К. т. н. В. Ф. МИРГОРОД, к. т. н. Г. С. РАНЧЕНКО

Украина, г. Одесса, ОАО «Элемент»
E-mail: element@farlep.net

Дата поступления в редакцию 28.04 2005 г.

Оппонент *д. т. н. Ю. А. ДОЛГОВ* (Приднестровский гос. ун-т им. Т. Г. Шевченко, г. Тирасполь)

ТРЕНДОВЫЕ СТАТИСТИКИ ПРИ ОБРАБОТКЕ ДАННЫХ В СИСТЕМАХ ТЕХНИЧЕСКОЙ ДИАГНОСТИКИ

Выполнена оценка вероятностных характеристик критерия Хальда–Аббе для обнаружения тренда при статистической обработке данных в системах технической диагностики.

Решение общей проблемы повышения эффективности систем технической диагностики (СТД) РЭА, наряду с совершенствованием аппаратных средств, обусловлено необходимостью повышения надежности статистических выводов о техническом состоянии объектов диагностирования. Важной практической задачей диагностики является расширение возможностей реализуемых систем, охватывая не только традиционный допусковый контроль, но и прогнозные оценки изменения контролируемых параметров на основе измеренных их значений в виде временных рядов, что составляет предмет одной из областей прикладной статистики — трендового анализа.

Трендовый анализ является в настоящее время функционально необходимой частью алгоритмического обеспечения СТД, позволяя определить факт необратимого изменения состояния диагностируемых объектов (задачи обнаружения «разладки» [1]), оценить параметры возникшей тенденции к изменению контролируемых параметров и дать прогнозную оценку их возможного состояния [2, 3].

Предлагаемые критерии наличия тренда в данных (Хальда–Аббе [4], кумулятивных сумм [1], Спирмена [3], Фишера [5, 6] и др.) отличаются разнообразием и предоставляют возможность выбора при практической реализации. В то же время применение указанных критериев при анализе реальных временных рядов зачастую не дает положительных результатов вследствие несоблюдения условий их корректного использования. Общее условие, накладываемое на исходные данные,— о принадлежности выборки к генеральной совокупности некоррелированных нормально распределенных случайных величин — практически невозможно проверить при реализации трендовых статистик. Поэтому необходимо определить факторы, влияющие на эффективность и условия корректного применения тех или иных статистик тренда при решении прикладных задач диагностики.

Целью настоящего исследования является оценка вероятностных характеристик одного из наиболее широко применяемых для обнаружения тренда критерия Хальда–Аббе при анализе реальных временных рядов в системах технической диагностики.

Критерий Хальда–Аббе формулируется в задачах обнаружения тренда в виде статистики

$$r=\left[2\sum_{k=1}^{N}\left(y_k-\bar{y}\right)^2\right]^{-1}\sum_{k=1}^{N}\left(y_{k+1}-y_k\right)^2>r_0, \qquad (1)$$

где y_k — исследуемый временной ряд;
$\bar{y}$ — выборочное среднее,

$$\bar{y}=N^{-1}\sum_{k=1}^{N}y_k;$$

r_0 — пороговое значение критерия.

Опорной гипотезой H_0 является предположение об отсутствии тренда. При ее выполнении статистика (1) обычно [4, с. 237] формируется в виде

$$r'=0{,}5\cdot 1\mathrm{n}\left[\left(2-r\right)/r\right]>r_0' \qquad (2)$$

и, согласно [4], при N>10 нормализуется с дисперсией Dr'=1/(N–3). Поэтому уровни принятия гипотезы H_0 легко устанавливаются по их значимости α для обычно применяемых в диагностике α=0,01; 0,05.

Например, для применяемых значений N=20 эти уровни составляют $r'_{0,01}=0{,}6306$; $r'_{0,05}=0{,}4729$.

Анализируя выражение для статистики (1), нетрудно убедиться, что критерий Хальда–Аббе сводится к известному [6, 7] критерию некоррелированности выборки. Действительно, функционал (1) преобразуется к виду

$$r=\left[2\sum_{k=1}^{N}\left(y_k-\bar{y}\right)^2\right]^{-1}\sum_{k=1}^{N}\left[\left(y_{k+1}-\bar{y}\right)-\left(y_k-\bar{y}\right)\right]^2=$$

$$=\left[2\sum_{k=1}^{N}\left(y_k-\bar{y}\right)^2\right]^{-1}\left[\begin{array}{l}\sum_{k=1}^{N}\left(y_{k+1}-\bar{y}\right)^2+\sum_{k=1}^{N}\left(y_k-\bar{y}\right)^2-\\-\sum_{k=1}^{N}\left(y_{k+1}-\bar{y}\right)\left(y_k-\bar{y}\right)\end{array}\right]=$$

$$=1-\hat{\rho}+\Sigma_N, \qquad (3)$$

где $\hat{\rho}=\rho_{k,k+1}$ — выборочный коэффициент корреляции между отсчетами, имеющий распределение [6, с. 640]

$$f\left(\rho,\hat{\rho}\right)=\left[\left(N-2\right)/\pi\right]\left(1-\rho^2\right)^{\frac{N-1}{2}}\left(1-\hat{\rho}^2\right)^{\frac{N-4}{2}}\times$$

$$\times\int_0^1\frac{\lambda^{N-2}d\lambda}{\left(1-\rho\hat{\rho}\lambda\right)^{N-1}\sqrt{1-\lambda^2}} \qquad (4)$$

со средним $M\hat{\rho}=\rho+0(1/N)$ и дисперсией

$$D\hat{\rho}=\left(1-\rho^2\right)^2 \Big/ N+0\left(1/N^{3/2}\right).$$

Собственно с r-критерием в прикладной статистике [6, 7] связывается важный частный случай плотности (4) при ρ=0 (гипотеза некоррелированности), при котором (4) приобретает вид

$$f(0,\hat{\rho})=\frac{\Gamma\left(\dfrac{N-1}{2}\right)}{\pi\Gamma\left(\dfrac{N-2}{2}\right)}\left(1-\hat{\rho}^2\right)^{\frac{N-4}{2}}, \qquad (5)$$

где $\Gamma(\chi)$ — гамма-функция.

Соотношение $r=1-\hat{\rho}$ справедливо с точностью до случайной добавки

$$\Sigma_N=\left(y_{N+1}^2-y_1^2\right)\Big/ 2\sum_{k=1}^{N}\left(y_k-\bar{y}\right)^2,$$

имеющей двухстороннее распределение Фишера с плотностью

$$f(\Sigma_N)=N(N/2)^{N/2}\frac{\Gamma\left(\dfrac{N+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{N}{2}\right)}\left(1+\frac{N^2}{2}\Sigma_N\right)^{-\frac{N+2}{2}}, \qquad (6)$$

средним и модой, равными нулю, и дисперсией

$$D_{\Sigma_N}=N\big/(N-2)^2(N-4).$$

По отношению к распределению (4) указанное распределение (6) является δ-образным, поэтому плотность суммы выборочного коэффициента корреляции и случайной величины Σ_N в виде свертки указанных плотностей совпадает с (4) — по крайней мере до тех пор, пока отношение дисперсий $D_{\Sigma_N}/D_{\hat{\rho}}$ является малой величиной. Нетрудно видеть, что для рассматриваемого частного случая ρ=0 это отношение имеет порядок $0(1/N)$, следовательно, влиянием Σ_N можно пренебречь.

Соответственно нормализуемый критерий (2) согласно (3) переходит в известный [6, 8] критерий оценки значимости выборочного коэффициента корреляции

$$r'=0{,}5\cdot 1\text{n}\left[(2-r)/r\right]=-0{,}5\cdot 1\text{n}\left[(1-\hat{\rho})/(1+\hat{\rho})\right]=z, \qquad (7)$$

который при N>10 распределен приблизительно нормально [6, с. 641] с центром и дисперсией

$$Mz=0{,}5\cdot 1\text{n}\left[(1-\rho)/(1+\rho)\right]+\rho/2(N-1);\ Dz=1/(N-3).$$

Таким образом, критерий Хальда–Аббе практически не отличается от известного критерия некоррелированности соседних отсчетов выборки. Следовательно, когда отвергается опорная гипотеза H_0 об отсутствии тренда согласно классической формулировке критерия, тем самым отвергается гипотеза о некоррелированности выборки. Однако в практических применениях указанные гипотезы не равносильны.

Действительно, коррелированность выборки может быть обусловлена как физическими явлениями в объекте диагностирования, так и фильтрацией данных в измерительном канале, что вовсе не предполагает наличие тренда. Если отвлечься от моделей изменения параметров объекта диагностики, то необходимая операция фильтрации данных однозначно превращает исследуемую выборку в коррелированную, при этом в предположении о некоррелированности исходных (нефильтрованных) данных справедливо соотношение

$$\rho=h(\Delta t),$$

где $h(\Delta t)$ — значение импульсной переходной функции фильтра на интервале дискретизации Δt.

При учете динамики объекта диагностики и/или высокочастотной цифровой фильтрации в измерительном канале априорное значение коэффициента корреляции положительно — ρ>0. Согласно (7) происходит смещение уровня решающей статистики в сторону установленного порога и, соответственно, рост уровня ложных тревог о наличии тренда. Например, для выборки с N=20 и уровня значимости α=0,05 при априорном значении ρ=0,3, признаваемым [9, с. 78] малозначимым, происходит рост уровня ложных тревог в три раза — до α=0,15.

Применяемая предварительная обработка с целью исключения скрытых периодичностей временного ряда [3] сопровождается режекторной цифровой фильтрацией, для которой характерно $h(\Delta t)$<0. В этом случае согласно (7) уровень решающей статистики смещается в противоположную от порога сторону, что сопровождается повышением вероятности пропуска трендового участка выборки. Коррекция порогового уровня возможна только в том случае, если известен априорный коэффициент корреляции, т. к. оценка выборочного коэффициента корреляции на короткой выборке имеет низкую достоверность и сводится к той же статистике (7).

Априорный коэффициент корреляции, таким образом, должен быть определен до применения процедуры трендового контроля путем построения диагностической модели исследуемого процесса в объекте и тщательной оценки метрологических характеристик измерительного канала.

Не менее важным фактором, влияющим на эффективность трендовых статистик, в том числе исследуемой Хальда–Аббе, является возможное отличие исходной выборки от гауссовской. Анализ типовых измерительных каналов [9] показывает, что распределения ошибок измерения зачастую имеют существенно негауссовский характер, а при использовании методов косвенных измерений негауссовский характер выборки является скорее правилом, чем исключением.

Если исследуемая выборка имеет плотность распределения, отличную от нормальной, то соответственно нет основания полагать, что статистика (1) совпадает с r-статистикой, а статистики (2), (7) близки к нормальному распределению, и уровни значимости критериев выбраны правильно.

Разнообразие распределений ошибок различных измерительных каналов [9] не позволяет получить аналитические соотношения для искомых распределений трендовых статистик, поэтому для оценки влияния этого фактора использован метод статистического моделирования в интерактивной среде MATLAB

[10]. При таком моделировании использовались выборки из нормальной генеральной совокупности, которая подвергалась нелинейному преобразованию, и на полученной негауссовской выборке тестировались статистики (1), (2). Совместному анализу подвергались гистограммы исходной выборки и значений решающих статистик, а также значения выборочных моментов до четвертого порядка включительно.

Как это установлено в результате численных экспериментов, наиболее существенное влияние на уровень значимости критериев тренда оказывает асимметрия распределения выборки, что выражается в росте вероятностей ошибок первого и второго рода.

Из проведенных исследований и результатов численного моделирования следуют предлагаемые выводы и рекомендации.

1. Эффективность критериев тренда, в частности Хальда–Аббе, существенно зависит от статистических свойств тестируемой выборки — справедливости гипотез о некоррелированности и принадлежности к нормальной генеральной совокупности, надежность которых целесообразно установить в результате предварительного анализа данных.

2. Для повышения достоверности статистических выводов об отсутствии тренда необходимо предварительное построение диагностических моделей исследуемого процесса, например в виде АРСС-моделей [11], а также тщательная оценка метрологических свойств измерительного канала, включая алгоритмы цифровой фильтрации данных и оценку вероятностных характеристик ошибок измерений.

3. Для предварительной оценки возможностей использования одной из статистик тренда целесообразно определить общие статистические свойства (тип статистической модели) исследуемого временного ряда на основе одного из критериев Фишера [5, 6], либо процедуры Кохрейна [12].

4. Подтверждение надежности статистических выводов по нормализуемым статистикам тренда может быть получено лишь при достаточном объеме собственно трендовой статистики, в частности, для уровня значимости α=0,05 такой объем составляет $N_y \geq 80$, а для α=0,01 соответственно $N_y \geq 400$ [9, с. 43].

Перспективы дальнейших исследований в направлении повышения эффективности трендовых статистик в системах технической диагностики РЭА заключаются в обосновании реалистичных статистических моделей исследуемых временных рядов для конкретных прикладных задач диагностики.

ИСПОЛЬЗОВАННЫЕ ИСТОЧНИКИ

1. Жигалевский А. А., Красковский А. Е. Обнаружение разладки случайных процессов в задачах радиотехники.— Л.: Изд. Ленинградс, ун-та, 1988.

2. Айвазян С. А., Енюков И. С., Мешалкин Л. Д. Прикладная статистика. Исследование зависимостей.— М.: Финансы и статистика, 1985.

3. Отнес Р., Эноксон Л. Прикладной анализ временных рядов. Основные методы.— М.: Мир, 1982.

4. Епифанов С. В., Кузнецов В. И., Богаенко И. И. и др. Синтез систем управления и диагностирования газотурбинных двигателей.— К.: Техника, 1998.

5. Кармалита В. А., Лобанов В. Э. Точность результатов автоматизированного эксперимента.— М.: Машиностроение, 1992.

6. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров.— М: Наука, 1973.

7. Бендат Дм., Пирсол А. Прикладной анализ случайных данных.— М.: Мир, 1989.

8. Математическая статистика / Под ред. В. С. Зарубина и А. П. Крищенко.— М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002.

9. Новицкий П. В., Зограф И. А. Оценка погрешностей результатов измерений.— Л.: Энергоатомиздат, 1985.

10. Дьяконов В. П. MATLAB 6/6.1/6.5+Simulink 4/5. Основы применения. Полное руководство пользователя.— М.: Солон-пресс, 2002.

11. Льюнг Л. Идентификация систем. Теория для пользователя.— М.: Наука, 1991.

12. Cochranc I. H. How big is the random walk in GNP // Jornal of Political Economy.— 1998.— N 96.— С. 893—920.