УДК 512.54

В. І. Коваленко (Чернігів. пед. ун-т)

ЛОКАЛЬНО СТУПІНЧАСТІ ГРУПИ З НОРМАЛЬНИМИ НЕМЕТАЦИКЛІЧНИМИ ПІДГРУПАМИ

The solvability of locally graded groups with normal nonmetacyclic subgroups is proved. It is known that the degree of solvability does not exceed the number 4.

Установлена разрешимость локально ступенчатых групп с нормальными неметациклическими подгруппами и отмечено, что ступень разрешимости не превышает числа 4.

У роботах [1 – 3] вивчались скінченні групи з нормальними неметациклічними підгрупами. У даній статті вивчаються локально ступінчасті групи, у яких кожна неметациклічна підгрупа є нормальною. Умова нормальності неметациклічних підгруп є одним із природних узагальнень умови нормальності всіх підгруп, що приводить до дедекіндових груп. Умова локальної ступінчастості — одна з найбільш слабких умов скінченності в загальній теорії груп. Клас локально ступінчастих груп достатньо широкий і містить локально скінченні групи, локально розв'язні групи, класи груп Куроша – Чернікова та ін.

Основним результатом статті є теорема, в якій встановлюється розв'язність локально ступінчастих груп із нормальними неметациклічними підгрупами і зазначається, що ступінь розв'язності таких груп не перевищує числа 4. Для доведення даної теореми використано результат автора про те, що *нескінченна локально ступінчаста група з власними метациклічними підгрупами є або метациклічною, або квазіциклічною групою* (у подальшому — теорема 1) [4, с. 54; 5]. Теорема 1 має і самостійне значення.

Означення 1 [6, с. 236]. *Групу G будемо називати локально ступінчастою, якщо будь-яка її неодинична скінченнопороджена підгрупа має власну підгрупу скінченного індексу.*

Означення 2. *Неметациклічну групу G із метациклічними власними підгрупами називаємо мінімальною неметациклічною групою.*

Теорема 1. *Локально ступінчасті групи G з нормальними неметациклічними підгрупами розв'язні, причому ступінь розв'язності не перевищує числа чотири. Нільпотентні групи такого роду мають скінченний комутант.*

Доведення. Твердження теореми є очевидним, якщо G — абелева група. Тому в подальшому будемо вважати, що G — неабелева група. Нехай M — перетин усіх неметациклічних підгруп X із G. За лемою 2 [1] X нормальна в G, G/M — дедекіндова група, всі власні підгрупи із M — метациклічні. Очевидно, що комутант G/M — елементарна абелева 2-група. З цього випливає, що $G'' \leq M$, отже, $G''' \leq M'$, $G^{(\mathrm{iv})} \leq M''$.

Якщо $M'' = 1$, то $G^{(\mathrm{iv})} = 1$. Якщо $M'' \neq 1$, то M може бути лише скінченною мінімальною неметациклічною групою (за теоремою 1). З опису нільпотентних мінімальних неметациклічних груп роботи [7] випливає, що M — група типу 7 теореми 2.5.2 [8]. Тому $M = P \leftthreetimes Q$, P — група кватерніонів, Q — ненормальна циклічна силовська 3-підгрупа в M, $[P, Q] = P$, P нормальна в G. За лемою Фратіні [9, с. 157] $G = M \cdot D = P \cdot D$, де $D = N_G(Q)$, $P \bigcap D = N_P(Q) = \Phi(P)$ і $[P, D] = [P, Q] = P$. Якщо D нормальна в G, то $N_M(Q)$ нормальна в

© В. І. КОВАЛЕНКО, 2007

M. Тому Q нормальна в M. Прийшли до суперечності. Таким чином, D ненормальна в G, а отже, метациклічна. За результатами [10, с. 442] $G' = P' \cdot D' \cdot [P, D] = P \cdot D'$. Оскільки D — метациклічна група, то D' — циклічна група і $G'' = P' \cdot D'' \cdot [P, D'] = P \cdot [P, D'] \le P$. Таким чином, $G''' \le P'$, $G^{(\mathrm{iv})} \le P'' = 1$.

Першу частину теореми доведено.

Нехай G — нільпотентна група. За відомими результатами [10, с. 400] вона має періодичну частину $T(G)$. Можливі випадки:

1) $T(G) = 1$;

2) $T(G) \neq 1$.

Випадок 1. Нехай $G' \neq 1$. В нільпотентній групі G без скруту знайдуться такі елементи a та b, що $[a, b] = c \in Z(G)$, $|c| = \infty$. Покладемо $H = \langle a, b\rangle$. За твердженням 1.2.1 [11] для довільного натурального n $[a^n, b] = [a, b]^n = c^n \neq 1$. Тому $H = (\langle c\rangle \times \langle a\rangle) \leftthreetimes \langle b\rangle$. Зрозуміло, що $H > N$, де $N = (\langle c^{p^2}\rangle \times \langle a^p\rangle) \leftthreetimes \langle b^p\rangle$ — неметациклічна група. За лемою 2 [1] N нормальна в G і G/M — дедекіндова група, комутант якої містить суміжний клас $N \cdot c$ порядку p^2, що суперечить теоремі 12.5.4 [12]. Таким чином, у випадку 1 $G' = 1$ і теорему доведено.

Випадок 2. У цьому випадку за лемою 1 [1] і розглянутим випадком 1 маємо $G' \le T(G)$. Припустимо, що G містить такі неметациклічні підгрупи A та B, для яких $A \cap B = 1$. Тоді за лемою 2 [1] A нормальна в G, B нормальна в G, G/A та G/B — дедекіндові групи, а отже, $|(G/A)'| \le 2$ і $|(G/B)'| \le 2$.

Нехай $G^* = G/A \times G/B$. Оскільки $A \cap B = 1$, то за теоремою Ремака [9, с. 54] G вкладається в G^*. Тому $|G'| \le 4$, і в цьому випадку теорему доведено.

Нехай G не містить згаданих підгруп A та B. Тоді за попереднім в $T(G)$ довільна цілком факторизована абелева підгрупа є скінченною групою, що не містить підгруп порядку pqr, де p, q, r — необов'язково різні прості числа. За теоремою 1.2 [6] і теоремою 1.9 [6] $T(G)$ — черніковська група з повною частиною R, $R \le Z(G)$. За припущенням R не має двох різних квазіциклічних підгруп. При $|T(G)| < \infty$ теорема є очевидною. Нехай $|T(G)| = \infty$. Тоді за попереднім повна частина R групи $T(G)$ є квазіциклічною p-групою. При $T(G) = G$ $R \le Z(G)$ і G — скінченна над центром група, у якої, як відомо, $|G'| \le \infty$. Тому в подальшому маємо $T(G) < G$, $R \le G'$ і $R \le Z(G)$.

Нехай D — підгрупа, породжена деяким шаром елементів із $T(G)$, що містить по одному із представників суміжних класів $T(G)/R$. Тоді $T(G) = R \cdot D$, де D — характеристична підгрупа із $T(G)$ і $|D| < \infty$. Якщо G/D — абелева група, то R не належить G', що суперечить вибору. Отже, G/D не може бути навіть дедекіндовою групою, а тому G/D не може бути розширенням своєї центральної квазіциклічної підгрупи $T(G)/D$ за допомогою локально циклічної групи без скруту $(G/D)/(T(G)/D)$. Зрозуміло, що силовська p-підгрупа із G є абелевою групою. З цього випливає, що в G знайдуться такі елементи a та b, для яких $|a| \in \{p^{\alpha}, \infty\}$, $|b| \in \{p^{\beta}, \infty\}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $|a| = \infty$, або $|b| = \infty$, $[a, b] = c$, $c \in R$, $|c| = p^3$.

Покладемо $H = \langle a, b\rangle$. Тоді без порушення загальності $H = (\langle c\rangle \times \langle a\rangle) \leftthreetimes \langle b\rangle$, $H > N$, де $N = (\langle c^{p^2}\rangle \times \langle a\rangle) \leftthreetimes \langle b^{p^2}\rangle$ — неметациклічна група, $|b| = \infty$. Отже, як і раніше, одержали суперечність, що G/N — дедекіндова група. Ця суперечність завершує доведення теореми. Всі випадки розглянуто.

Теорему доведено.

1. *Коваленко В. І.* Будова скінченних недисперсивних груп, в яких кожна неметациклічна підгрупа нормальна // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 10. – С. 1337 – 1342.
2. *Коваленко В. І.* Деякі класи скінченних ненільпотентних груп з нормальними неметациклічними підгрупами // Класи груп з обмеженнями для підгруп: Зб. наук. пр. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1997. – С. 79 – 83.
3. *Коваленко В. І.* Деякі класи скінченних груп з нормальними неметациклічними підгрупами // Допов. НАН України. – 1997. – № 9. – С. 17 – 20.
4. *Черников Н. С., Довженко С. А.* Локально ступенчатые группы с собственными сверхразрешимыми подгруппами // Алгебра і теорія чисел: Тези доп. (Укр. мат. конг.-2001). – Київ: Ін-т математики НАН України, 2001. – С. 54 – 55.
5. *Коваленко В. І.* Деякі класи груп з метациклічними підгрупами // Вісн. Чернігів. пед. ун-ту. Сер. Пед. науки. – 2001. – Вип. 4. – С. 69 – 72.
6. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
7. *Blackburn N.* Generalization of certain elementary theorem on p-groups // Proc. London Math. Soc. – 1961. – **11**, № 41. – P. 1 – 22.
8. *Левищенко С. С., Кузенный Н. Ф.* Конечные группы с системами дисперсивных подгрупп. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1997. – 230 с.
9. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. – М.: Наука, 1982. – 288 с.
10. *Курош А. Г.* Теория групп. – М.: Наука, 1967. – 648 с.
11. *Кузенний М. Ф., Семко М. М.* Метагамільтонові групи та їх узагальнення. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1997. – 230 с.
12. *Холл М.* Теория групп. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 468 с.

Одержано 25.05.2005