

**КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕЧНО-СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ  
В МЕХАНИКЕ КОНСТРУКЦИЙ РАКЕТНО-КОСМИЧЕСКОЙ ТЕХНИКИ**

Проведен анализ и обобщение полученных в Институте технической механики НАН Украины и НКА Украины результатов в области теории контактных задач оболочечно-стержневых систем различного класса применительно к тонкостенным конструкциям ракетно-космической техники.

The results in the theory of contact problems of different shell and rod systems as applied to thin-walled structures of rocket and space technology, obtained at the Institute of Technical Mechanics, NASU&NSAU, are analyzed and generalized.

Локальные нагрузки и контактные взаимодействия тонкостенных оболочечно-стержневых конструкций ракет и космических аппаратов различного класса приводят к значительной концентрации напряжений, что позволяет отнести их к наиболее опасным для прочности, т.к. они могут вызвать преждевременное разрушение или появление недопустимых повреждений элементов конструкций. Возникающие при этом задачи прочности относятся к контактным задачам теории оболочек, стержней и их систем; они являются особенно актуальными в механике деформируемых твердых тел и конструкций. Рассмотрению разнообразных контактных задач теории тонкостенных оболочечно-стержневых систем посвящено значительное количество исследований [2, 3, 5, 6, 43 – 50].

Для конструкций ракетно-космической техники (РКТ) такие задачи возникают в ряде основных случаев эксплуатации: при старте, в полете – нагружение локальными нагрузками в местах крепления рам ракетных двигателей, в местах крепления различных конструктивных элементов (приборы, топливные емкости и др.), при хранении и транспортировке различными транспортными средствами, при технологических операциях изготовления. С точки зрения механики деформируемых твердых тел и конструкций это – сложные задачи напряженно-деформированного состояния (НДС), локальной устойчивости и механики разрушения. Существенно усложняются задачи при учете физической нелинейности материала: при пластических деформациях и ползучести. Учет этих факторов, характеризующих реальные процессы деформирования, необходим для реальной оценки прочности, т.к. без этого (при учете только упругой стадии деформирования) возможно неоправданное увеличение веса проектируемых систем РКТ [7, 17, 19]. Контактные взаимодействия и локальные нагрузки могут привести к появлению эксплуатационных дефектов – локальных геометрических несовершенств формы, искажающих первоначальную схему нагружения «идеальной» конструкции и могущих вызвать ускоренный выход конструкций из строя при эксплуатации. Их влияние должно быть оценено [7, 27, 53, 54, 58].

Дадим краткую характеристику основных результатов в этих актуальных разделах механики деформируемых твердых тел и прочности конструкций, полученных ИТМ НАНУ и НКАУ. Эти разработки относятся к основным направлениям исследований по прочности, проводимым в институте.

1. Конструкции ракет и космических аппаратов представляют собой сложные композиции из оболочек, пластин и ферменных систем различного класса (элементов), соединенных между собой. Рассматривая нагружение конструкций различными (в том числе локальными) нагрузками, следует

© В.С. Гудрамович, 2008

учитывать контактное взаимодействие элементов между собой. В местах действия локальных нагрузок, как правило, ставятся ребра жесткости (шпангоуты, стрингеры, накладки). В этом случае оболочки являются для ребер своеобразными основаниями, взаимодействие с которыми приводит к так называемым контактным задачам сопряжения. Имеются 2 основных подхода к решению таких задач [42]: вариационный – на основе принципа минимума потенциальной энергии (А. И. Лурье), расчленение конструкции на элементы – воздействие оболочек моделируется контактными усилиями (В. З. Власов). При решении дифференциальных уравнений, описывающих поведение элементов, постоянные интегрирования определяются из условий совместности деформаций [3, 9 – 11, 44 – 46]. При высоких уровнях нагружения элементов в них появляются пластические деформации. При определении НДС используются методы упругих решений, сводящие решения упругопластических задач к последовательности решений задач упругого деформирования (методы дополнительных нагрузок, переменных параметров упругости [11, 19]). Для неоднородного НДС границы областей упругого и пластического деформирования меняются в процессе нагружения, определение их – сложная задача.

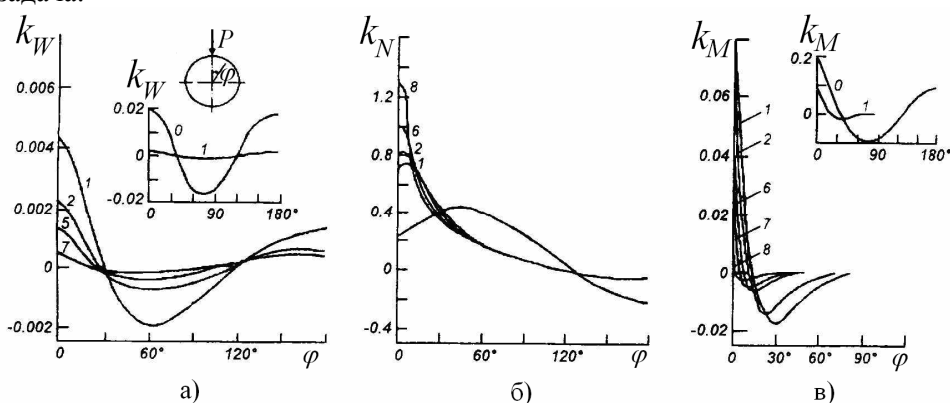


Рис. 1

Разнообразные контактные задачи сопряжения элементов оболочечно-стержневых тонкостенных конструкций РКТ рассмотрены в [9, 10, 38, 45, 46]. Приведем результаты решения задачи о воздействии на шпангоут, подкрепляющий стык сферического днища и цилиндрической оболочки (распорный шпангоут топливного бака ракеты), радиальной сосредоточенной силы. На рис. 1а – 1в показаны распределения коэффициентов  $K_M$ ,  $K_N$ ,  $K_W$  изгибающего момента  $M = K_M \cdot PR$ , продольной силы  $N = K_N \cdot P$  и радиального прогиба  $w = K_W \cdot PR^3/EI$  в шпангоуте, нагруженном радиальной силой  $P$  ( $R$  – радиус шпангоута,  $\varphi$  – угловая координата). Кривые 1, 2, 5–8 соответствуют изолированному шпангоуту (упругость оболочки не учитывается) и значению параметра, характеризующего жесткость днища  $2(1+\nu)EI/E_1hR^3$  соответственно 0,01; 0,005; 0,002; 0,001; 0,0005; 0,0001 ( $I$  – момент инерции при изгибе в плоскости шпангоута;  $E$ ,  $E_1$ ,  $\nu$  – модули упругости и коэффициент Пуассона материала шпангоута и днища;  $h$  – толщина днища). Здесь жесткостью цилиндрической оболочки пренебрегалось (при действии радиальной силы поддерживающее влияние этой оболочки по сравнению со сферической существенно меньше). Приведенные графические

зависимости показывают, что сферическое днище в значительной мере изменяет НДС шпангоута, существенно уменьшая  $M$  и  $w$  и перераспределяя  $N$ .

2. Если на элементы конструкции действуют локальные нагрузки, может произойти потеря устойчивости оболочек. Задачи локальной устойчивости сложны ввиду существенной неоднородности НДС, решение их обычно можно осуществить только на основе численных методов (конечных элементов, конечных разностей, локальных вариаций – МЛВ). Эффективным является МЛВ, особенностью которого является возможность автоматического сгущения сетки в районе концентрации напряжений. МЛВ – численный метод решения вариационных задач, разработанный Ф. Л. Черноусько. В [30, 31, 34] разработаны схемы расчета критических усилий, основанные на определении перемещений, дающих минимальное значение функционалу энергии (расположение и форма локальной вмятины при потере устойчивости задается, при этом привлекаются экспериментальные данные).

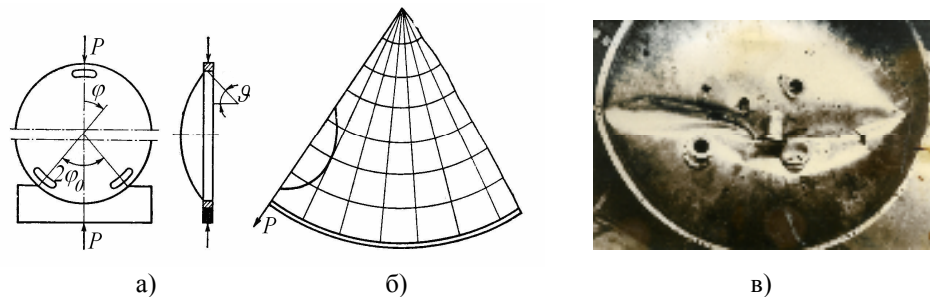


Рис. 2

На рис. 2а показаны схематично формы вмятин при локальной потере устойчивости сферической оболочки, подкрепленной шпангоутом, нагруженной седловой опорой (ложементом) и сжимаемой радиальной силой. На рис. 2б – схема разбиения оболочки сеткой и локальная вмятина в случае потери устойчивости при растяжении силой. Отметим, что в этом случае потеря устойчивости происходит вследствие достижения кольцевыми напряжениями их критических значений (для рис. 2а – меридиональными напряжениями). На рис. 2в приведены результаты эксперимента, которые характеризуют указанный эффект для сферического днища топливного бака реальной ракеты при растяжении радиальными силами.

При определении критических нагрузок на основе МЛВ проводится минимизация функционала энергии. При этом проводится его дискретизация, оболочка разбивается на ячейки и определяются перемещения, при которых функционал минимален. В рассматриваемом случае заранее выбирается направление поиска, размеры ячеек меняются (они уменьшаются вблизи расположения локальных вмятин).

На рис. 3а показаны формы локальной потери устойчивости моделей сплошных сферических оболочек, подкрепленных шпангоутами, при нагружении опорой (ложементом). Эти формы различны в зависимости от угла охвата ложементом и его жесткости. На рис. 3б показаны такие формы для оболочки с центральным отверстием. При определенных размерах отверстия потеря устойчивости происходит вначале у края отверстия – в районе максимальной концентрации напряжений, и затем в районе приложения нагрузки – на краю оболочки. Такие эффекты определяются особенностями поведения

под нагрузкой других неоднородных тонкостенных систем [53]. Испытания проведены на специальной установке, позволяющей исследовать локальную устойчивость колец и оболочек при произвольных радиальных нагрузках [31, 32, 34], процесс потери устойчивости исследовался при этом с помощью высокоскоростной киносъемки [33].

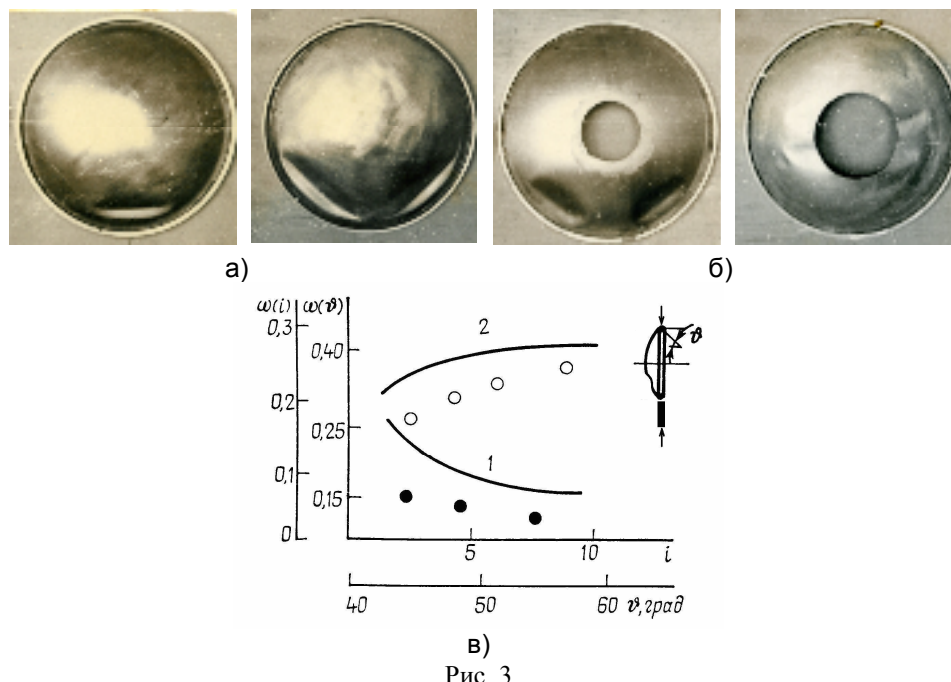


Рис. 3

На рис. 3в показаны результаты теоретического определения критических усилий локальной потери устойчивости (схема нагружения на рис. 2а) для сферической оболочки, подкрепленной шпангоутом [30, 34]. Укажем, что НДС здесь определено в результате решения «двойной» контактной задачи: оболочка – шпангоут – опора (ложемент) (см. раздел 3). Кривая 1 и зачерненные кружки соответствуют зависимости критического параметра  $\omega = P_*/Eh^2$  ( $P_*$  – критическая сила) от угла  $\vartheta$  (испытано 15 оболочек); кривая 2 и светлые кружки – зависимости  $\omega$  от  $i = 10^7 \cdot I / (R \sin \vartheta)^4$  (испытано 25 оболочек). Нагружение осуществлялось двумя симметрично расположенными ложемен- тами с углом охвата  $2\varphi_0 = 90^\circ$ . Кружки определяют усредненные экспери- ментальные данные. Испытанные оболочки изготовлены штамповкой из сплавов АМГ-6М и АД-1, диапазоны параметров оболочек:  $R/h = 400 - 800$ ,  $\vartheta = 40^\circ - 60^\circ$ ,  $R = 0,0935$  м. В экспериментах отмечен рост  $P_*$  с увеличением  $2\varphi_0$  (при малых  $2\varphi_0$  образуется одна локальная эллипсоидальная вмятина, при больших две – в зонах, близких к краям площадок контакта). Отметим, что экспериментальные данные, качественно подтверждая теоретические решения, дают значения  $P_*$  на 20÷35 % ниже расчетных. Такое расхождение можно оправдать повышенной чувствительностью моделей оболочек к неиз- бежным геометрическим несовершенствам и погрешностям эксперимента при локальном нагружении.

Укажем на возможность ускорения машинного времени расчета критических усилий за счет построения проекционно-вариационных модификаций МЛВ [4].

При импульсном локальном нагружении возникают задачи динамической локальной устойчивости [1, 14]. Решения таких задач при упругом и пластическом деформировании материала элементов конструкций связано с построением и анализом областей динамической неустойчивости (при решении уравнений Матье).

3. Близкими к классическим постановкам являются контактные задачи для оболочечно-стержневых конструкций РКТ, нагруженных штампами – седловыми опорами (ложементами). Эти случаи соответствуют транспортировке и хранению конструкций РКТ. Указанные штампы обладают различными механическими свойствами, их поведение может быть описано различными моделями оснований (Вигхарда, Хорваза, Винклера, В. З. Власова, Б. Г. Коренева, Г. Б. Муравского, многослойной, упруго-вязкопластической и др.). Среди таких моделей к наиболее распространенным относятся модели Винклера (контактное давление  $\bar{p}(\varphi)$  пропорционально радиальному прогибу  $w$ ) и модель В. З. Власова, учитывающая распределительные свойства ( $\bar{p}(\varphi)$  пропорционально сумме членов, содержащих  $w$  и вторую производную от  $w$  – с соответствующими коэффициентами). Поведение опоры может быть описано конечно-элементной моделью [45].

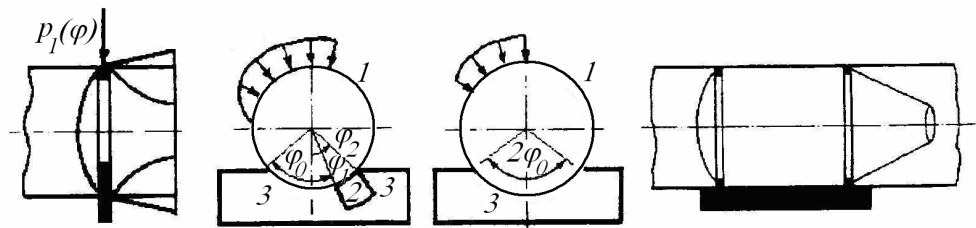


Рис. 4

На рис. 4 изображены некоторые возможные схемы контактного взаимодействия конструкций РКТ с опорами-ложементами (сплошными или имеющими несколько площадок контакта, локальными или протяженными по части длины).

Построение схем определения контактного давления основано на методологии теории тригонометрических рядов. Дадим краткое описание такой схемы для локальной опоры (ложемента) в месте расположения шпангоута, подкрепляющего произвольную систему оболочек (разнообразные конструктивные варианты опор и оболочечно-стержневых конструкций РКТ рассмотрены в [42, 45 – 47]). Представим прогиб шпангоута и радиальную нагрузку на него, которая определяется в результате решения контактной задачи, в виде рядов Фурье

$$w(\varphi), p(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} [(w_{cn}, p_{cn}) \cos n\varphi + (w_{sn}, p_{sn}) \sin n\varphi], \quad (1)$$

а связь между коэффициентами Фурье  $w_n$ ,  $p_n$  и  $\tau_n$  (тангенциальная нагрузка) в виде  $w_n = \alpha_n (np_n + \tau_n)$ , где  $\alpha_n = \frac{R^4}{E_n I_n (n^2 - 1)^2 (1 + \beta_n)}$ ,  $\beta_n$  – коэффициент,

учитывающий упругость прилегающих к шпангоуту оболочек [9, 42, 45 – 47]. Для модели основания Власова, применяя процедуру построения рядов Фурье для функций, имеющих разные выражения на разных участках изменения  $\varphi$  (участки, где действует только внешняя нагрузка  $p_1(\varphi)$ , и участки, где – эта нагрузка и контактное давление), получим бесконечные системы уравнений для  $p_{cn}$ ,  $p_{sn}$ ,  $w_{cn}$ ,  $w_{sn}$ , регулярность которых показана для широкого диапазона параметров конструкций

$$\begin{aligned} \sum_{k=0} a_{k1} w_{c1} + \sum_{k=0} \sum_{n=0} a_{kn} p_{1cn} + \sum_{k=0} b_{k1} w_{s1} + \sum_{k=0} \sum_{n=2} b_{kn} p_{1sn} &= p_{ck}; \\ \sum_{k=1} c_{k1} w_{c1} + \sum_{k=0} \sum_{n=0} c_{kn} p_{1cn} + \sum_{k=0} d_{k1} w_{s1} + \sum_{k=0} \sum_{n=2} d_{kn} p_{1sn} &= p_{sk}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $p_{1cn}$ ,  $p_{1sn}$  – коэффициенты Фурье разложения внешней нагрузки.

Коэффициенты  $(a, b, c, d)_{ij}$  определены в [42, 45 – 47]. Приведем некоторые из них

$$\begin{aligned} a_{01} &= C(2 \sin \varphi_0 - \sin \varphi_1 + \sin \varphi_2); \\ a_{kn} &= 0,5 C_n a_n [2\varphi_0 - \varphi_1 + \varphi_2 + 0,5k^{-1} (2 \sin 2k\varphi_0 - \sin k\varphi_1 + \sin k\varphi_2)] + \pi; \\ b_{kn} &= 0,5 C_n a_n \left\{ (n-k)^{-1} [\cos(n-k)\varphi_1 - \cos(n-k)\varphi_2] + \right. \\ &\quad \left. + (n+k)^{-1} [\cos(n+k)\varphi_1 - \cos(n+k)\varphi_2] \right\}; \\ c_{k1} &= 0,5 C_n a_n \left\{ (k-1)^{-1} [\cos(k-1)\varphi_1 - \cos(k-1)\varphi_2] + \right. \\ &\quad \left. + (k+1)^{-1} [\cos(k+1)\varphi_1 - \cos(k+1)\varphi_2] \right\}; \\ d_{kk} &= 0,5 C_k a_n [2\varphi_0 - \varphi_1 + \varphi_2 - 0,5k^{-1} (2 \sin 2k\varphi_0 - \sin 2k\varphi_1 + \sin 2k\varphi_2)] + \pi; \\ C &= C_1 + C_2, C_k = C_1 + k^2 C_2 \text{ для модели Власова; } \bar{p} = C_1 w - C_2 w'' . \end{aligned} \quad (3)$$

Для симметричного деформирования (это может быть в случае сплошной опоры или при центральном вырезе) решение разделяется на симметричное и несимметричное и имеем две различные системы уравнений для определения  $p_{cn}$ ,  $w_{cn}$  и  $p_{sn}$ ,  $w_{sn}$ .

Ввиду регулярности систем уравнений для определения коэффициентов Фурье, возможно их редуцирование (при решении ограничиваемся конечным числом уравнений, число их  $N$  выбирается, например, из условия:  $[p_N(\varphi) - p_{(N-1)}(\varphi)] [p_N(\varphi)]^{-1} < \varepsilon$  ( $\varepsilon$  – заданное малое число)). Решения различных задач контактного взаимодействия для оболочечно-стержневых конструкций и опор (ложементов) приведены в [42, 45 – 47, 55, 56], где, в част-

ности, приводятся многочисленные графики распределения  $\bar{p}(\varphi)$ . На рис. 5 приведены некоторые графические зависимости для  $\bar{p} = p - p_1$ .

Рис. 5а дает зависимости для  $\bar{p}$  в случае опирания цилиндрической конструкции на опору (ложемент) с различными углами охвата  $\varphi_0$  в месте расположения шпангоута. Параметр, определяющий жесткость конструкции  $a = [3(1 - \nu_1^2)]^{\frac{3}{4}} E_1 h^3 R \sqrt{Rh^{-1}} (EI)^{-1}$ , равен 0,5.

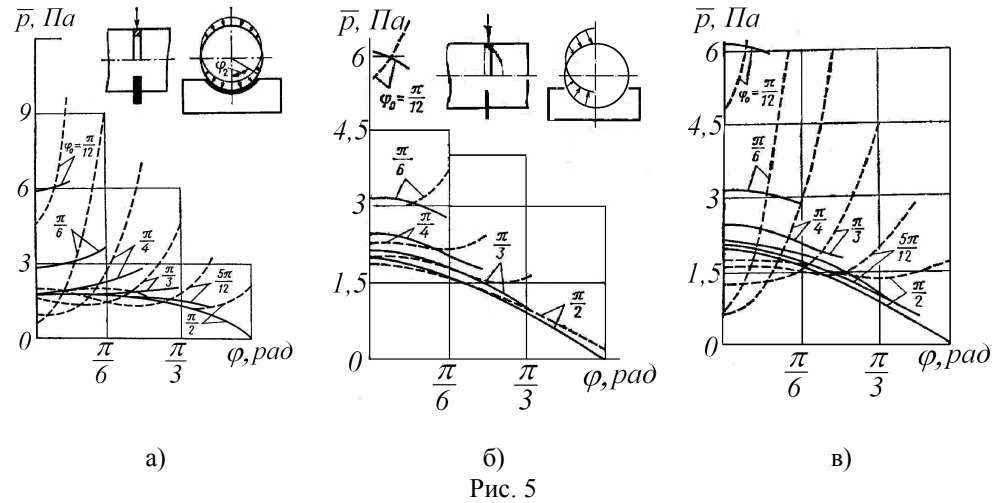


Рис. 5

Рис. 5б дает  $\bar{p}$  при опирании на опору в месте расположения распорного шпангоута топливного бака, подкрепляющего сферическое днище и цилиндрическую оболочку. Параметр, определяющий жесткость конструкции  $\bar{\delta} = \frac{1}{2} E_1 h_1 R^3 [(1 + \nu) EI]^{-1}$ , равен 2500;  $\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$ . Сплошные и штриховые линии соответствуют параметрам жесткости опоры  $b = C_1 R^4 (EI)^{-1}$ , равным 50 и 500 для рис. 3а и 50 и 1000 для рис. 3б (взята модель основания Власова:  $\bar{p} = C_1 w - C_2 w''$ ,  $C_1$  определено для упругого слоя высотой  $2 \cdot 10^{-2}$  м [45]).

Рис. 5в показывает распределение  $\bar{p}$  для бесконечной цилиндрической оболочки (штриховые линии) и сферического днища (сплошные линии) при одной и той же жесткости опоры ( $C_1 = 5$  МПа,  $C_2 = 510$  Па) для параметров  $R = 1$  м;  $h = 2 \cdot 10^{-3}$  м;  $\nu_1 = 0,3$ ;  $\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$ ,  $I = 3 \cdot 10^{-7}$  м<sup>4</sup>.

Анализ графиков показывает, что увеличение жесткости опоры приводит к возрастанию неравномерности контактного давления, которое на краях зон контакта увеличивается. Уменьшение жесткости конструкций аналогично увеличению жесткости опоры –  $\bar{p}$  на краях зон контакта возрастает. Эти эффекты подтверждены экспериментальными данными, полученными методами фотоупругости [28, 29, 44 – 46] (см. также рис. 3а).

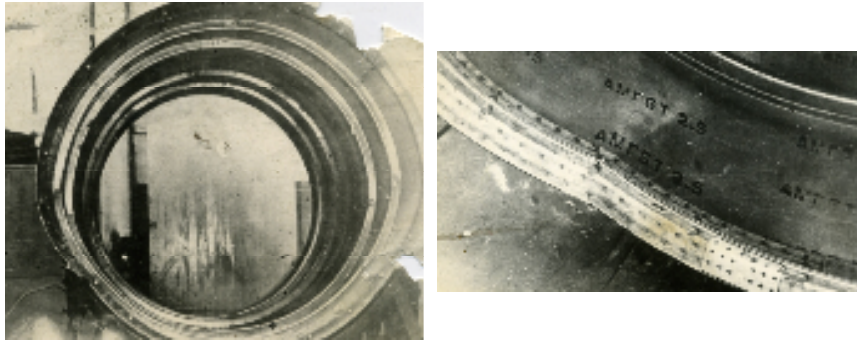


Рис. 6

Рис.6 показывает изменение формы оболочечной конструкции при опирании на опору (ложемент) и начало разрушения шпангоута (вид изнутри), что качественно также подтверждает эффект возрастания контактного давления на краях зон контакта.

Укажем, что локализация контактного давления в большей степени проявляется для металлических конструкций (при малом влиянии сдвиговой жесткости материала). При использовании моделей теории оболочек, учитывающих большее влияние сдвиговой жесткости (это необходимо для композиционных материалов [49]), эти эффекты (локализация  $\bar{p}$  на краях зон контакта) в теоретических решениях проявляются в меньшей степени. При учете пластических деформаций в рассматриваемых контактных задачах используются методы упругих решений [20, 41, 45]. Укажем на один из эффектов таких решений – появление пластических деформаций в элементах конструкции и, как следствие, эффекты локализации  $\bar{p}(\varphi)$  на краях зон контакта. Отметим, что в первой работе [37], посвященной рассматриваемым задачам, для абсолютно жесткого основания и кольца была введена схема нагружения, учитывающая указанные эффекты – сосредоточенные силы на краях зон контакта и отход кольца от основания. Эти эффекты (отход конструкции) обнаружены при решении разнообразных задач контактного взаимодействия – появление отрицательного  $\bar{p}$  в теоретических расчетах [45].

Представляет интерес анализ влияния различных моделей основания для опоры [40, 45].

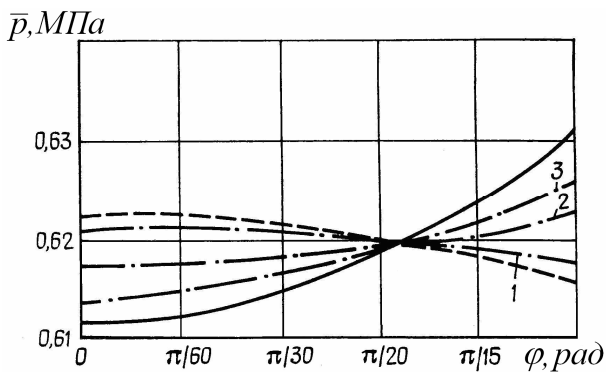


Рис. 7

На рис.7 штриховая, сплошная и штрихпунктирные кривые соответствуют распределению контактного давления для моделей Винклера, однослойной и двухслойной Власова. Укажем, что двухслойная модель состоит из двух слоев, суммарное перемещение равно  $w_1 + w_2$ ,

где перемещение верхнего  $w_1$  и нижнего  $w_2$  слоев выражаются через функцию  $\rho$  и параметры:  $w_1 = (C_0 + C_1)\rho - C_2\rho''$ ,  $w_2 = C_0\rho(\varphi)$ , для однослойной



модели  $w = w_1$ ,  $C_0 = 0$ . По оси ординат отложено  $\bar{p}$  (отметим, что отсчет  $\bar{p}$  начинается с 0,61), по оси абсцисс угол охвата опоры, кривые 1-3 соответствуют  $k_1/k_0 = 0,025; 0,25; 0,5$ . При использовании конечноэлементной модели основания и решении контактных задач на основе метода конечных элементов применение проекционно-итерационных модификаций метода позволяет значительно снизить машинное время расчета [21].

Выше рассмотрены контактные задачи для локальной опоры (ложемента). Такие опоры могут иметь протяженность по длине конструкции. В этом случае схемы решения усложняются, используются двойные тригонометрические ряды [45]. При исследованиях обнаружены такие же эффекты, как и для локальных опор (в частности, локализация контактного давления на краях зон контакта).

Локализация контактного давления имеет принципиальное значение при оценке прочности конструкций, опираемых на опоры (ложементы). Она может привести к локальной потере устойчивости, разрушению или появлению остаточных деформаций, которые затрудняют или делают невозможной дальнейшую эксплуатацию конструкций.

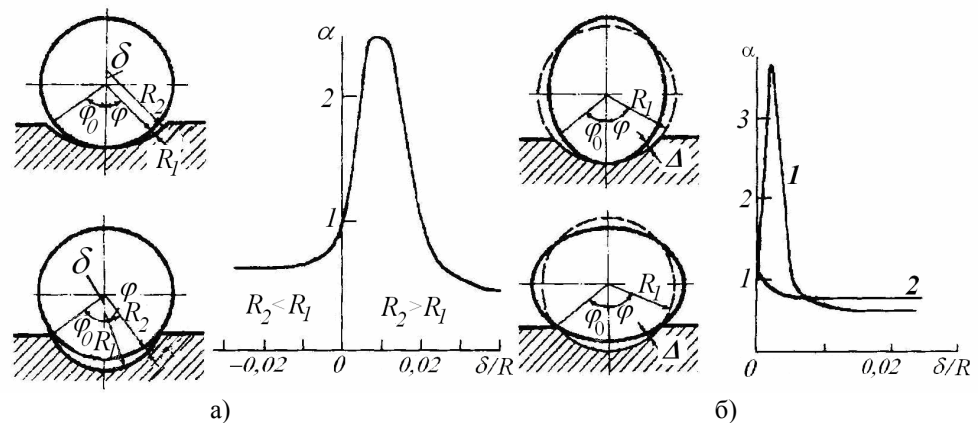


Рис. 8

Представляет значительный интерес оценка локальных геометрических дефектов в месте контакта оболочечной конструкции и опоры (ложемента). Если задать такие дефекты в виде массива дополнительных радиальных прогибов  $w_0$ , в выражении (1) и в последующих выкладках вместо  $w_{cn}$ ,  $w_{sn}$  будет  $w_{cn} + w_{cn}^0$ ,  $w_{sn} + w_{sn}^0$ , где  $w_{cn}^0$ ,  $w_{sn}^0$  определяются при построении рядов Фурье, описывающих конкретные геометрические дефекты (несовершенства формы). Такие дефекты могут дать значительные отклонения формы, в частности, круговое сечение в месте опирания конструкции на опору (ложемент) превращается в овальное. Это дает дополнительную локализацию контактного давления [10, 21, 36, 52]. Приведем некоторые результаты соответствующих исследований. Рассмотрим шпангоут, подкрепляющий оболочечную конструкцию. Критическое состояние системы характеризуется локальной потерей устойчивости подкрепленной оболочки (например, сферической).

На рис. 8а приведены результаты для случая контакта конструкций и опоры (ложемента) с различными диаметрами круговых сечений конструкций и ложемента. На рисунке показано изменение параметра  $\alpha = P_*/P_{*0}$  ( $P_*$  –

критическая локальная нагрузка,  $P_{*0}$  – критическая нагрузка при равномерном сжатии системы оболочка – шпангоут) в зависимости от параметра  $\delta = R_2 - R_1$  ( $R_1, R_2$  – радиусы конструкции и ложемент). На рис. 8б даны результаты для случая контакта овальной (в месте контакта) конструкции (начальная форма опираемого шпангоута  $w = a \cos 2\varphi$ ) и круговой опоры (ложемента). Кривая 1 соответствует опиранию конструкции частью с большей кривизной, кривая 2 – с меньшей. При  $R_2 > R_1$   $\Delta = \delta(1 - \cos \varphi)^{-1}$ , при  $R_2 < R_1$   $\Delta = \delta(\cos \varphi / \cos \varphi_0 - 1)$ .

При исследовании ферменных конструкций РКТ, имеющих отклонения прямолинейной формы и остаточные напряжения, полученные в результате предварительного нагружения, целесообразно построение модели стержня, эквивалентного по жесткости стержню с несовершенствами формы и остаточными напряжениями [27, 53, 57].

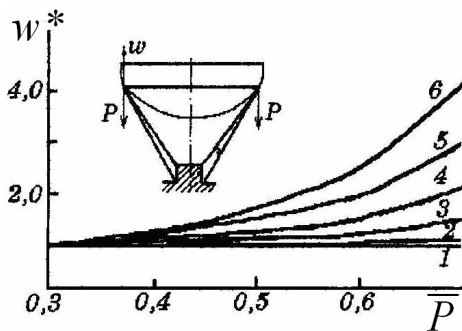


Рис. 9

На рис.9 показаны результаты исследования деформирования стержневой системы, на которую укреплен космическая зеркальная антенна. Отметим, что это результаты конкретных исследований реальных конструкций цельнометаллических космических антенн, созданных на основе разработанных нами в ИТМ НАНУ и НККАУ безотходных технологий изготовления конструкций устройств антенно-волноводной техники и солнечной энергетики [8, 18, 23].

Использование таких конструкций приводит к различным задачам локального нагружения и контактного взаимодействия [18, 34].

По оси ординат на рис. 9 отложен параметр  $w^* = w/w^0$  ( $w$  – перемещение в местах приложения сил  $P$ ,  $w^0$  – перемещение в случае отсутствия начальных прогибов:  $f^0 = 0$ , где  $f^0$  – амплитудное значение начального прогиба), по оси абсцисс – параметр  $\bar{P} = P/P_*$  ( $P_*$  – предельная нагрузка стержня). Кривые 1 – 6 соответствуют  $\bar{f} = f^0/H$ , равным соответственно 0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5 ( $H$  – высота сечения стержня).

Разнообразные аспекты влияния локальных конструктивных дефектов рассмотрены в [27, 53, 57, 58].

4. Как отмечено выше, при высоких уровнях нагрузок в элементах конструкции возникают пластические деформации. Для сравнительно однородного НДС оценка несущей способности может быть связана с определением упругопластического НДС и сравнением максимальных интенсивностей деформаций с допустимыми  $[\varepsilon_i]$  (или максимальных интенсивностей напряжений с допустимыми). Сравнение по деформациям более логично; так, если для материалов с малым упрочнением (типа алюминий-магниевого сплава)  $[\varepsilon_i]$  больше  $\varepsilon_{is}$  (интенсивность деформации, соответствующая пределу теку-

части  $\sigma_{is}$ ) в несколько раз, то  $\sigma_{is}$  больше  $[\sigma_i]$  (в качестве  $[\sigma_i]$  может быть взято  $\sigma_g$ ) всего лишь в 1,15÷1,25 раз. Однако для существенно неоднородного НДС, возникающего в контактных задачах оболочечно-стержневых систем РКТ, достижение  $\varepsilon_{i\max}$  или  $\sigma_{i\max}$  их допустимых значений не означает исчерпания несущей способности. Происходит перераспределение НДС, в сечениях, где осуществляется деформирование за пределами упругости ( $\sigma_i > \sigma_{is}$ ), рост напряжений здесь происходит медленней, чем там, где деформации упругие. Исчерпание несущей способности характеризуется достижением некоторого механизма разрушения, связанного с образованием пластических зон (для модели идеального упругопластического тела это линейные или локальные пластические шарниры).

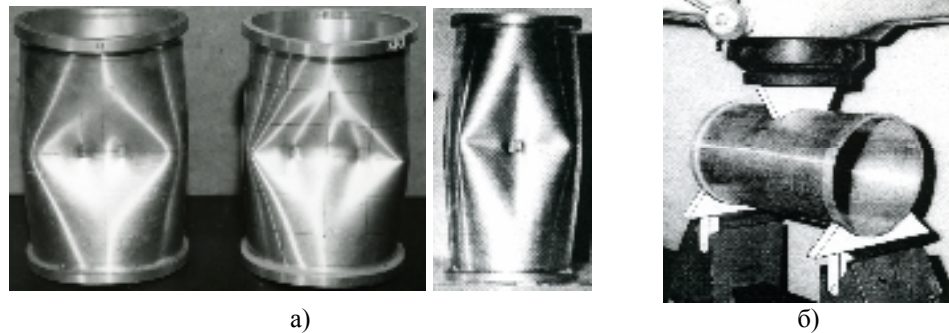


Рис. 10

Рис. 10а показывает конфигурации форм разрушения при нагружении цилиндрической оболочки штампом – это соответствует нагружению опорой (ложементом) – рис.10б. Образованию такой конфигурации соответствует достижение предельной нагрузки, дальнейшее повышение ее приводит к разрушению системы. Указанная схема достижения предельных нагрузок реализуется на основе теории предельного равновесия – раздела теории пластичности [16, 19, 26]. Предельная нагрузка определяется из уравнения скоростей виртуальных работ:  $A = D$ , где  $A$  – скорость изменения внешней нагрузки,  $D$  – скорость диссипации энергии при пластическом деформировании.

Уместно отметить, что именно такой подход (расчет по допустимым нагрузкам) осуществлен в первой работе по теории прочности. (Такой работой, «знаменующей возникновение науки о прочности», С. П. Тимошенко в книге «История науки по сопротивлению материалов» (М.: Гостехиздат, 1957 г.) называет работу Г. Галилея, опубликованную в 1638 г., где рассматривалась прочность консольной балки, нагруженной на краю силой). Лишь впоследствии при развитии теории упругости (Навье, Коши) перешли к расчету по допустимым напряжениям, приводящему к завышению веса рассчитываемых элементов конструкций [26, 28]. К идеям расчета по допустимым нагрузкам возвращались на разных этапах развития наук о прочности.

При решении сложных задач локального нагружения и контактного взаимодействия анализируются возможные формы разрушения (при их построении привлекаются экспериментальные данные). Параметры, определяющие конфигурацию пластических зон, находятся в результате решения соответствующих задач математического программирования.

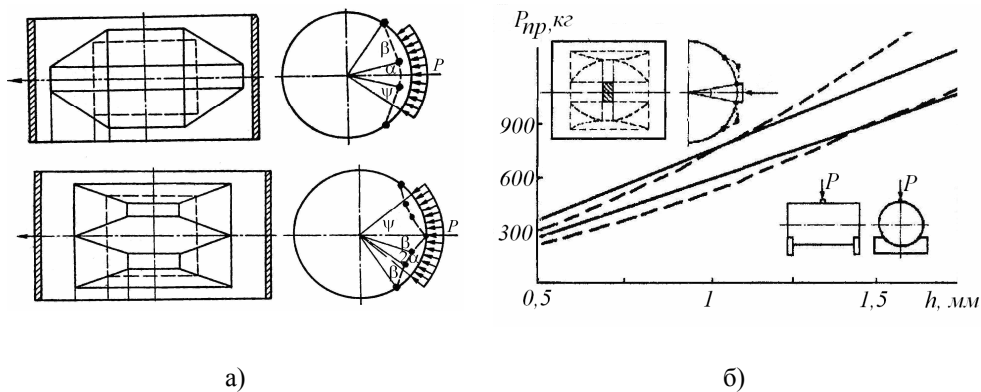


Рис. 11

Рис. 11а дает возможные конфигурации форм пластического разрушения при нагружении шарнирно-опертой цилиндрической оболочки нормальной радиальной нагрузкой. Место ее приложения (квадрат) отмечено на рисунке пунктиром. Прямые линии – линейные пластические шарниры (точки их пересечения с поперечным сечением посередине оболочки выделены на рисунке справа). В процессе предельного анализа определяется положение шарниров (углы  $\alpha$ ,  $\beta$  и размеры пластических зон по длине оболочки). В качестве предельной нагрузки, характеризующей несущую способность оболочки, принимается ее минимальное значение.

В [12, 13, 15, 24 – 26, 51] приведены многочисленные решения задач предельного анализа для статических и динамических задач локального нагружения и результаты экспериментальных исследований. Приведем результаты для одной из задач локального нагружения [16, 26, 51]. На рис.11б пунктирные линии дают теоретическое решение, сплошные – усредненные значения несущей способности для 37 оболочек из АМГ-6М, нагруженных штампами с углами охвата  $5^\circ$  и  $25^\circ$  (соответственно верхние и нижние кривые). Параметры оболочек  $R/h = 33 \div 133$ , длина 0,1 м. Достаточно хорошее совпадение результатов теоретических и экспериментальных исследований отмечается для этой и других задач локального нагружения и контактных взаимодействий.

Поведение оболочечно-стержневых конструкций при локальных нагрузках и контактных взаимодействиях, которые приводят к неоднородному НДС элементов конструкции, делает естественной и целесообразной постановку задач оптимального проектирования. При этом определяются формы переменных сечений элементов, наилучшим образом воспринимающие указанные нагружения. При весовой оптимизации эффективными являются методы теории оптимальных процессов. Не касаясь этих специальных вопросов, отметим работы [22, 27], где описаны результаты оптимизации элементов конструкции для статических и динамических задач (в [27] приведена соответствующая библиография).

Приведенные в настоящей статье результаты исследований являются составной частью цикла работ, которые были отмечены Государственной премией Украины в области науки и техники и премиями НАН Украины имени акад. М. К. Янгеля и акад. С. П. Тимошенко.

1. Работоспособность оболочечных конструкций при локальном ударном нагружении / А. В. Аксененко, В. С. Гудрамович, А. П. Дзюба, А. К. Козлов. – Днепропетровск : ДНУ, 2006. – 216 с.

2. Александров В. М. Контактные задачи в машиностроении / В. М. Александров, Б. Л. Ромалис. – М. : Машиностроение, 1986. – 174 с.
3. Власов В. З. Контактные задачи теории оболочек и стержней / В. З. Власов // Изв. АН СССР ОТН. – 1949. – № 6. – С. 68 – 82.
4. Гарт Е. Л. Проекційно-ітераційні модифікації методу локальних варіацій та аспекти їх застосування в задачах локальної стійкості оболонок / Е. Л. Гарт, В. С. Гудрамович // Сучасні проблеми механіки та математики. – Львів : ІПММ ім. Я. С. Підстригача НАНУ, 2008. – Т. 3. – С. 18 – 20.
5. Горячева И. Г. Механика фрикционного взаимодействия / И. Г. Горячева. – М. : Наука, 2001. – 481 с.
6. Григолюк Э. И. Контактные задачи теории пластин и оболочек / Э. И. Григолюк, В. М. Толкачев. – Москва : Машиностроение, 1980. – 411 с.
7. Гудрамович В. С. Исследование прочности конструкций ракетно-космической техники в некоторых экстремальных условиях эксплуатации / В. С. Гудрамович // Техн. механика. – 2001. – № 2. – С. 74 – 87.
8. Гудрамович В. С. Коллимационные зеркала компактного антенного полигона / В. С. Гудрамович // Техническая механика. – 2005. – № 2. – С. 133 – 136.
9. Гудрамович В. С. Контактные задачи сопряжения для систем пологих оболочек и силовых колец при произвольном нагружении / В. С. Гудрамович // Контактная прочность пространственных конструкций : сб. науч. тр. – К. : Наук. думка, 1976. – С. 56 – 66.
10. Гудрамович В. С. Методы расчета прочности оболочечных конструкций ракетно-космической техники при локальных нагрузках и контактных взаимодействиях / В. С. Гудрамович // Космічна наука і технологія. – 2002. – 8, № 4. – С. 11 – 24.
11. Гудрамович В. С. Методы решения упруго-пластических контактных задач теории тонкостенных конструкций / В. С. Гудрамович // Совместная выездная сессия АН УССР (Отделения физико-техн. проблем материаловедения, физики, математики и кибернетики, физико-техн. проблем энергетики), 1971 г., Харьков : тез. докл. – К. : Наук. думка, 1971. – С. 114 – 115.
12. Гудрамович В. С. Несущая способность шпангоутов при действии сосредоточенных сил / В. С. Гудрамович // Изв. ВУЗов. Авиацион. техн. – 1972. – № 1. – С. 125–128.
13. Гудрамович В. С. О несущей способности конструкций летательных аппаратов / В. С. Гудрамович // Космические исследования на Украине. – 1976. – Вып. 9. – С. 78 – 85.
14. Гудрамович В. С. Пластическое выпучивание цилиндрической оболочки конечной длины при импульсном локальном нагружении / В. С. Гудрамович // Теория оболочек и пластин : 8 Всесоюз. конф. по теор. оболочек и пластин, 1971 г., Ростов-на-Дону : сб. докл. – М. : Наука, 1973. – С. 125 – 130.
15. Гудрамович В. С. Предельное равновесие оболочечных систем при локальных нагрузках / В. С. Гудрамович // Метал. конструкции : взгляд в прошлое и будущее : 8 Укр. науч.-техн. конф. : сб. докл. – К. : Сталь, 2004. – Т. 2. – С. 211 – 220.
16. Гудрамович В. С. Предельный анализ – эффективный способ оценки конструкционной прочности оболочечных систем / В. С. Гудрамович // Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій : під ред. В. В. Панасюка. – Львів : ФМІ НАНУ, 2004. – С. 583 – 588.
17. Гудрамович В. С. Теория ползучести и ее применения к расчету элементов тонкостенных конструкций / В. С. Гудрамович. – К. : Наук. думка, 2005. – 222 с.
18. Гудрамович В. С. Технологии изготовления антенно-волноводной техники и солнечной энергетики с высокими оптико-механическими характеристиками // Системні технології : зб. наук. пр. – Дніпропетровськ, 2001. – № 2 (13). – С. 3 – 6.
19. Гудрамович В. С. Устойчивость упругопластических оболочек / В. С. Гудрамович. – К. : Наук. думка, 1987. – 216 с.
20. Гудрамович В. С. Учет пластических деформаций подкрепленных оболочек, опертых на ложемент, при определении контактного давления / В. С. Гудрамович // Сопrotивл. материалов и теория сооружен. – К. : Будівельник, 1972. – Вып. 16. – С. 47 – 48.
21. Гудрамович В. С. Контактные взаимодействия магистральных трубопроводов и седловых опор с учетом дефектов в зоне контакта / В. С. Гудрамович, В. А. Блажко, Э. Л. Гарт // Міцність та надійність магістральних трубопроводів (МТ–2008) : міжнародн. наук.-техн. конф., 2008 г., Київ : тези докл. – К. : ІПМ ім. Г. С. Писаренка НАНУ, 2008. – С. 35 – 36.
22. Гудрамович В. С. Оптимизация форм криволинейных стержней и оболочек вращения при собственных колебаниях / В. С. Гудрамович, И. М. Волкова // Оптимизация и динамика : всесоюзн. школа, 1982 г., Тарту : тез. докл. – Тарту : ТГУ, 1982. – С. 16.
23. Гудрамович В. С. Технологии изготовления устройств антенно-волноводной техники и солнечной энергетики на основе метода электролитического формования / В. С. Гудрамович, А. П. Гайдученко, А. И. Коваленко // Космічна наука і технологія. – 2001. – Т. 7, № 2/3. – С. 66 – 77.
24. Гудрамович В. С. Предельный анализ цилиндрических элементов башенных сооружений при неоднородном напряженном состоянии / В. С. Гудрамович, В. П. Герасимов // Проектирование и строительство инженерных сооружений из монолитного железобетона : сб. трудов. – Л. : ЛПСНИИП, 1989. – С. 87 – 92.
25. Гудрамович В. С. Статика и динамика жесткопластических цилиндрических оболочек при локальном нагружении / В. С. Гудрамович, В. П. Герасимов // 12 Всесоюзн. конф. по теор. оболочек и пластин, 1980 г., Ереван : сб. тр. – Ереван : ЕГУ, 1980. – Т. 2. – С. 50 – 56.
26. Гудрамович В. С. Предельный анализ элементов конструкций / В. С. Гудрамович, В. П. Герасимов, А. Ф. Деменков. – К. : Наук. думка, 1990. – 136 с.

27. Гудрамович В. С. Упругопластические конструкции с несовершенствами формы и остаточными напряжениями / В. С. Гудрамович, А. Ф. Деменков. – К. : Наук. думка, 1991. – 176 с.
28. Гудрамович В. С. Контактные взаимодействия и оптимизация оболочечных систем при локальном нагружении / В. С. Гудрамович, А. П. Дзюба // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2008. – Т. 51, № 2. – С. 188 – 201.
29. Гудрамович В. С. Интерференционно-оптические исследования свойств оптимизируемых локально нагружаемых конструкций / В. С. Гудрамович, А. П. Дзюба, Ю. М. Селиванов // Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій : міжнарод. наук.-техн. конф. пам'яті акад. НАНУ В. І. Моссаковського, 2007 р., Дніпропетровськ : тези доп. – Дніпропетровськ : ДНУ, 2007. – С. 182.
30. Гудрамович В. С. О локальной устойчивости сферических оболочек / В. С. Гудрамович, И. А. Дисковский // Докл. АН СССР. – 1977. – Т. 232, № 6. – С. 1283 – 1285.
31. Гудрамович В. С. Теоретические и экспериментальные исследования сферических оболочек при существенно-неоднородных напряженных состояниях / В. С. Гудрамович, И. А. Дисковский // Механика деформируемых сред : межвуз. сб. – Куйбышев : КГУ, 1978. – Вып. 3. – С. 142 – 148.
32. Гудрамович В. С. Экспериментальное исследование локальной устойчивости сферических сегментов / В. С. Гудрамович, И. А. Дисковский // 4 Всесоюз. конф. по статике и динамике пространств. констр., 1978 г., Киев : сб. тр. – К. : КИСИ, 1978. – С. 54 – 57.
33. Гудрамович В. С. Применение высокоскоростной киносъемки при экспериментальном исследовании процесса локальной потери устойчивости / В. С. Гудрамович, И. А. Дисковский, Н. А. Коновалов // Журн. научн. и прикл. фотографии и кинематографии АН СССР. – 1979. – Т. 24. – № 1. – С. 14 – 20.
34. Гудрамович В. С. Тонкостенные элементы зеркальных антенн / В. С. Гудрамович, И. А. Дисковский, Е. М. Макеев. – К. : Наук. думка, 1986. – 152 с.
35. Контактное взаимодействие оболочечных конструкций с опорными основаниями при усложненных условиях эксплуатации / В. С. Гудрамович, Е. М. Макеев, В. И. Моссаковский, П. И. Никитин // Пробл. прочности. – 1985. – № 10. – С. 108 – 114.
36. Гудрамович В. С. Прочность сегмента сферической оболочки при опирании на ложемент с учетом неоднородности контакта / В. С. Гудрамович, Е. М. Макеев, С. П. Федий // Техн. механика. – 1999. – № 1. – С. 141 – 147.
37. Гудрамович В. С. Контактная задача для упругого кольца, подкрепляющего цилиндрическую оболочку / В. С. Гудрамович, В. И. Моссаковский // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. – 1961. – № 2. – С. 153 – 156.
38. Гудрамович В. С. Общий случай плоской контактной задачи для распорного кольца / В. С. Гудрамович, В. И. Моссаковский // Прикл. механика. – 1966. – № 6. – С. 1 – 10.
39. Гудрамович В. С. К расчету бесконечной цилиндрической оболочки на комбинированном основании / В. С. Гудрамович, И. В. Пасечник // Пластичность и устойчивость в механике деформ. тверд. тела : сб. научн. тр. – Калинин : КГУ, 1984. – С. 42 – 46.
40. Гудрамович В. С. Контактное взаимодействие неоднородных оболочек вращения и упругого основания, описываемого различными моделями / В. С. Гудрамович, И. В. Пасечник // Гидроаэромеханика и теор. упругости. – Днепропетровск : ДГУ, 1987. – С. 92 – 102.
41. Гудрамович В. С. Контактное взаимодействие оболочечной конструкции при учете их упругопластических свойств / В. С. Гудрамович, И. В. Пасечник // Прикл. механика. – 1989. – № 11. – С. 38 – 44.
42. Гудрамович В. С. Контактные задачи для произвольной системы оболочек вращения и кругового основания / В. С. Гудрамович, А. А. Пурель // Теория оболочек и пластин : 8 Всесоюз. конф. по теор. оболочек и пластин, 1971 г., Ростов-на-Дону : сб. тр. – М. : Наука, 1973. – С. 665 – 669.
43. Лукасевич С. Локальные нагрузки в пластинах и оболочках / С. Лукасевич. – М. : Мир, 1975. – 542 с.
44. Моссаковский В. И. Контактные задачи теории оболочек / В. И. Моссаковский, В. С. Гудрамович, Е. М. Макеев // Контактная прочность пространственных конструкций : сб. науч. трудов. – К. : Наук. думка, 1976. – С. 56 – 66.
45. Моссаковский В. И. Контактные взаимодействия элементов оболочечных конструкций / В. И. Моссаковский, В. С. Гудрамович, Е. М. Макеев. – К. : Наук. думка, 1988. – 288 с.
46. Моссаковский В. И. Контактные задачи теории оболочек и стержней / В. И. Моссаковский, В. С. Гудрамович, Е. М. Макеев. – М. : Машиностроение, 1978. – 248 с.
47. Контактная задача для подкрепленной цилиндрической оболочки, лежащей на круговом основании (ложементе) / В. И. Моссаковский, В. С. Гудрамович, А. А. Новопашин и др. // Расчет пространственных конструкций. – М. : Стройиздат, 1967. – Вып. 11. – С. 53 – 72.
48. Образцов И. Ф. Оболочки при локализованных воздействиях (Обзор работ: основные результаты и направления исследований) / И. Ф. Образцов, В. В. Нерубайло, В. П. Ольшанский. – М. : МАИ, 1988. – 152 с. – Деп. в ВИНТИ, № 1222.
49. Пелех Б. Л. Контактные задачи теории упругих анизотропных оболочек / Б. Л. Пелех, М. А. Сухорольский. – К. : Наук. думка, 1980. – 216 с.
50. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений / Г. Я. Попов. – М. : Наука, 1982. – 342 с.
51. Hudramovych V. S. Carrying capacity of locally loaded shell structures / V. S. Hudramovych // Carrying capacity of shell structures : Proc. Intern. Conf. : ed. V. Krupka, P. Shneider. – Brno, Czech. Rep., 1997. – P. 145 – 151.

52. *Hudramovych V. S.* Contact interactions between shell systems and supports (stamps). General solution methods. Influence of the structural defects / *V. S. Hudramovych* // Актуальні задачі механіки неоднорідних структур: 5 укр.-польск. симп. : тези. – Львів : ЛНУ, 2003. – С. 11 – 12.
53. *Hudramovych V. S.* Features of nonlinear deformation and critical states of shell systems with geometrical imperfections / *V. S. Hudramovych* // Intern. Appl. Mechanics. – 2006. – Т. 42, No. 12. – P. 1323 – 1355.
54. *Hudramovych V. S.* Plastic and creep instability of shells with initial imperfections / *V. S. Hudramovych* // IUTAM symp. on rheology of bodies with defects, 1997, Beijing, China. – Dordrecht, Boston, London : Kluwer Acad. Publ., 1999. – P. 277 – 289.
55. *Hudramovych V. S.* Numerical simulation of nonlinear contact interaction between shell structures and supports (stamps) of different types / *V. S. Hudramovych* // Progress and Trends in rheology : ed. J. Emry. – Darmstadt : Springer, 1998. – P. 351 – 352.
56. *Hudramovych V. S.* Strength of locally loaded thinwalled structures of marine vehicles / *V. S. Hudramovych* // 5 Intern. Symp. High Speed marine vehicles. – Napoly, Italy, 1999. – P. IV.1.1 – IV.1.12.
57. *Hudramovych V. S.* Influence of damage of the rocket-space girdes structures on their deformation and carrying capacity / *V. S. Hudramovych, A. F. Demenkov* // 1 Intern. Forum on Astronautics and Aeronautics. – Harbin, China : Publ. Inst. of Technology, 2000. – P. 121 – 127.
58. *Hudramovych V. S.* Plastic deformation and limit states of metal shell structures with initial shape imperfections / *V. S. Hudramovych, A. A. Lebedev, V. I. Mossakovsky* // Light – weight steel and aluminium structures. – Amsterdam, Lansanne, New York, Tokyo, Elseiver, 1999. – P. 257 – 263.

Институт технической механики НАНУ и НКАУ,  
Днепропетровск

Получено: 10.07.08,  
в окончательном варианте 02.10.08