УДК 621. 192:519.2

Е. С. ПЕРЕВЕРЗЕВ

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НАДЕЖНОСТИ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Обсуждаются вопросы оценки надежности технических систем на основе параметрических моделей отказов. Приведены соотношения для определения вероятности неразрушения элементов конструкций в зависимости от коэффициента запаса, который представляет собой отношение математических ожиданий несущей способности к нагрузке. Получены соотношения для оценки величины коэффициентов запаса в зависимости от требуемого значения вероятности неразрушения. Такие соотношения приведены как для статических моделей, описываемых случайными величинами, так и для динамических моделей, в которых несущая способность и нагрузка представляют собой случайные процессы. Значительное внимание уделяется спектральному анализу случайных процессов после преобразования их линейными операторами, в том числе построению доверительных интервалов для выходного процесса и для вероятности его пребывания в заданных границах

Problems of estimation of the reliability of technical systems are discussed on the basis of parametrical models of failure. Relations for definition of the nonfailure probability of structural elements are presented depending on the stock factor which represents the relation between expectation of the carrying capacity and the load. Relations for estimation of the value of stock factors are obtained depending on a required value of the nonfailure probability. Such relations are given both for the static models described by random variables and for dynamic models in which the carrying capacity and the load represent random processes. Much attention is placed on the spectral analysis of random processes after their transformation by operators, including construction of confidence intervals for an output process and for the probability of its stay in a given limit.

В статье обобщены результаты исследований отдела надежности и долговечности технических систем за последние 10 лет по развитию параметрических моделей надежности.

Для многих технических систем задаются требования по надежности. Среди показателей надежности наиболее часто используются показатели безотказности и долговечности. Для количественной оценки этих показателей используются различные модели надежности. Наиболее просто показатели безотказности определяются на основе биноминальной модели.

Если по результатам n испытаний наблюдалось m отказов, то оценка вероятности безотказной работы находится как

$$\widehat{P} = 1 - \frac{m}{n}. \qquad (1)$$

Нижняя доверительная граница P_H вероятности безотказной работы находится из уравнения Клоппера – Пирсона

$$\sum_{k=0}^{m} C_n^k \; P_H^{n-k} \left(1 - P_H\right)^k = 1 - \gamma , \qquad (2)$$

где γ – доверительная вероятность.

При $m = 0$ из уравнения (2) находим

$$P_H = \left(1 - \gamma\right)^{\frac{1}{n}} . \qquad (3)$$

Из (3) можно получить выражение для определения числа безотказных испытаний для подтверждения требуемого значения $P_{тр}$ нижней доверительной границы

$$n \geq \frac{\ln(1-\gamma)}{\ln P_{тр}}.$$

Для системы, состоящей из r параллельно соединенных элементов, соответственно получим

$$n \geq \frac{\ln(1-\gamma)}{r \ln\left[1-\left(1-P_{тр}\right)^{\frac{1}{r}}\right]}.$$

Биноминальное распределение выражается через F - распределение. Поэтому вместо уравнения (2) можно использовать следующее соотношение [1]

$$P_H = \frac{m+1}{n-m}\; F(x, \nu_1, \nu_2).$$

Значение $F(x, \nu_1, \nu_2)$ находится из таблиц F - распределения для уровня значимости $\alpha = 1-\gamma$ и числа степеней свободы $\nu_1 = 2\,(m+1)$, $\nu_2 = 2\,(n-m)$.

Заметим, что в биноминальной модели не используется информация о виде закона распределения наработки до отказа. Если использовать такую информацию, на основе биноминального распределения можно получить выражения для определения числа испытаний для различных законов распределения наработки до отказа.

Например, для распределения Вейбулла имеем [2, 3]

$$n \geq \frac{\ln(1-\gamma)}{\eta^{\beta}\,\ln\left(1-P_{тр}\right)}, \tag{4}$$

где $\eta = \frac{t_u}{t_0}$ – относительная длительность испытаний; t_u – длительность испытаний; t_0 – требуемое время работы технической системы.

Параметр β связан с коэффициентом вариации ν наработки до отказа следующим соотношением

$$\nu = \frac{\sqrt{\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right) - \Gamma^2\left(1+\frac{1}{\beta}\right)}}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)},$$

где $\Gamma\,(\ldots)$ – гамма-функция.

Для ускоренных испытаний выражение (4) принимает следующий вид

$$n \geq \frac{\ln(1-\gamma)}{\eta^{\beta}\;k\ln\left(1-P_{тр}\right)},$$

где k – коэффициент ускорения.

В настоящее время широко используются параметрические модели надежности. Наиболее распространенными из них являются модели «нагрузка – прочность», которые впервые начали применять при расчетах вероятности неразрушения элементов конструкций в задачах прочности.

Пусть R – несущая способность элемента конструкции, а Q – нагрузка, действующая на него. Если R и Q – случайные величины, то вероятность неразрушения P элемента конструкции можно определить так

$$P = P(R - Q > 0). \tag{5}$$

В общем случае для произвольных распределений вероятность неразрушения элемента конструкции определяется из выражений

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} F(y)\, g(y)\, dy,$$

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} [1 - G(x)]\, f(x)\, dx,$$

где $G(...)$, $g(...)$ – функция и плотность распределения несущей способности; $F(...)$, $f(...)$ – функция и плотность распределения нагрузки.

Здесь через x обозначена нагрузка, через y – несущая способность.

В случае, когда величины R и Q распределены по нормальному закону, находим

$$P = F(h),$$

$$h = \frac{\eta - 1}{\sqrt{\eta^2 v_R{}^2 + v_Q^2 - 2r\eta \nu_R \nu_Q}},$$

где $F(h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{h} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$ – функция стандартного нормального распределения; $\eta = \frac{M_R}{M_Q}$ – математическое ожидание коэффициента запаса; $v_R = \frac{\sigma_R}{M_R}$ – коэффициент вариации несущей способности; $v_Q = \frac{\sigma_Q}{M_Q}$ – коэффициент вариации эксплуатационной нагрузки; $M_R, M_Q, \sigma_R, \sigma_Q$ – математические ожидания и средние квадратические отклонения несущей способности и эксплуатационной нагрузки; r – коэффициент корреляции между случайными величинами R и Q.

Некоторые авторы коэффициент η определяют как отношение несущей способности R_m и нагрузки Q_m

$$\eta = \frac{R_m}{Q_m},$$

где R_m и Q_m – значения несущей способности и нагрузки, при которых наблюдаются максимумы на кривых плотностей распределения несущей способности и нагрузки.

Если несущая способность и нагрузка – независимые случайные величины, имеем

$$h = \frac{\eta - 1}{\sqrt{\eta^2 {v_R}^2 + v_Q^2}} . \qquad (6)$$

Решив уравнение (6) относительно η, запишем

$$\eta = \frac{1 + \sqrt{1 - \left(1 - h^2 {v_R}^2\right)\left(1 - h^2 {v_Q}^2\right)}}{1 - h^2 {v_R}^2} .$$

Для логарифмически нормального распределения несущей способности и нагрузки получим

$$P = F\left(\frac{\mu_R - \mu_Q}{\sqrt{{b_R}^2 + {b_Q}^2}}\right), \qquad (7)$$

где μ_R, b_R, μ_Q, b_Q – параметры логарифмически нормального распределения соответственно несущей способности и нагрузки.

Параметры μ и b следующим образом связаны с математическим ожиданием M и коэффициентом вариации v:

$$\mu = \ln M - \frac{\ln(1 + v^2)}{2},$$

$$b = \sqrt{\ln\left(1 + v^2\right)}.$$

При $v_R \le 0{,}3$; $v_Q \le 0{,}3$ выражение (7) можно приближенно представить так

$$P \approx F\left(\frac{\ln M_R - \ln M_Q}{\sqrt{{v_Q}^2 + {v_R}^2}}\right).$$

В этом случае

$$P \approx F(h),$$

$$h = \frac{\ln \eta}{\sqrt{{v_Q}^2 + {v_R}^2}} = \frac{\ln \eta}{v},$$

где $v = \sqrt{{v_R}^2 + {v_Q}^2}$.

После преобразований получим

$$\eta = \exp\left(v h_p\right).$$

Значение h_p находим из равенства

$$F(h_p) = P_{mp},$$

где P_{mp} – требуемое значение вероятности неразрушения элемента конструкции.

Из изложенного следует, что для нормального и логарифмически нормального распределений несущей способности и нагрузки удается получить аналитические выражения для коэффициента η. Для произвольных распределений несущей способности и нагрузки получить аналитические выражения не удается.

При неизвестных законах распределения несущей способности и нагрузки можно получить нижние оценки для вероятности неразрушения P на основе неравенства Чебышева и распределения Гермейера [3]. Для этого представим выражение (5) в виде

$$P = P(Z > 0), \tag{8}$$

где $Z = R - Q$.

На основе неравенства Чебышева оценку вероятности (8) запишем как

$$P \geq 1 - \frac{M_Z^2}{\sigma_Z^2}.$$

Если случайные величины R и Q независимые,

$$M^2(Z) = (M_R - M_Q)^2,$$

$$\sigma_Z^2 = \sigma_R^2 + \sigma_Q^2.$$

С учетом последних выражений имеем [2]

$$P \geq 1 - \frac{(M_R - M_Q)^2}{\sigma_R^2 + \sigma_Q^2}.$$

Введя коэффициенты η, ν_R и ν_Q, получим

$$P = 1 - \frac{(\eta - 1)^2}{\eta^2 \nu_R^2 + \nu_Q^2}.$$

Отсюда после решения квадратного уравнения находим необходимое значение η для обеспечения требуемой вероятности неразрушения

$$\eta_{mp} = \frac{1 + \sqrt{1 - \left(1 - \beta_{mp}\,\nu_R^2\right)\left(1 - \beta_{mp}\,\nu_Q^2\right)}}{1 - \beta_{mp}\,\nu_R^2},$$

где $\beta_{mp} = 1 - P_{mp}$.

Для усиленного неравенства Чебышева, которое применяется для унимодальных распределений, получим [3]

$$P \ge 1 - \frac{4}{9} \frac{(M_R - M_Q)^2}{\sigma_R^2 + \sigma_Q^2}$$

и, соответственно,

$$\eta_{тр} = \frac{1 + \sqrt{1 - \left(1 - \frac{9}{4}\beta_{тр}\,\nu_R^2\right)\left(1 - \frac{9}{4}\beta_{тр}\,\nu_Q^2\right)}}{1 - \frac{9}{4}\beta_{тр}\nu_R^2}.$$

Для распределения Гермейера имеем [2]

$$P \ge \frac{(M_R - M_Q)^2}{(M_R - M_Q)^2 + \sigma_R^2 + \sigma_Q^2}. \tag{9}$$

Потребное значение коэффициента η находим из выражения (9)

$$\eta_{тр} = \frac{\beta_{тр} + \sqrt{\beta_{тр}^2 - \left(\beta_{тр} - P_{тр}\,\nu_R^2\right)\left(\beta_{тр} - P_{тр}\,\nu_Q^2\right)}}{\beta_{тр} - P_{тр}\nu_R^2}.$$

Рассмотрим случай, когда несущая способность и нагрузка описываются случайными процессами. Вероятность неразрушения элемента конструкции в течение времени t в этом случае можно найти как

$$P = P\left[Y(\tau) - X(\tau) > 0, \quad \tau \in \overline{0, t}\right],$$

где $Y(t)$, $X(t)$ – соответственно случайные процессы, описывающие изменение во времени несущей способности $R(t)$ и нагрузки $Q(t)$.

Если процессы $Y(t)$ и $X(t)$ описываются гауссовскими стационарными процессами, получим следующие оценки [4, 5]

$$P(t) \ge F\left(\frac{M_R - M_Q}{\sigma}\right) - n_0 t \exp\left[-\frac{(M_R - M_Q)^2}{2\sigma^2}\right], \tag{10}$$

$$P(t) \le F\left(\frac{M_R - M_Q}{\sigma}\right) \exp\left\{-n_0 t \exp\left[-\frac{(M_R - M_Q)^2}{2\sigma^2}\right]\right\}. \tag{11}$$

Параметры σ и n_0 вычисляются по формулам

$$\sigma^2 = \sigma_R^2 + \sigma_Q^2 - 2R(0)\sigma_R\sigma_Q,$$

$$n_0 = \frac{1}{2\pi}\left[-\sigma_R^2\, r_1''(0) - \sigma_Q^2\, r_2''(0) + 2R''(0)\sigma_R\sigma_Q\right],$$

$$r_1''(0)=\left.\frac{d^2 r_1(\tau)}{d\tau^2}\right|_{\tau=0}, \quad r_2''(0)=\left.\frac{d^2 r_2(\tau)}{d\tau^2}\right|_{\tau=0}, \quad R''(0)=\left.\frac{d^2 R(\tau)}{d\tau^2}\right|_{\tau=0},$$

где $r_1(\tau)$, $r_2(\tau)$ – нормированные корреляционные функции процессов $Y(t)$ и $X(t)$; $R(\tau)$ – взаимная нормированная корреляционная функция между процессами $Y(t)$ и $X(t)$.

Выражение (10) дает нижнюю оценку для вероятности неразрушения, а выражение (11) – верхнюю оценку.

Для независимых процессов получим

$$P \geq F\left(\frac{M_R - M_Q}{\sqrt{\sigma_R{}^2 + \sigma_Q{}^2}}\right) - n_0 t \exp\left[-\frac{(M_R - M_Q)^2}{2\left(\sigma_R{}^2 + \sigma_Q{}^2\right)}\right], \tag{12}$$

$$P(t) \leq F\left(\frac{M_R - M_Q}{\sqrt{\sigma_R{}^2 + \sigma_Q{}^2}}\right) \exp\left\{-n_0 t \exp\left[-\frac{(M_R - M_Q)^2}{2\left(\sigma_R{}^2 + \sigma^2{}_Q\right)}\right]\right\}, \tag{13}$$

$$n_0 = \frac{1}{2\pi}\left[-\sigma_R^2\, r_1''(0) - \sigma_Q^2\, r_2''(0)\right].$$

Представим выражения (12) и (13) в следующем виде

$$P \geq F(h) - n_0 t \exp\left(-\frac{h^2}{2}\right), \tag{14}$$

$$P \leq F(h) \exp\left[-n_0 t \exp\left(-\frac{h^2}{2}\right)\right]. \tag{15}$$

Задавшись вероятностью неразрушения $P_{тр}$, из выражений (14), (15) можно найти потребное значение $\eta_{тр}$ для обеспечения требуемой вероятности неразрушения

$$P_{тр} = F\left(\frac{\eta_{тр} - 1}{\sqrt{\nu_Q^2 + \nu_R^2\, \eta_{тр}^2}}\right) - n_0 t \exp\left[-\frac{(\eta_{тр} - 1)^2}{2\left(\nu_Q^2 + \nu_R^2\right)}\right], \tag{16}$$

$$P_{тр} = F\left(\frac{\eta_{тр} - 1}{\sqrt{\nu_Q^2 + \nu_R^2\, \eta_{тр}^2}}\right) \exp\left\{-n_0 t \exp\left[-\frac{(\eta_{тр} - 1)^2}{2\left(\nu_Q^2 + \nu_R^2\right)}\right]\right\}. \tag{17}$$

При высоких значениях вероятности неразрушения

$$F\left(\frac{\eta-1}{\sqrt{{v_Q}^2+\eta^2{v_R}^2}}\right)\approx 1.$$

В этом случае выражения (16), (17) принимают вид

$$P_{mp}=1-n_0 t\exp\left[-\frac{(\eta_{mp}-1)^2}{2\left(\nu_Q^2+\nu_R^2\right)}\right], \tag{18}$$

$$P_{mp}=\exp\left\{-n_0 t\exp\left[-\frac{(\eta_{mp}-1)^2}{2\left(\nu_Q^2+\nu_R^2\right)}\right]\right\}. \tag{19}$$

Последние выражения позволяют получить аналитические зависимости для определения η_{mp}. В частности, из выражения (19) после двойного логарифмирования получим

$$\ln(-\ln P)=\ln N-\frac{(\eta-1)^2}{2\left({v_Q}^2+{v_R}^2\right)},$$

где $N=n_0 t$.

После преобразований запишем квадратное уравнение

$$a\eta^2+b\eta+c=0,$$

где $a=1+2{v_R}^2[\ln(-\ln P)-\ln n_0 t]$; $b=-2$; $c=1-2{v_Q}^2[\ln(-\ln P)-\ln n_0 t]$.

Решив квадратное уравнение, находим

$$\eta=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{a^2-4ac}}{2a}.$$

Подставив значения коэффициентов a, b, c, получим

$$\eta=\frac{1+\sqrt{\left(1+2{v_R}^2 d\right)^2+4\left(1+2{v_R}^2 d\right)\left(2{v_R}^2 d-1\right)}}{1+2{v_R}^2 d},$$

где $d=\ln(-\ln P)-\ln(n_0 t)$.

Из выражения (18) после логарифмирования и преобразования имеем

$$\eta_{mp}^2\left(1+2\ln\beta_{mp}\nu_R^2-2\ln N\nu_R^2\right)-2\eta+2\nu_Q^2\left(\ln\beta_{mp}-\ln N\right)=0,$$

где $\beta_{mp}=1-P_{mp}$, $N=n_0 t$.

Запишем решение квадратного уравнения в следующем виде

$$\eta=\frac{1+\sqrt{a_1^2-a_1 c_1}}{1+2{v_R}^2\left(\ln\beta_{mp}-\ln N\right)},$$

где $a_1 = 1 + 2\nu_R^2\left(\ln\beta_{тр} - \ln N\right)$; $c_1 = 2\nu_Q^2\left(\ln\beta_{тр} - \ln N\right)$.

Заметим, что коэффициент η зависит от длительности действия нагрузки *t*. В многомерном случае для коррелированных процессов значительно усложняется определение числа n_0. Выражение для определения n_0 приведено в [3].

Для логарифмически-нормального распределения ординаты процесса выражения (10), (11) записываются так

$$P \ge F\left(\frac{\mu_R - \mu_Q}{\sqrt{b_R{}^2 + b_Q{}^2}}\right) - n_0 t \exp\left[-\frac{(\mu_R - \mu_Q)^2}{2\left(b_R{}^2 + b_Q{}^2\right)}\right], \qquad (20)$$

$$P(t) \le F\left(\frac{\mu_R - \mu_Q}{\sqrt{b_R{}^2 + b_Q{}^2}}\right) \exp\left\{-n_0 t \exp\left[-\frac{\left(\mu_R - \mu_Q\right)^2}{2\left(b_R{}^2 + b^2{}_Q\right)}\right]\right\}. \qquad (21)$$

При $\nu_R \le 0{,}3$; $\nu_Q \le 0{,}3$ выражения (20), (21) можно приближенно представить так

$$P \ge F\left(\frac{\ln M_R - \ln M_Q}{\sqrt{\nu_R{}^2 + \nu_Q{}^2}}\right) - n_0 t \exp\left[-\frac{(\ln M_R - \ln M_Q)^2}{2\left(\nu_R{}^2 + \nu_Q{}^2\right)}\right], \qquad (22)$$

$$P \le F\left(\frac{\ln M_R - \ln M_Q}{\sqrt{\nu_R{}^2 + \nu_Q{}^2}}\right) \exp\left\{-n_0 t \exp\left[-\frac{\left(\ln M_R - \ln M_Q\right)^2}{2\left(\nu_R{}^2 + \nu^2{}_Q\right)}\right]\right\}. \qquad (23)$$

После преобразований выражения (22), (23) запишем так

$$P \ge F\left(\frac{\ln\eta}{\nu}\right) - n_0 t \exp\left[-\frac{(\ln\eta)^2}{2\nu^2}\right], \qquad (24)$$

$$P \le F\left(\frac{\ln\eta}{\nu}\right) \exp\left\{-n_0 t \exp\left[-\frac{(\ln\eta)^2}{2\nu^2}\right]\right\}, \qquad (25)$$

где $\nu^2 = \nu_R^2 + \nu_Q^2$.

Из этих выражений можно найти значение $\eta_{тр}$ для обеспечения требуемой вероятности неразрушения $P_{тр}$. При $F\left(\frac{\ln\eta}{\nu}\right) \approx 1$ после двойного логарифмирования выражения (25) получим

$$\ln\left(-\ln P\right) = \ln\left(n_0 t\right) - \frac{(\ln\eta)^2}{2\nu^2}.$$

Отсюда находим

$$\ln\eta = \nu\left\{2\left[\ln(n_0 t) - \ln\left(-\ln P_{mp}\right)\right]\right\}^{\frac{1}{2}}$$

или

$$\eta = \exp\left\{\nu\left[2(\ln(n_0 t)) - \ln\left(-\ln P_{mp}\right)\right]\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

При $F\left(\dfrac{\ln\eta}{\nu}\right) \approx 1$ из выражения (24) имеем

$$P_{mp} = 1 - N\exp\left[-\frac{\left(\ln\eta_{mp}\right)^2}{2\nu^2}\right].$$

Отсюда после преобразования получим

$$\ln\eta_{mp} = \nu\left[2\ln\frac{N}{\beta_{mp}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

или

$$\eta_{mp} = \exp\left\{\nu\left[2\ln\frac{N}{\beta_{mp}}\right]^{\frac{1}{2}}\right\}.$$

Заметим, что при проведении приближенных расчетов негауссовские процессы можно нормализовать [6]. Для этого в каждом сечении случайного процесса $X(t)$ все его значения располагаются в вариационный ряд: $x_1,..., x_k$, $x_{i+1} > x_i$, $i = \overline{1,k}$, k – число значений в сечении. Для каждого i-го значения вычисляется эмпирическая функция распределения $G_i = \dfrac{i}{k+1}$. Далее вычисляется квантиль нормальной функции распределения из равенства

$$F(u_i) = G_i,$$

где $F(...)$ – функция стандартного нормального распределения.

Вычисляются среднее значение $\hat{x}$ и среднее квадратическое отклонение s. Соответственно i-ое значение нормальной случайной величины y_i находится так:

$$y_i = \hat{x} + u_i s.$$

Такой способ нормализации негауссовских процессов является приближенным, но очень удобным при проведении инженерных расчетов.

Приведенные соотношения при известных значениях коэффициентов вариации позволяют определить значения коэффициента η в зависимости от требуемого уровня вероятности неразрушения.

При $t = 0$ из соотношений для случайных процессов можно получить выражения для оценки вероятности неразрушения для случая, когда несущая способность и нагрузка представляют собой случайные величины.

1. *Переверзев Е.* Испытания и надежность технических систем / *Е Переверзев, Ю. Даниев.* – Днепропетровск : ИТМ НАНУ и НКАУ, 1999. – 224 с.
2. *Переверзев Е. С.* Вероятностные распределения и их применение / *Е. С Переверзев, Ю. Ф. Даниев.* – Днепропетровск : ИТМ НАНУ и НКАУ, 2004. – 418 с.
3. Надежность технических систем / *Е. Переверзев , А. Алпатов, Ю. Даниев, П. Новак.* – Днепропетровск : Пороги, 2002. – 396 с.
4. *Переверзев Е. С.* Спектральный анализ случайных процессов в задачах точности и надежности / *Е. С. Переверзев* // Техническая механика. – 2007. – № 2. – С.80 – 91.
5. Эффективность научно-технических проектов и программ / *О. В. Пилипенко, Е. С. Переверзев, А. П. Алпатов и др.* – Днепропетровск : Пороги, 2008. – 509 с.
6. *Переверзев Е. С.* Актуальные задачи теории надежности и долговечности технических устройств / *Е. С. Переверзев* // Техническая механика. – 2006. – № 1. – С. 137 – 155.

Институт технической механики
НАН Украины и НКА Украины,
Днепропетровск

Получено 23. 07.08,
в окончательном варианте 16.09.08