УДК 532.51

Ю.А. КВАША

О ПЛОСКОМ БЕЗВИХРЕВОМ ТЕЧЕНИИ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ ВБЛИЗИ КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКИ НА ОБТЕКАЕМОМ ТЕЛЕ

В работе рассмотрен вопрос о разложении функции тока вблизи критической точки в ряд по координатам, адаптивным к поверхности тела, с точностью до членов второго порядка. Данный вопрос представляет практический интерес при решении обратных краевых задач гидродинамики решеток профилей. На основе интегральной формулы Пуассона показано, что в случае плоского безвихревого течения идеальной несжимаемой жидкости справедливо следующее утверждение: если критическая точка расположена на прямолинейном участке поверхности обтекаемого тела, и в ней пересекаются только две линии тока, одна из которых совпадает с поверхностью тела, то значение смешанной производной второго порядка по прямоугольным декартовым координатам в критической точке отлично от нуля. С использованием предложенной модификации полярной системы координат показана справедливость приведенного выше утверждения в случае, когда участок поверхности обтекаемого тела, на котором расположена критическая точка, представляет собой дугу окружности.

У роботі розглянуто питання про розкладання функції току поблизу критичної точки в ряд по координатах, адаптивних до поверхні тіла, з точністю до членів другого порядку. Дане питання становить практичний інтерес при розв'язанні зворотних крайових задач гідродинаміки решіток профілів. На основі інтегральної формули Пуассона показано, що у випадку плоскої безвихрової течії ідеальної нестисливої рідини справедливо наступне твердження: якщо критична точка розташована на прямолінійній ділянці поверхні обтічного тіла, і в ній перетинаються тільки дві лінії току, одна з яких збігається з поверхнею тіла, то значення змішаної похідної другого порядку по прямокутних декартових координатах у критичній точці відмінно від нуля. З використанням запропонованої модифікації полярної системи координат показана справедливість наведеного вище твердження у випадку, коли ділянка поверхні обтічного тіла, на якому розташована критична точка, являє собою дугу окружності.

The work deals with the problem on expansion of the stream function in the vicinity of a critical point in term of coordinates, which are adaptive for the body surface, to the second order terms. This problem is of practical interest to solve inverse boundary problems of the hydrodynamics of airfoils arranged in cascade. Based on the Poisson integral formula, it is shown that in case of a plane vortex-free flow of an ideal incompressible fluid it is correctly reasoned: if a critical point is located on a straight section of the streamlined body surface, and with only two streamlines at this point, one of which coincides with the body surface, the value of the mixed second derivative with respect to rectangular Cartesian coordinates at a critical point differs from zero. Using the proposed modification of the system at polar coordinates, the validity of above statement is demonstrated in case when the section of the streamlined body surface, on which a critical point is located, represents a segment of a circle.

Введение. При решении обратных краевых задач гидродинамики решеток профилей необходимо задавать распределение скорости жидкости на поверхности профиля [1]. Указанное распределение не может быть произвольным, при его задании должны учитываться существующие теоретические представления о картине течения вблизи профиля. При этом одним из важных факторов, определяющих качество решения задачи об определении формы профиля, является учет структуры течения вблизи критических точек на его поверхности. В этих точках скорость жидкости равна нулю, и в них пересекаются, как правило, две линии тока (на рис. 1 показано характерное расположение линий тока жидкости вблизи критической точки O).

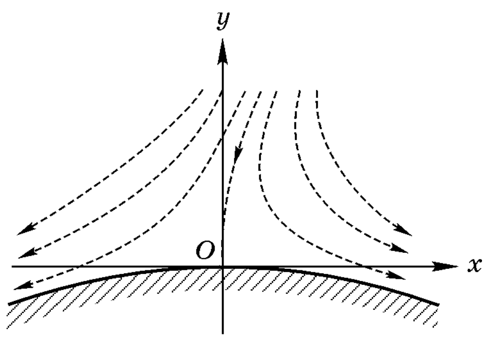

Рис. 1

В случае безвихревого течения идеальной несжимаемой жидкости функция тока ψ удовлетворяет уравнению Лапласа, т.е. является гармонической функцией. Известный подход к описанию такого течения вблизи критической точки на поверхности тела состоит в использовании разложения функции тока [2] (или потенциала скорости [3]) в ряд по координатам с точностью до членов второго порядка. В соответствии с этим подходом вводят декартову прямоугольную систему координат Oxy (рис. 1), начало которой совпадает с критической точкой. Значение функции тока ψ на поверхности тела полагают равной нулю. Малый участок поверхности тела вблизи критической точки рассматривают как прямолинейный [3, с. 44]. Далее, с учетом равенства нулю производных $\partial\psi/\partial x$ и $\partial\psi/\partial y$ в критической точке и условия, что в данной точке функция ψ удовлетворяет уравнению Лапласа, получают (с точностью до членов второго порядка)

$$\psi(x,y) = Cxy, \tag{1}$$

где $C = \left(\partial^2\psi / \partial x \partial y\right)_O$ (O – критическая точка).

Из выражения (1) следует, что компоненты скорости жидкости вблизи критической точки равны $v_x = \partial\psi/\partial y = Cx$, $v_y = -\partial\psi/\partial x = -Cy$ [3]. Одна из двух линий тока $\psi = 0$ совпадает с поверхностью тела, а вторая совпадает с осью y и, следовательно, пересекает поверхность тела под прямым углом [2, с. 117].

В настоящей работе рассмотрен следующий вопрос. Все сказанное выше о структуре течения вблизи критической точки на поверхности тела справедливо в случае, если константа C в разложении (1) удовлетворяет условию

$$C \neq 0. \tag{2}$$

Предположение о том, что условие (2) всегда выполняется в случае пересечения двух линий тока на поверхности тела, не является очевидным и требует обоснования. Автору не известны публикации, в которых рассматривался бы этот вопрос, что явилось основанием для проведения данного исследования.

Покажем, что соотношения (1) и (2) всегда выполняются, если критическая точка расположена на поверхности обтекаемого тела и в ней пересекаются только две линии тока $\psi = 0$, одна из которых совпадает с поверхностью тела. Рассмотрим при этом следующие две формы участка поверхности тела, на котором расположена критическая точка.

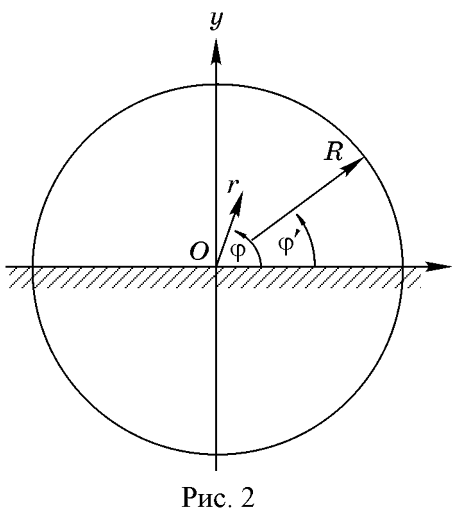

Рис. 2

1. Участок поверхности обтекаемого тела, на котором расположена критическая точка, является прямолинейным. Пусть, как и ранее, начало координат является критической точкой. Совместим ось x с поверхностью тела, как показано на рис. 2. Примем, что $\psi = 0$ на поверхности тела. Будем рассматривать течение жидкости в верхней полуплоскости $y > 0$. В пределах рассматриваемого прямолинейного участка поверхности обтекаемого тела опишем окружность некоторого радиуса R с центром в начале координат (рис. 2).

В дополнение к используемой декартовой прямоугольной системе координат Oxy введем полярную систему координат $Or\varphi$. Примем, что в верхней полуплоскости линия тока $\psi = 0$, не совпадающая с поверхностью тела, пересекает выбранную окружность в единственной точке $\left(R, \varphi^*\right)$. Без ограничения общности можно предположить, что

$$0 < \varphi^* \le \frac{\pi}{2}. \tag{3}$$

Также без ограничения общности можно предположить, что в верхней полуплоскости распределение функции тока $\psi_\Gamma(\varphi') = \psi(R, \varphi')$ на окружности удовлетворяет условиям:

$$\begin{gathered} \psi_\Gamma(\varphi') > 0 \text{ при } 0 < \varphi' < \varphi^*, \\ \psi_\Gamma(\varphi') < 0 \text{ при } \varphi^* < \varphi' < \pi, \\ \psi_\Gamma\left(\varphi^*\right) = 0. \end{gathered} \tag{4}$$

Необходимость задания $\psi_\Gamma(\varphi')$ на интервале $(0, \pi)$ в виде знакопеременной функции будет показана ниже. В точках пересечения окружности с осью x, то есть в точках, принадлежащих поверхности обтекаемого тела, $\psi_\Gamma(0) = \psi_\Gamma(\pi) = 0$.

В соответствии с принципом симметрии [4] зададим далее распределение $\psi_\Gamma(\varphi')$ на окружности в нижней полуплоскости $y < 0$ таким образом, чтобы выполнялось условие

$$\psi_\Gamma(\varphi') = -\psi_\Gamma(2\pi - \varphi') \text{ при } 0 \le \varphi' \le 2\pi. \tag{5}$$

Рассмотрим течение жидкости в области, ограниченной выбранной окружностью радиуса R, при заданных граничных условиях (4), (5). Для такого течения функция тока ψ может быть определена на основе интегральной формулы Пуассона [5]

$$\psi(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\varphi - \varphi')} \psi_\Gamma(\varphi') d\varphi'. \tag{6}$$

Проверим, что при условии (5) внутри данного круга радиуса R выполняются соотношения

$$\psi(r, 0) = 0 \text{ при } 0 \le r < R, \tag{7}$$

$$\psi(r, \pi) = 0 \text{ при } 0 < r < R, \tag{8}$$

то есть $\psi = 0$ на оси x, совпадающей с поверхностью обтекаемого тела.

Покажем, что выполняется соотношение (7). Обозначим

$$F(R,r,\varphi')=\frac{1}{2\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(0-\varphi')}.$$

Функция $F(R,r,\varphi')$ удовлетворяет условию

$$F(R,r,\varphi')=F(R,r,2\pi-\varphi') \text{ при } 0\le\varphi'\le 2\pi. \tag{9}$$

На основе формулы (6) и условий (5), (9) имеем

$$\psi(r,0)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(0-\varphi')}\psi_\Gamma(\varphi')d\varphi'=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}F(R,r,\varphi')\psi_\Gamma(\varphi')d\varphi'=$$

$$=\int\limits_0^{\pi}F(R,r,\varphi')\psi_\Gamma(\varphi')d\varphi'+\int\limits_\pi^{2\pi}F(R,r,\varphi')\psi_\Gamma(\varphi')d\varphi'=$$

$$=\int\limits_0^{\pi}F(R,r,\varphi')\psi_\Gamma(\varphi')d\varphi'-\int\limits_\pi^{2\pi}F(R,r,2\pi-\varphi')\psi_\Gamma(2\pi-\varphi')d\varphi'=$$

$$=\int\limits_0^{\pi}F(R,r,\varphi')\psi_\Gamma(\varphi')d\varphi'+\int\limits_\pi^{0}F(R,r,\varphi'')\psi_\Gamma(\varphi'')d\varphi''=0.$$

Аналогично можно показать, что соотношение (8) также выполняется.

Рассмотрим условие, при котором критическая точка совпадает с началом координат. Указанное условие может быть записано в виде:

$$\lim_{r\to 0}\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)_{(r,\pi/2)}\right]=0. \tag{10}$$

На основе дифференцирования выражения (6) по переменной r можно показать, что условие (10) эквивалентно условию

$$\int\limits_0^{2\pi}\sin(\varphi')\psi_\Gamma(\varphi')d\varphi'=0. \tag{11}$$

Преобразуем интеграл в выражении (11) с учетом (5)

$$\int\limits_0^{2\pi}\sin(\varphi')\psi_\Gamma(\varphi')d\varphi'=\int\limits_0^{\pi}\sin(\varphi')\psi_\Gamma(\varphi')d\varphi'+\int\limits_\pi^{2\pi}\sin(\varphi')\psi_\Gamma(\varphi')d\varphi'=$$

$$=\int\limits_0^{\pi}\sin(\varphi')\psi_\Gamma(\varphi')d\varphi'+\int\limits_\pi^{2\pi}\sin(2\pi-\varphi')\psi_\Gamma(2\pi-\varphi')d\varphi'=$$

$$=\int\limits_0^{\pi}\sin(\varphi')\psi_\Gamma(\varphi')d\varphi'-\int\limits_\pi^{0}\sin(\varphi'')\psi_\Gamma(\varphi'')d\varphi''=2\int\limits_0^{\pi}\sin(\varphi')\psi_\Gamma(\varphi')d\varphi'.$$

Таким образом, условие, при котором критическая точка совпадает с началом координат, имеет вид:

$$\int_0^{\pi} \sin(\varphi')\psi_\Gamma(\varphi')d\varphi' = 0 . \qquad (12)$$

Выражение (12) подтверждает правильность задания $\psi_\Gamma(\varphi)$ на интервале $(0,\pi)$ в виде знакопеременной функции (4) и устанавливает дополнительное ограничение на вид данной функции.

Полагая далее r/R малой величиной и разлагая подынтегральную функцию в формуле (6) в ряд с точностью до членов второго порядка, имеем

$$\psi(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi_\Gamma(\varphi')d\varphi' + \frac{r}{R}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos(\varphi-\varphi')\psi_\Gamma(\varphi')d\varphi' +$$
$$+\left(\frac{r}{R}\right)^2\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[2\cos^2(\varphi-\varphi')-1\right]\psi_\Gamma(\varphi')d\varphi'. \qquad (13)$$

Для краткости дальнейшего изложения обобщим полученные выше результаты вычисления интегралов, а именно: если некоторая функция $G(\varphi')$ обладает свойством

$$G(\varphi') = G(2\pi-\varphi') \text{ при } 0 \le \varphi' \le 2\pi , \qquad (14)$$

то

$$\int_0^{2\pi} G(\varphi')\psi_\Gamma(\varphi')d\varphi' = 0 ; \qquad (15)$$

если же эта функция обладает свойством

$$G(\varphi') = -G(2\pi-\varphi') \text{ при } 0 \le \varphi' \le 2\pi , \qquad (16)$$

то

$$\int_0^{2\pi} G(\varphi')\psi_\Gamma(\varphi')d\varphi' = 2\int_0^{\pi} G(\varphi')\psi_\Gamma(\varphi')d\varphi' . \qquad (17)$$

Справедливость выражений (15), (17) может быть показана на основе тех же преобразований, которые были использованы при выводе формул (7) и (12).

Рассмотрим первый интеграл в правой части выражения (13). В данном случае подынтегральная функция $G(\varphi')$ имеет вид $G(\varphi')$ = 1 и обладает свойством (14), следовательно, этот интеграл равен нулю.

Запишем в развернутой форме второй интеграл в правой части (13)

$$\int_0^{2\pi}\cos(\varphi-\varphi')\psi_\Gamma(\varphi')d\varphi' = \cos(\varphi)\int_0^{2\pi}\cos(\varphi')\psi_\Gamma(\varphi')d\varphi' + \\ + \sin(\varphi)\int_0^{2\pi}\sin(\varphi')\psi_\Gamma(\varphi')d\varphi'. \qquad (18)$$

В первом интеграле в правой части выражения (18) подынтегральная функция $G(\varphi') = \cos(\varphi')$ обладает свойством (14), следовательно, этот интеграл равен нулю. Второй интеграл в правой части (18) равен нулю в соответствии с условием (11).

Запишем в развернутой форме третий интеграл в правой части (13)

$$\int_0^{2\pi}\left[2\cos^2(\varphi-\varphi')-1\right]\psi_\Gamma(\varphi')d\varphi' = 2\cos^2(\varphi)\int_0^{2\pi}\cos^2(\varphi')\psi_\Gamma(\varphi')d\varphi' + \\ + 4\cos(\varphi)\sin(\varphi)\int_0^{2\pi}\cos(\varphi')\sin(\varphi')\psi_\Gamma(\varphi')d\varphi' + \\ + 2\sin^2(\varphi)\int_0^{2\pi}\sin^2(\varphi')\psi_\Gamma(\varphi')d\varphi' - \int_0^{2\pi}\psi_\Gamma(\varphi')d\varphi'. \qquad (19)$$

В правой части выражения (19) имеется четыре интеграла. В первом, третьем и четвертом интеграле подынтегральные функции $G(\varphi')$ обладают свойством (14), следовательно, данные интегралы равны нулю. Во втором интеграле подынтегральная функция $G(\varphi') = \cos(\varphi')\sin(\varphi')$ обладает свойством (16), и на основании (17) имеем

$$\int_0^{2\pi}\cos(\varphi')\sin(\varphi')\psi_\Gamma(\varphi')d\varphi' = 2\int_0^{\pi}\cos(\varphi')\sin(\varphi')\psi_\Gamma(\varphi')d\varphi'. \qquad (20)$$

Таким образом, выражение для функции тока (13) упрощается и с учетом (20) приобретает следующий вид

$$\psi(r,\varphi) = \left(\frac{r}{R}\right)^2\frac{8}{\pi}\cos(\varphi)\sin(\varphi)\int_0^{\pi}\cos(\varphi')\sin(\varphi')\psi_\Gamma(\varphi')d\varphi'. \qquad (21)$$

Проведем оценку интеграла в правой части выражения (21). С учетом (3) и теоремы о среднем значении [5] можно записать

$$\int_0^{\pi}\cos(\varphi')\sin(\varphi')\psi_\Gamma(\varphi')d\varphi' = \int_0^{\varphi^*}\cos(\varphi')\sin(\varphi')\psi_\Gamma(\varphi')d\varphi' + \\ + \cos(\overline{\varphi})\int_{\varphi^*}^{\frac{\pi}{2}}\sin(\varphi')\psi_\Gamma(\varphi')d\varphi' + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos(\varphi')\sin(\varphi')\psi_\Gamma(\varphi')d\varphi', \qquad (22)$$

где

$$\varphi^* < \overline{\varphi} < \frac{\pi}{2}. \tag{23}$$

Запишем интеграл (12) на таких же, как в (22), интервалах интегрирования

$$\int_0^{\varphi^*} \sin(\varphi')\psi_\Gamma(\varphi')d\varphi' + \int_{\varphi^*}^{\frac{\pi}{2}} \sin(\varphi')\psi_\Gamma(\varphi')d\varphi' + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(\varphi')\psi_\Gamma(\varphi')d\varphi' = 0. \tag{24}$$

Умножая (24) на $\cos(\overline{\varphi})$, выражая затем второй интеграл в (24) через остальные интегралы и подставляя полученное выражение в (22), имеем

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \cos(\varphi')\sin(\varphi')\psi_\Gamma(\varphi')d\varphi' &= \int_0^{\varphi^*} [\cos(\varphi') - \cos(\overline{\varphi})]\sin(\varphi')\psi_\Gamma(\varphi')d\varphi' + \\ &+ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} [\cos(\varphi') - \cos(\overline{\varphi})]\sin(\varphi')\psi_\Gamma(\varphi')d\varphi'.\end{aligned} \tag{25}$$

На основе того, что $\varphi' < \overline{\varphi}$ при $0 < \varphi' < \varphi^*$, а $\cos$ – строго монотонная (убывающая) на интервале $(0, \pi/2)$ функция, справедливо соотношение

$$\cos(\varphi') - \cos(\overline{\varphi}) > 0 \quad \text{при} \quad 0 < \varphi' < \varphi^*. \tag{26}$$

С учетом (4), (26) подынтегральная функция в первом интеграле в правой части (25) удовлетворяет неравенству

$$[\cos(\varphi') - \cos(\overline{\varphi})]\sin(\varphi')\psi_\Gamma(\varphi') > 0 \quad \text{при} \quad 0 < \varphi' < \varphi^*. \tag{27}$$

Подыинтегральная функция во втором интеграле в правой части (25) с учетом (4), (23) также удовлетворяет неравенству

$$[\cos(\varphi') - \cos(\overline{\varphi})]\sin(\varphi')\psi_\Gamma(\varphi') > 0 \quad \text{при} \quad \pi/2 < \varphi' < \pi. \tag{28}$$

На основе теоремы о среднем значении [5] с учетом (27), (28) получаем оценку для интеграла в левой части выражения (25)

$$\int_0^{\pi} \cos(\varphi')\sin(\varphi')\psi_\Gamma(\varphi')d\varphi' = C_1 > 0. \tag{29}$$

Аналогично можно провести оценку интеграла в левой части выражения (25), если вместо (4) принять "обратный" закон изменения $\psi_\Gamma(\varphi')$, а именно:

$$\begin{aligned}&\psi_\Gamma(\varphi') < 0 \ \text{при} \ 0 < \varphi' < \varphi^*,\\ &\psi_\Gamma(\varphi') > 0 \ \text{при} \ \varphi^* < \varphi' < \pi,\\ &\psi_\Gamma(\varphi^*) = 0.\end{aligned}$$

В этом случае получаем

$$\int_0^{\pi}\cos(\varphi')\sin(\varphi')\psi_\Gamma(\varphi')d\varphi' = C_2 < 0\,. \qquad (30)$$

В итоге, переходя в (21) к декартовым координатам $x = r\cos(\varphi)$, $y = r\sin(\varphi)$ и учитывая (29), (30), получаем

$$\psi(x, y) = Cxy\,,\ \ C \neq 0\,. \qquad (31)$$

2. Участок поверхности обтекаемого тела, на котором расположена критическая точка, представляет собой дугу окружности. Пусть R_w – радиус данной окружности, точка A – ее центр, O – критическая точка, как показано на рис. 3. Примем для определенности, что поверхность обтекаемого тела на рассматриваемом участке является выпуклой. Введем декартову прямоугольную систему координат Oxy с центром в критической точке. Построим также систему криволинейных координат $O\xi\eta$, связь координат ξ, η с прямоугольными декартовыми координатами x, y зададим выражениями

$$x = R_w e^{\xi/R_w}\sin(\eta/R_w), \qquad (32)$$

$$y = R_w e^{\xi/R_w}\cos(\eta/R_w) - R_w\,. \qquad (33)$$

Предлагаемая система криволинейных координат $O\xi\eta$ является модификацией полярной системы координат с центром в точке A, в последней положение любой точки B задается радиусом AB и углом OAB (рис. 3). В системе координат $O\xi\eta$ радиус AB выражается в виде $R_w e^{\xi/R_w}$, где величина ξ может изменяться в пределах $-\infty < \xi < +\infty$, а угол OAB выражается в виде η/R_w ($0 \le \eta \le 2\pi R_w$).

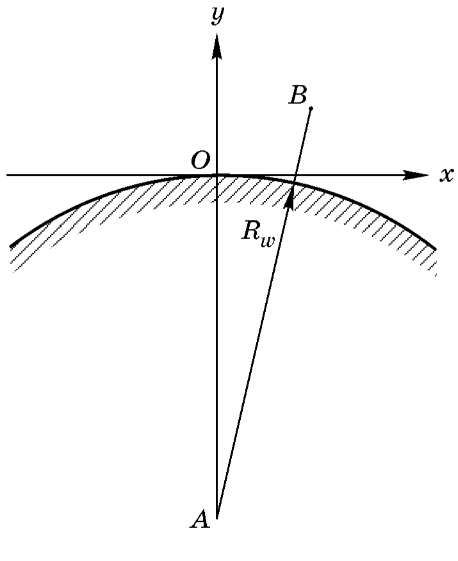

Рис. 3

Из выражений (32), (33) следует, что координатная линия $\xi = 0$ совпадает с поверхностью тела, а линия $\eta = 0$ совпадает с осью y декартовой прямоугольной системы координат Oxy, показанной на рис. 3. В критической точке O, где $x = y = 0$, имеем также $\xi = \eta = 0$.

Особенность предлагаемой системы координат $O\xi\eta$ состоит в том, что уравнение Лапласа в этих координатах имеет тот же вид, что и в прямоугольных декартовых координатах, а именно:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}=0\,. \tag{34}$$

Справедливость выражения (34) может быть показана обычным путем – дифференцированием функции тока ψ по декартовым и криволинейным координатам с использованием формул (32), (33).

Приведем соотношения, связывающие значения производных функции тока по декартовым координатам x, y и криволинейным координатам ξ, η в критической точке O

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_O=\left(\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)_O,\quad \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_O=\left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right)_O, \tag{35}$$

$$\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right)_O=\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}\right)_O+\frac{1}{R_w}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right)_O,\quad \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)_O=\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}\right)_O-\frac{1}{R_w}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right)_O,$$

$$\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}\right)_O=\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi\partial\eta}\right)_O-\frac{1}{R_w}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)_O. \tag{36}$$

Поскольку в критической точке $\partial\psi/\partial x=\partial\psi/\partial y=0$, из соотношений (35) и (36) имеем

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right)_O=\left(\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)_O=0\,, \tag{37}$$

$$\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right)_O=\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}\right)_O,\quad \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)_O=\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}\right)_O,\quad \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}\right)_O=\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi\partial\eta}\right)_O. \tag{38}$$

Таким образом, с учетом формы записи уравнения Лапласа для функции тока (34), соотношений (37) и условия, что координатная линия $\xi=0$ совпадает с поверхностью тела, задача нахождения разложения функции тока ψ в ряд по криволинейным координатам ξ, η с точностью до членов второго порядка формально эквивалентна задаче, рассмотренной в пункте 1 настоящей работы. В качестве пояснения данного рассуждения укажем, что на схеме, приведенной на рис. 2, можно заменить обозначение x на η, а y – на ξ. Исходя из этого, немедленно получаем

$$\psi(\xi,\eta)=C\,\xi\eta,\quad C\neq 0\,, \tag{39}$$

откуда с учетом (38) следуют соотношения (31).

Отметим, что приведенные в данном пункте рассуждения справедливы и в случае, если поверхность обтекаемого тела на рассматриваемом участке представляет собой дугу окружности и является вогнутой.

Выводы.

1. На основе интегральной формулы Пуассона показано, что в случае плоского безвихревого течения идеальной несжимаемой жидкости справедливо следующее утверждение: если критическая точка расположена на прямолинейном участке поверхности обтекаемого тела и в ней пересекаются только две линии тока $\psi = 0$, одна из которых совпадает с поверхностью тела, то разложение функции тока вблизи критической точки в ряд по декартовым координатам с точностью до членов второго порядка имеет вид $\psi(x,y) = Cxy$. При этом, в отличие от известного подхода к описанию данного течения, дополнительно показано, что константа C (значение смешанной производной $\partial^2\psi / \partial x \partial y$ в критической точке) отлична от нуля.

2. Предложена модификация полярной системы координат, на основе использования которой установлена справедливость приведенного выше утверждения в случае, когда участок поверхности обтекаемого тела, на котором расположена критическая точка, представляет собой дугу окружности.

3. Полученные результаты позволяют достаточно обоснованно задавать распределение скорости жидкости вблизи критических точек на поверхности профиля при решении обратных краевых задач гидродинамики решеток.

1. *Елизаров А. М.* Обратные краевые задачи аэродинамики. Теория и методы проектирования и оптимизации формы крыловых профилей / *А. М. Елизаров, Н. Б. Ильинский, А. В. Потапов.* – Магадан, 2006. – 436 с.
2. *Милн-Томсон Л. М.* Теоретическая гидродинамика: Пер. с англ. / *Л. М. Милн-Томсон* – М. : Мир, 1964 – 655 с.
3. *Ландау Л. Д.* Теоретическая физика. в 10 т. Т. 6, Гидродинамика */ Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц* – М. : Наука, 1986. – 736 с.
4. *Соломенцев Е. Д.* Гармоническая функция / *Е. Д. Соломенцев* // Математическая энциклопедия. В 5 т. Т.1. – М. : Советская энциклопедия, 1977. – С. 875 – 879.
5. *Корн Г.* Справочник по математике */ Г. Корн, Т. Корн.* – М. : Наука, 1978. – 832 с.

Институт технической механики
НАН Украины и НКА Украины,
Днепропетровск

Получено 26.05.08,
в окончательном варианте 8.01.09