx 0{,}9$; $A_{\ddot\varphi} \approx 9$, что вполне согласуется с соответствующими значениями амплитуд, вычисленными по формулам (8). (Для сравнения, если $\mu = 1$, то имеем значительно меньшие амплитуды $A_\varphi \approx 0{,}01$; $A_{\dot\varphi} \approx 0{,}1$; $A_{\ddot\varphi} \approx 1$).

Согласно (8), при достаточно больших ω значения амплитуд A_φ, $A_{\dot\varphi}$, $A_{\ddot\varphi}$ обратно пропорциональны массо-инерционному параметру μ и поэтому при достаточно малых μ могут принимать сравнительно большие значения. То есть, при традиционном подходе к стабилизации сингулярно возмущенные системы могут быть весьма чувствительны к постоянно действующим возмущениям.

Как ясно из (7), уменьшить указанные амплитуды можно двумя путями: либо увеличивая параметры c и/или k, либо увеличивая параметр μ.

В первом случае корректно уменьшить влияние постоянно действующих возмущений можно далеко не всегда, поскольку увеличение параметров c и k еще более повышает жесткость уравнений движения (уменьшает относительное значение μ) и, кроме того, может привести к увеличению собственной частоты системы и, как следствие, к резонансу. При этом резонанс может возникнуть даже в том случае, когда с увеличением c и k расчетное значение собственной частоты меняется не слишком сильно, поскольку из-за высокой жесткости системы даже сравнительно малые относительные погрешности задания параметров управления могут привести к значительным отличиям реальных значений собственных частот от расчетных.

Подход, связанный с увеличением малого параметра μ, основан на применении сил, зависящих от ускорения. В отличие от предыдущего, данный подход ни к повышению жесткости уравнения движения (6), ни к повышению собственной частоты не приводит. Поэтому далее рассмотрена задача стабилизации сингулярно возмущенных систем при помощи управляющих воздействий, зависящих от ускорения.

3.2. Алгебраическая зависимость управления от ускорения. Суть данного подхода заключается в регуляризации уравнения движения за счет добавки в управление слагаемого, зависящего от ускорения, с таким расчетом, чтобы в итоге коэффициент при ускорении в уравнении движения оказался достаточно большим.

В соответствии с этим, добавим к правой части управления (2) слагаемое, зависящее от ускорения, т.е. положим

$$u = c_2\varphi + k_2\dot{\varphi} + d\ddot{\varphi}, \tag{9}$$

где d – некоторая константа. Уравнение (1) в этом случае примет вид

$$\mu\ddot{\varphi} = c\varphi + k\dot{\varphi} + d\ddot{\varphi}\,. \tag{10}$$

Для асимптотической устойчивости тривиального решения (4) уравнения (10) необходимо, чтобы выполнялось одно из двух условий:

$$\mu - d > 0,\ c < 0,\ k < 0 \quad \text{или} \quad \mu - d < 0,\ c > 0,\ k > 0\,. \tag{11}$$

Однако ни одно из этих условий не гарантирует асимптотической устойчивости, для достижения которой требуется, чтобы, кроме (11), μ удовлетворяло еще одному условию.

Например, при алгебраической зависимости управления от ускорения тривиальное решение (4) уравнения (1) с управлением

$$u = c_2\varphi + k_2\dot{\varphi} + d\ddot{\varphi}(t-\tau), \tag{12}$$

может оказаться неустойчивым, даже если действительные части корней характеристического уравнения системы (1), (9) отрицательны, т.е. даже при выполнении какого-либо из условий (11).

Примечание 1. Запаздывание в (12) учтено только в ускорении. Это сделано для простоты, а также потому, что учет (или неучет) запаздывания в φ и $\dot{\varphi}$ не приводит к качественным изменениям.

Примечание 2. Здесь и далее зависимость от времени указывается только в функциях с запаздыванием, а в остальных функциях времени опускается.

Можно показать [16, 17], что упомянутым выше дополнительным условием является неравенство

$$|d| < \mu\,. \tag{13}$$

Это означает, что при выполнении условия (13) любое из условий (11) является необходимым и достаточным для асимптотической устойчивости решения (4) как уравнения (10), так и системы с запаздыванием (1), (12).

Хотя, с одной стороны, условие (13) и делает предложенный подход корректным, с другой стороны, оно лишает его практического интереса, т.к. означает, что при алгебраической зависимости управления от ускорения коэффициент при $\ddot{\varphi}$ можно корректно увеличить не более чем в два раза, что не позволяет значительно снизить влияние постоянно действующих возмущений на движение рассматриваемой системы. Действительно, поскольку коэффициент при ускорении в этом случае по-прежнему остается малой величиной ($< 2\mu$), то, как ясно из (8), амплитуды A_{φ}, $A_{\dot{\varphi}}$, $A_{\ddot{\varphi}}$ установившегося движения уравнения

$$(\mu - d)\ddot{\varphi} = c\varphi + k\dot{\varphi} + f \tag{14}$$

не могут быть уменьшены более чем в два раза по сравнению с амплитудами установившегося движения уравнения (3).

Для существенного снижения влияния постоянно действующих возмущений коэффициент при ускорении в управлении, очевидно, должен быть значительно больше малого параметра μ. Это можно сделать, используя дифференциальную зависимость управления от ускорения.

3.3. Дифференциальная зависимость управления от ускорения. Далее будем считать, что

$$|d| >> \mu . \tag{15}$$

Пусть вместо (9) управление задается уравнениями

$$u = c_2\varphi + k_2\dot{\varphi} + M \quad \text{и} \quad \varepsilon\dot{M} = s[M - d\ddot{\varphi}(t - \tau)], \tag{16}$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр, а $s = \pm 1$ – параметр, предназначенный для того, чтобы иметь возможность реализовывать управление как с положительным, так и с отрицательным коэффициентом d (см. ниже п. 3.4).

В случае (16) уравнения движения рассматриваемой системы при постоянно действующих возмущениях имеют вид

$$\varepsilon\dot{M} = s[M - d\ddot{\varphi}(t - \tau)], \tag{17}$$

$$\mu\ddot{\varphi} = c\varphi + k\dot{\varphi} + M + f . \tag{18}$$

Для удобства изложения отдельно запишем уравнение (18) для случая, когда постоянно действующие возмущения отсутствуют

$$\mu\ddot{\varphi} = c\varphi + k\dot{\varphi} + M . \tag{19}$$

Рассмотрим для сравнения еще одну систему, но уже без запаздывания

$$\varepsilon\dot{M} = s(M - d\ddot{\varphi}), \tag{20}$$

$$\mu\ddot{\varphi} = c\varphi + k\dot{\varphi} + M + f , \tag{21}$$

записав отдельно уравнение (21) для случая, когда постоянно действующие возмущения отсутствуют

$$\mu\ddot{\varphi} = c\varphi + k\dot{\varphi} + M . \tag{22}$$

Тогда по аналогии с тем, как это было сделано в [16, 17], можно доказать следующее утверждение.

Утверждение 1. Если тривиальное решение системы (20), (22) асимптотически устойчиво, то

– при достаточно малом τ тривиальное решение системы (17), (19) также асимптотически устойчиво;

– если, кроме этого, функция $f(t)$ достаточно гладкая, то на конечном интервале времени при достаточно малом τ решения систем (17), (18) и (20), (21) отличаются на величину порядка $O(\tau)$.

Поскольку начальное значение M никак не регламентировано, то можно считать, что в начальный момент времени правая часть (17) достаточно мала. В этом случае в силу теоремы А.Н. Тихонова [18] можно доказать еще одно утверждение.

Утверждение 2. Если коэффициент при M в уравнении (20) (с учетом уравнения (21)) отрицателен, т.е.

$$s(1 - d/\mu) < 0, \tag{23}$$

то на конечном интервале времени при достаточно малом ε для системы (20), (21) справедлива оценка $M = d\ddot{\varphi} + O(d\varepsilon/\mu)$, а решения системы (20), (21) и уравнения (14) отличаются на величину порядка $O(d\varepsilon/\mu)$.

На основании утверждений 1 и 2 можно заключить следующее.

На этапе синтеза может использоваться алгебраическая зависимость стабилизирующего управления от ускорения, однако формирование управления должно осуществляться в соответствии с дифференциальной зависимостью.

Поскольку при правильном выборе параметров управления движения системы в двух указанных случаях мало отличаются друг от друга, то управление с дифференциальной связью сводится, в итоге, к добавке в управление u слагаемого $d\ddot{\varphi}$, $|d| >> \mu$. Данная добавка устраняет сингулярную возмущенность уравнения движения (6), приводя его к виду (14). Благодаря этому, понижается жесткость системы, уменьшаются ее собственная частота и амплитуды установившегося движения и его производных.

3.4. Соотношение параметров системы. Выясним, как должны соотноситься между собой s, d и малые параметры $\mu > 0$, $\tau > 0$ и $\varepsilon > 0$.

Прежде всего, отметим, что в случае (15) условие (23) эквивалентно неравенству $sd > 0$, из которого видно, что, задавая тот или иной знак параметра $s = \pm 1$, можно реализовать управление как с положительным, так и с отрицательным коэффициентом d.

Для справедливости первой части утверждения 1 недостаточно только того, чтобы параметры τ и ε были малыми – необходимо, чтобы они находились в определенном соотношении. Для того чтобы тривиальное решение системы (17), (19) было асимптотически устойчиво, параметры μ, τ, ε и d должны быть такими, чтобы действительные части всех асимптотических корней характеристического квазиполинома системы (17), (19) были отрицательными [19]. По аналогии с [16, 17] можно показать, что для этого они должны удовлетворять соотношению

$$\varepsilon > \frac{2|d|}{\pi\mu}\tau. \tag{24}$$

Вместе с тем, как следует из утверждения 2, модуль разности решений системы (17), (18) и уравнения (14) является величиной порядка $|d|\varepsilon/\mu$, или, с учетом (24), величиной порядка $d^2\tau/\mu^2$.

Таким образом, величина ε должна быть, с одной стороны, достаточно большой, чтобы тривиальное решение системы (17), (19) было асимптотически устойчиво, а с другой стороны – достаточно малой, чтобы обеспечить приемлемую близость решений системы (17), (18) и уравнения (14).

Как показывают расчеты, компромисс в этом вопросе вполне достижим. Так, численное моделирование процесса стабилизации при следующих значениях параметров

$$\mu = 0{,}1\,;\; c = -1\,;\; k = -0{,}5\,;\; \bar{f} = 1\,;\; \omega = 10\,;\; \tau = 0{,}001\,;\; d = -0{,}5\,;\; \varepsilon = 0{,}01$$

показало, что максимальное отличие (δ) установившихся движений уравнения (14) и системы (17), (18) составляет около 9% от амплитуд этих движений. (Для иллюстрации справедливости утверждения 2 отметим, что расчетные значения амплитуд A_{φ}, $A_{\dot\varphi}$, $A_{\ddot\varphi}$ в данном случае в $(\mu - d)/\mu \approx 6$ раз меньше, чем при традиционном управлении (см. п. 3.1)). Увеличение ε в несколько раз приводит к пропорциональному увеличению δ, а с уменьшением ε эта величина уменьшается. Однако значительное уменьшение ε при фиксированном τ невозможно, т.к. уже при $\varepsilon < 0{,}003$ (и прежних значениях остальных параметров) тривиальное решение системы (17), (18) становится неустойчивым, что подтверждает справедливость условия (24). Вместе с тем, одновременное уменьшение в несколько раз и ε, и τ приводит к пропорциональному уменьшению δ.

3.5. Выводы к разделу 3. Анализ сингулярно возмущенной системы с одной степенью свободы показал, что:

– традиционный подход не позволяет понизить жесткость уравнений движения, поэтому даже относительно малые погрешности задания параметров управления и сравнительно небольшие постоянно действующие возмущения могут привести к значительным отличиям между расчетным и реальным движениями системы;

– применение управления с алгебраической зависимостью от ускорения также не позволяет существенно понизить жесткость уравнений движения, однако исследование такого управления представляет интерес как один из этапов решения задачи синтеза стабилизирующего управления;

– формирование значений стабилизирующего управления должно осуществляться в соответствии с дифференциальной зависимостью управления от ускорения; при соответствующем выборе параметров такое управление устраняет сингулярную возмущенность уравнения движения, понижает жесткость системы, уменьшает ее собственную частоту и снижает влияние постоянно действующих возмущений.

4. Системы с несколькими степенями свободы. Рассмотрим голономную склерономную сингулярно возмущенную систему с n степенями свободы, находящуюся под действием управления и сил, линейных по положению и скорости.

Воспользуемся рассмотренными в предыдущем разделе подходами для стабилизации данной системы в условиях, когда, кроме указанных сил, на нее действуют еще и постоянно действующие возмущения $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$.

4.1. Преобразование сингулярно возмущенных уравнений Лагранжа. Пусть часть тел (назовем их "легкими") рассматриваемой системы имеют массу, значительно меньшую, чем массы остальных ("тяжелых") тел системы. Малость масс легких тел по отношению к массам тяжелых охарактеризуем малым параметром $\mu \ll 1$. Будем считать, что сингулярная возмущенность системы обусловлена именно малостью параметра μ. Тогда, как показано в [2], положение всех тяжелых тел может быть описано при помощи $r = n - e$ обобщенных независимых координат, где e – дефект матрицы инерции при $\mu = 0$. Так как в силу сингулярной возмущенности системы $e > 1$ [16, 17], то $r < n$.

Пусть вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_r)$ описывает положение всех тяжелых тел, а $y = (y_1, y_2, \ldots, y_{n-r})$ дополняет x таким образом, что координаты $z = (x, y) = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ описывают положение также и всех легких тел, и пусть уравнения Лагранжа рассматриваемой системы представлены в виде

$$A\ddot{z} = \xi + C_1 z + K_1 \dot{z} + u, \qquad (25)$$

где $A = A(z)$ – матрица инерции (матрица квадратичной формы кинетической энергии); $\xi = \xi(z, \dot{z})$ – вектор, элементами которого являются квадратичные формы по $\dot{z}$; C_1 – постоянная, а $K_1 = K_1(z)$ – вообще говоря, переменная матрицы; $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ – вектор управления. Согласно сделанным выше допущениям, матрица инерции A плохо обусловленная, т.е. система (25) сингулярно возмущенная.

В координатах z матрица A может быть представлена в виде

$$A = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \scriptstyle r & \scriptstyle n-r \end{array} & \\ \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \scriptstyle r \\ \scriptstyle n-r \end{array} \end{array}, \qquad (26)$$

где

$$\|A_{12}\|, \|A_{21}\|, \|A_{22}\| = O(\mu) \ll \|A_{11}\| \quad (\|\cdot\| \text{ – некоторая норма}). \qquad (27)$$

Благодаря этому, к постоянно действующим возмущениям (при традиционном управлении) чувствительны только координаты y. Это означает, что с уменьшением μ амплитуды установившегося движения по координатам y возрастают неограниченно, в то время как по координатам x они ограничены некоторой величиной. При произвольных координатах $q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ ограниченными с уменьшением μ останутся только те q_i, которые могут рассматриваться в качестве компоненты некоторого вектора x, остальные же координаты при этом неограниченно возрастают.

При управлении

$$u = C_2 z + K_2 \dot{z} + D\ddot{z}, \qquad (28)$$

где C_2 – постоянная, а $K_2 = K_2(z)$ и $D = D(z, \dot{z})$ – вообще говоря, переменные матрицы, уравнение (25) принимает вид

$$(A - D)\ddot{z} = \xi + Cz + K\dot{z}, \qquad (29)$$

где $C = C_1 + C_2$, $K = K_1 + K_2$.

Как видно из (26), (27), для регуляризации уравнения (29) достаточно, чтобы матрица D имела вид

$$D = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} r & n-r \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \mathrm{O} & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & D_{22} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} r \\ n-r \end{array} \end{array}, \tag{30}$$

где O – нулевая матрица, а матрица D_{22} достаточно хорошо обусловлена. Существует множество способов задания матрицы D_{22}. Например, в качестве D_{22} может быть выбрана матрица, пропорциональная A_{22}, т.е. $D_{22} = gA_{22}$, где коэффициент g подобран таким образом, чтобы $\|(1-g)A_{22}\|$ и $\|A_{11}\|$ были величинами одного порядка. Можно поступить иначе, выбрав D_{22} в виде диагональной матрицы, диагональ которой совпадает с диагональю матрицы gA_{22}. Еще один способ заключается в том, чтобы задать D_{22} в виде диагональной матрицы, элементы которой имеют значения, сравнимые по величине со значениями диагональных элементов матрицы A_{11}, и т.д.

4.2. Асимптотическая устойчивость под действием сил, зависящих от ускорения. Рассмотрим условия асимптотической устойчивости тривиального решения

$$z = \dot{z} = 0 \tag{31}$$

системы (29), полагая для простоты, что матрица D не зависит от скоростей $\dot{z}$.

Так как матрица D симметричная, то производная по времени от функции

$$V(z,\dot{z}) = \frac{1}{2}\dot{z}'[A-D]\dot{z} - \frac{1}{2}z'Cz \tag{32}$$

вдоль решений системы (29) равняется

$$\dot{V}(z,\dot{z}) = \dot{z}'K(z)\dot{z} + \zeta(z,\dot{z}), \tag{33}$$

где вектор $\zeta(z,\dot{z})$ такой, что $|\zeta(z,\dot{z})| = O(|\dot{z}|^3)$. Если в некоторой окрестности решения (31) матрица $K(z)$ отрицательно определенная, то из (33) следует, что при достаточно малых $|\dot{z}|$ отрицательно определена и функция $\dot{V}(z,\dot{z})$. Если, кроме этого, в некоторой окрестности решения (31) матрицы C и $D-A$ также отрицательно определены, то $V(z,\dot{z})$ является функцией Ляпунова системы (29) и поэтому в силу теоремы Барбашина – Красовского [20] решение (31) асимптотически устойчиво.

Подобным же образом доказывается асимптотическая устойчивость решения (31) и в случае, когда матрица D зависит также и от скорости $\dot{z}$, т.е. $D = D(z,\dot{z})$.

Если вместо (32) рассмотреть функцию

$$V(z,\dot z)=-\frac{1}{2}\dot z'[A-D]\dot z+\frac{1}{2}z'Cz\,,$$

то совершенно аналогично можно доказать асимптотическую устойчивость решения (31) и в случае, когда матрицы C, $K(z)$ и $D(z,\dot z)-A(z)$ в некоторой окрестности решения (31) положительно определенные.

Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Утверждение 3. Если матрица $D=D(z,\dot z)$ симметричная, а матрицы C, $K(z)$ и $D(z,\dot z)-A(z)$ в некоторой окрестности решения (31) одновременно либо отрицательно, либо положительно определенные, то решение (31) системы (29) асимптотически устойчиво.

4.3. Дифференциальная зависимость управления от ускорения. Пусть управление имеет следующий вид:

$$u=C_2 z+K_2\dot z+M\,, \tag{34}$$

где $M=(\overset{r}{M_1},\overset{n-r}{M_2})$, причем $M_1=\mathrm{O}$, а M_2 определяется дифференциальным уравнением $\varepsilon\dot M_2=S[M_2-D_{22}\ddot y(t-\tau)]$, где $\varepsilon>0$ – малый параметр, а $S=S(z,\dot z)$ – некоторая невырожденная матрица. (Управление можно было бы задать и несколько иначе (см., к примеру, примечание 3), но для определенности будем считать, что оно задается именно выражением (34)).

Тогда уравнение движения (25) примет вид

$$A\ddot z=Cz+K\dot z+\xi+M\,, \tag{35}$$

$$\varepsilon\dot M_2=S[M_2-D_{22}\ddot y(t-\tau)] \tag{36}$$

и справедливо следующее утверждение.

Утверждение 4. Если матрица $S\left(E-D_{22}A_{22}^{-1}\right)$ отрицательно определенная, а решение

$$z=\dot z=0 \tag{37}$$

системы (29) асимптотически устойчиво, то:

– при достаточно малом τ тривиальное решение (37) системы (35), (36) также асимптотически устойчиво;

– на любом конечном интервале времени при достаточно малых ε и τ справедлива оценка $M_2=D_{22}\ddot y+O\left(\left\|D_{22}\right\|\cdot\left\|A_{22}^{-1}\right\|\varepsilon\right)+O(\tau)$, а решения систем

$$(A-D)\ddot z=\xi+Cz+K\dot z+f \tag{38}$$

и

$$A\ddot z=Cz+K\dot z+\xi+M+f\,, \tag{39}$$

$$\varepsilon\dot M_2=S[M_2-D_{22}\ddot y(t-\tau)] \tag{40}$$

отличаются на величину порядка $O\left(\left\|D_{22}\right\|\cdot\left\|A_{22}^{-1}\right\|\varepsilon\right)+O(\tau)$.

Из-за громоздкости мы не будем приводить доказательства утверждения 4; отметим лишь, что идея доказательств та же, что и в утверждениях 1 и 2.

4.4. Соотношение параметров системы. Для справедливости первой части утверждения 4 необходимо, чтобы параметры τ и ε находились в определенном соотношении. К примеру, если $r = n - 1$ (т.е. если A_{22} и D_{22} – скалярные величины), то (в силу теоремы об устойчивости по первому приближению систем с запаздыванием [19]) можно показать, что при достаточно малых μ, τ и ε должно выполняться соотношение

$$\varepsilon > \frac{2|D_{22}(0,0)|A_{22}^{-1}(0)}{\pi}\tau . \tag{41}$$

Вместе с тем, как следует из утверждения 4, модуль разности решений систем (39), (40) и (38) является величиной порядка $O\left(\|D_{22}\| \cdot \|A^{-1}{}_{22}\| \varepsilon\right) + O(\tau)$. Поэтому, как и в системе с одной степенью свободы, рассмотренной в разделе 3, величина ε должна быть, с одной стороны, достаточно большой, чтобы тривиальное решение системы (35), (36) было асимптотически устойчиво, а с другой стороны – достаточно малой, чтобы обеспечить приемлемую близость решений систем (39), (40) и (38).

4.5. Выводы к разделу 4. Таким образом, чтобы решить задачу стабилизации сингулярно возмущенной системы в условиях постоянно действующих возмущений, нужно выполнить следующие действия.

1. Ввести координаты $z = (x, y)$ и найти матрицу A и вектор ξ.

2. Выбрать симметричную достаточно хорошо обусловленную матрицу D_{22}, норма которой $\|D_{22}\|$ является величиной того же порядка, что и $\|A_{11}\|$.

3. Задать матрицы C_2 и K_2 (удовлетворяющие вместе с D_{22} условиям утверждения 3), сформировать уравнения управляемого движения (39), (40) и оценить согласно некоторому неравенству типа (41) нижнюю границу параметра ε.

Если уравнения движения необходимо записать именно в таких удобных координатах q, то, как несложно показать, кроме пунктов 1 – 3, нужно также выполнить следующие действия.

4. Записать якобиеву матрицу $T = \partial z / \partial q$ преобразования $z = z(q)$ в блочном виде

$$T = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} r \\ n-r \end{matrix} .$$

5. Сформировать уравнения управляемого движения в координатах q, которые, как несложно показать, могут быть представлены в виде

$$\bar{A}\ddot{q} = \bar{C}q + \bar{K}\dot{q} + \bar{\xi} + T_2' M_2 + f , \tag{42}$$

$$\varepsilon \dot{M}_2 = S\left\{M_2 - D_{22}\left[T_2 \ddot{q}(t-\tau) + \dot{T}_2 \dot{q}\right]\right\}, \tag{43}$$

где $\overline{A}, \overline{C}, \overline{K}, \xi$ – соответствующие матрицы в уравнениях Лагранжа в координатах q.

5. Стабилизация плоского четырехзвенника. Применим полученные результаты к задаче стабилизации плоского четырехзвенника с абсолютно твердыми звеньями, изображенного на рис. 1 (см. также [16, 17]). В данном примере не ставится цель описать динамику какой-либо конкретной технической системы. Единственная его цель – это проиллюстрировать полученные результаты.

Будем полагать, что тяжелое тело (4-ое звено) представляет собой однородное кольцо массой $m_4 = 1$ и диаметром $l_4 = 1$, а остальные (легкие) звенья являются однородными стержнями массой $m_k = \mu = 0{,}1$ и длиной $l_k = 1$.

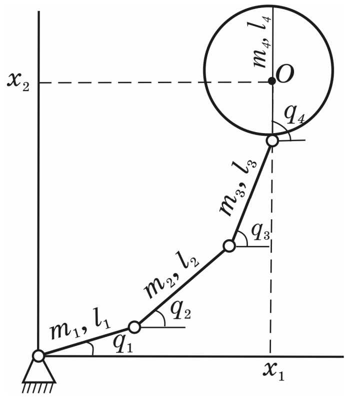

Рис. 1

Поскольку управление многозвенниками обычно осуществляется по углам в шарнирах, то в качестве управляемых координат естественно выбрать $q = (q_1, q_2, q_3, q_4)$.

Чтобы не обременять задачу второстепенными факторами, будем считать, что на систему действуют только управляющие силы и постоянно действующие возмущения.

Решим задачу стабилизации данной системы в координатах q в окрестности конфигурации $q = \overline{q} = (\pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2)$ в соответствии с рекомендациями п. 4.5.

1. Положение кольца можно описать с помощью трех независимых координат $x = (x_1, x_2, x_3)$, где x_1, x_2 – декартовы координаты центра масс, а $x_3 = q_4$ – угол поворота диска. В качестве координаты y, которая в данном случае – скаляр, можно выбрать любую из координат q_1, q_2 и q_3. Для определенности положим $y = q_1$. В этом случае $A_{11} = \mathrm{diag}(1, 1, 1/4)$.

2. Матрица D_{22} в данном случае, очевидно, является скаляром и можно положить $D_{22} = -0{,}5$. Соответственно, S – также скаляр и, чтобы обеспечить положительность произведения SD_{22}, его можно положить $S = -1$.

Поскольку речь идет об уравнениях в координатах q, то пункт 3 пропускаем.

4. Так как $y = q_1$, то $T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Пусть $\overline{C}_2 = \mathrm{diag}(-1,-1,-1,-1)$, а $\overline{K}_2 = \mathrm{diag}(-0{,}5;-0{,}5;-0{,}5;-0{,}5)$. Поскольку в данном случае $\overline{C}_1 = \overline{K}_1 = \mathrm{O}$, то $\overline{C} = \overline{C}_2$ и $\overline{K} = \overline{K}_2$. Пусть по углу q_1 действует возмущающий момент величиной $\sin 10t$, тогда постоянно действующее возмущение имеет вид $f = \sin 10t \cdot T_2'$. Поскольку $\overline{\xi} = -\dot{\overline{A}}\dot{q}$, то уравнения управляемого движения в координатах q имеют вид

$$\overline{A}\ddot{q} = \overline{C}(q - \overline{q}) + \overline{K}\dot{q} - \dot{\overline{A}}\dot{q} + T_2'(M_2 + \sin 10t), \tag{44}$$

$$\varepsilon \dot{M}_2 = -M_2 + D_{22}\ddot{q}_1(t-\tau), \qquad (45)$$

где матрица инерции имеет вид: $\bar{A} = J + A^{(4)} + \mu\sum_{k=1}^{3} A^{(k)}$, $J = \mathrm{diag}(J_1, J_2, J_3, J_4)$, $J_i = 1/120$ – центральные моменты инерции 1, 2 и 3-го стержней, $J_4 = 1/4$ – центральный момент инерции кольца, $A^{(k)}$ – симметричная матрица с элементами

$$A_{ij}^{(k)} = \begin{cases} L_i L_j \cos(q_i - q_j), & i,j \le k, \\ 0 - \text{в остальных случаях;} \end{cases} \qquad L_i = \begin{cases} 1, & i < k, \\ 1/2, & i = k. \end{cases}$$

В результате численного анализа установлено, что при выбранных значениях параметров управления имеет место оценка $2|D_{22}|/(\pi A_{22}) \approx 3$, поэтому соотношение (41) имеет вид

$$\varepsilon > 3\tau. \qquad (46)$$

Как показали расчеты, при $\tau = 0{,}001$ и $\varepsilon = 0{,}01$ (рис. 2) амплитуды устано-

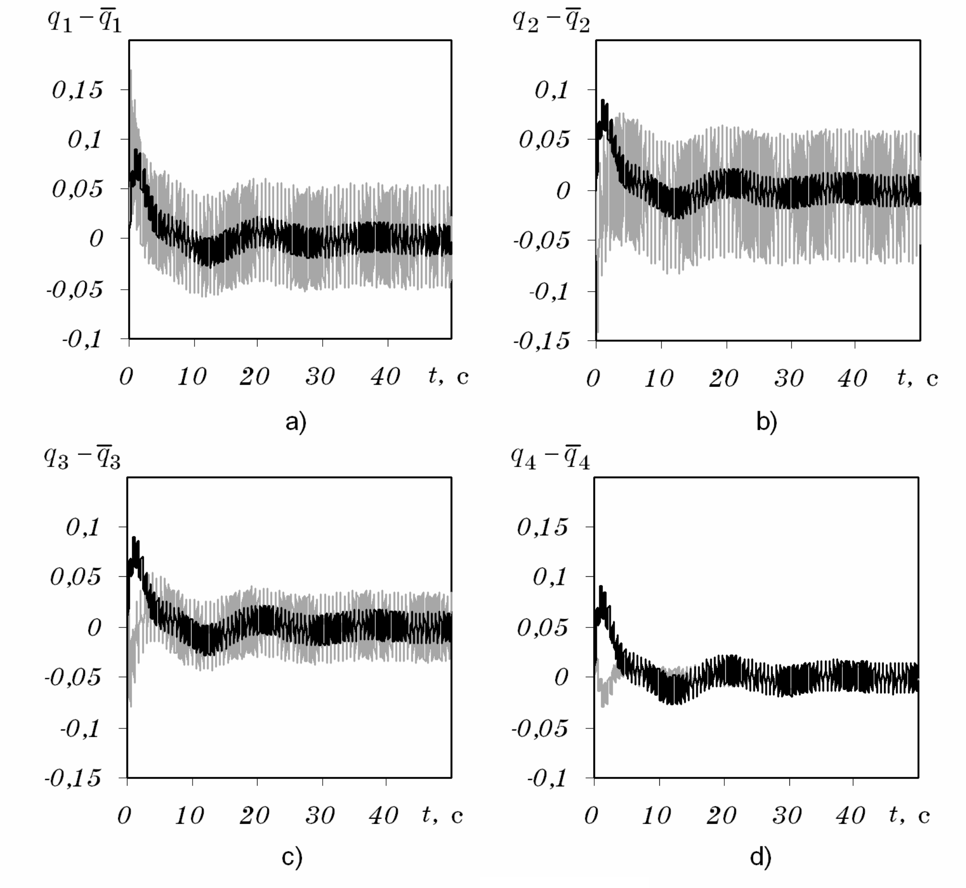

Рис. 2

вившихся движений уравнений (44), (45) по координатам q_1, q_2 и q_3 при использовании сил, зависящих от ускорения (более темная линия), в несколько раз меньше, чем при традиционном подходе ((44) при $M_2 = 0$), не использующем такие силы (более светлая линия). Что касается координаты q_4, то для нее указанные амплитуды в обоих случаях практически одинаковы. Особенность поведения q_4 объясняется тем, что из всех четырех координат q_i только q_4 может являться компонентой некоторого вектора x.

Максимальное отличие (δ) установившихся движений системы при дифференциальной ((44), (45)) и алгебраической ((44) при $M_2 = D_{22}\ddot{q}_1$) зависимостях управления от ускорения составляет около 8% от амплитуд этих движений.

Уменьшение ε в несколько раз приводит к пропорциональному уменьшению δ. Однако значительное уменьшение ε при фиксированном τ невозможно, т.к. уже при $\varepsilon = 0{,}0031$ (и прежних значениях остальных параметров) тривиальное решение системы (44), (45) начинает терять устойчивость, что подтверждает справедливость условия (46). Вместе с тем, одновременное уменьшение в несколько раз и ε, и τ приводит к пропорциональному уменьшению δ.

Увеличение ε в несколько раз приводит к пропорциональному возрастанию δ, однако это возрастание происходит, в основном, за счет сдвига друг относительно друга во времени установившихся движений при дифференциальной и алгебраической зависимостях управления от ускорения.

6. Заключение. Хотя уравнения Лагранжа голономных систем всегда регулярны, матрица инерции этих уравнений может оказаться плохо обусловленной, а сами уравнения движения – сингулярно возмущенными. В последнем случае даже относительно малые погрешности задания параметров управления и сравнительно небольшие постоянно действующие возмущения могут привести к значительным отличиям между расчетным и реальным движениями системы.

Традиционный подход к стабилизации таких систем, когда управление зависит только от положения и скорости, еще более повышает жесткость системы, в связи с чем этот подход не всегда позволяет снизить влияние постоянно действующих возмущений.

Анализ задачи стабилизации сингулярно возмущенных систем силами, зависящими от ускорения, показал, что:

– управление с алгебраической зависимостью от ускорения также не позволяет существенно снизить влияние постоянно действующих возмущений; вместе с тем, исследование такого управления представляет значительный интерес как один из этапов решения задачи синтеза стабилизирующего управления с дифференциальной зависимостью от ускорения;

– формирование стабилизирующего управления должно осуществляться в соответствии с дифференциальной зависимостью управления от ускорения; при соответствующем выборе параметров такое управление не только обеспечивает асимптотическую устойчивость тривиального решения, но и позволяет существенно снизить влияние постоянно действующих возмущений.

1. *Парс Л. А.* Аналитическая динамика / *Л. А.Парс*. – М. : Наука, 1971. – 636 с.
2. *Zhechev M. M.* Equations of motion for singular systems of massed and massless bodies / *M. M. Zhechev* // Journal of Multi-body Dynamics. – 2007. – Vol. 221, № K4. – P. 591 – 597. (см. также http://mzhecheve.web.optima.com.ua).

3. *Жечев М. М.* Асимптотическая устойчивость равновесия сингулярных механических систем / *М. М. Жечев* // Автоматика и телемеханика. – 2001. – 62, №3. – С. 45 – 52. (см. также http://mzhecheve.web.optima.com.ua).
4. *Zhechev M. M.* Asymptotic stability of the equilibrium of singular mechanical systems / *M. M. Zhechev* // Automation and Remote Control. – 2001. – Vol. 62, №3. – P. 383 – 390 (см. также http://mzhecheve.web.optima.com.ua).
5. *Емельянов А. В.* Новый взгляд на физические основы классической и релятивистской механики / *А. В. Ємельянов.* – Калуга : Эйдос, 2007. – 191 с.
6. *Weber W.* Determination of Electrodynamics Measure / Concerning a Universal Law of Electrical Action. – Leipzig : Prince Jablonowski Society, 1846. – P. 211 – 378.
7. *Биркгоф Дж. Д.* Динамические системы / *Дж. Д. Биркгоф*. – Гостехиздат, 1941. – 305 р.
8. *Ghosh A.* Velocity-Dependent Inertial Induction and Secular Retardation of the Earth’s Rotation /A. Ghosh // Pramãna–Journal of Physics. – 1986. – Vol. 26. – №1. – P. 1 – 8.
9. *Абгарян К. А.* Динамика ракет / *К. А. Абгарян, Э. Л. Калязин, В. П. Мишин, И. М. Рапопорт.* – М. : Машиностроение, 1990. – 464 с.
10. *Waldron R. A.* Notes on the form of the force law / *R. A. Waldron* // Physics Essays. – 1991. – № 4. – P. 247 – 248.
11. *Assis A. K. T.* On forces that depend on the acceleration of the test body / *A. K. T. Assis* // Physics Essays. – 1992. – № 5. – P. 328 – 330.
12. *Smulsky J. J.* Force cannot depend on acceleration / *J. J. Smulsky* // Apeiron. – 1994. – № 20. – P. 43 – 44
13. *Assis A. K. T.* Acceleration Dependent Forces : Reply to Smulsky / *A. K. T. Assis* // Apeiron. – 1995. – Vol. 2. – № 1. – P. 25.
14. *Chen Y. H.* Pars's acceleration paradox / *Y. H. Chen* // Journal of the Franklin Institute. – 1998. – Vol. 335. – № 5. – P. 871 – 875.
15. *Zhechev M. M.* On the admissibility of given acceleration-dependent forces in mechanics / *M. M. Zhechev* // Journal of Applied Mechanics. – Transactions of the ASME. – 2007. – Vol. 74, № 1. – P. 107 – 110. (см. также http://mzhecheve.web.optima.com.ua).
16. *Жечев М. М.* Особенности применения в задачах механики сил, зависящих от ускорения / *М. М. Жечев* // Техническая механика. – 2007. – №1. – С. 10 – 20. (см. также http://mzhecheve.web.optima.com.ua).
17. *Zhechev M. M.* Peculiarities of the use of acceleration-dependent forces in mechanical problems / *M. M. Zhechev* // Journal of Multi-body Dynamics. – 2007. – Vol. 221, № K4. – P. 47 – 503. (см. также http://mzhecheve.web.optima.com.ua).
18. *Тихонов А. Н.* Дифференциальные уравнения / *А. Н. Тихонов, А. Б. Васильева, А. Г. Свєшников.* – М. : Наука, 1980. – 232 с.
19. *Эльсгольц Л. Э.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом / *Л. Э. Эльсгольц, Б. Н. Норкин.* – М. : Наука, 1971. – 296 с.
20. *Руш Н.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости / *Н. Руш, П. Абетс, М. Валуа.* – М. : Мир, 1980. – 300 с.

Институт технической механики
НАН Украины и НКА Украины,
Днепропетровск

Получено 03.06.08
в окончательном варианте 08.01.09