ISSN 1561-9087 Прикладна гідромеханіка. 1999. Том 1 (73), N 3. С. 32 – 47

УДК 537.84

К МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ НЕОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ В СТАЦИОНАРНОМ СЛУЧАЕ

Н. В. САЛТАНОВ*, В. Н. САЛТАНОВ**

* *Институт гидромеханики НАН Украины, Киев*
** *Национальный университет им. Т.Г. Шевченко, Киев*

Получено 8.06.98

Исследована магнитогидродинамическая модель проводящей вращающейся стратифицированной невязкой жидкости в стационарном случае. В предположении параллельности векторов скорости и напряженности магнитного поля отмечено три типа стратификации магнитного поля: доальфвеновская, альфвеновская и суперальфвеновская. Указаны два случая сводимости трехпараметрической задачи к решению линейных уравнений. В первом случае вектор модифицированной скорости выражается через потенциал, удовлетворяющий уравнению Лапласа. Во втором случае вектор модифицированной скорости выражается через обобщенный потенциал, удовлетворяющий уравнению Гельмгольца. Двухпараметрическая задача на основе интегралов симметрии и вмороженности сведена к одному нелинейному уравнению в частных производных второго порядка, служащему для определения модифицированной функции тока. Это соотношение является обобщением уравнения Йи, хорошо известного в обычной динамике неоднородной жидкости. Указан ряд случаев, когда уравнение для модифицированной функции тока становится линейным. Получено магнитогидродинамическое обобщение хорошо известного в обычной гидродинамике сферического вихря Хилла. Получены точные решения, описывающие внутренние волны конечной амплитуды в плоском и круговом слоях замагниченной неоднородной жидкости. Проанализировано влияние напряженности магнитного поля на дисперсионные зависимости.

У стаціонарному випадку досліджена магнітогідродинамічна модель провідної стратифікованої нев'язкої рідини, що обертається. При припущенні паралельності векторів швидкості й напруженості магнітного поля відмічено три типа стратифікації магнітного поля: доальфвенівська, альфвенівська та суперальфвенівська. Вказані два випадки, в яких можливо звести трипараметричну задачу до розв'язку лінійних рівнянь. В першому випадку вектор модифікованої швидкості виражається через потенціал, який задовольняє рівняння Лапласа. У другому випадку вектор модифікованої швидкості виражається через узагальнений потенціал, що задовольняє рівняння Гельмгольца. Двопараметрична задача на основі інтегралів симетрії та вмороженості зведена до одного нелінійного рівняння в частинних похідних другого порядку, яке служить для визначення модифікованої функції току. Це співвідношення є узагальненням рівняння Йи, добре відомого у звичайній динаміці неоднорідної рідини. Вказаний ряд випадків, коли рівняння для модифікованої функції току стає лінійним. Одержано магнітогідродинамічне узагальнення добре відомого в звичайній гідродинаміці сферичного вихора Хілла. Одержані точні розв'язки, які описують внутрішні хвилі скінченної амплітуди в плоскому та коловому шарах замагніченої неоднорідної рідини. Проаналізовано вплив напруженості магнітного поля на дисперсійні залежності.

The magnetohydrodynamic model of conducting rotatory stratified nonviscous liquid is investigated here in stationary case with the assumption that magnetic field vector and speed vector are parallel. Three types of magnetic field stratification are registered: subalfvenic, alfvenic and superalfvenic. Two possibilities of three parametric problem reducibility to linear equations solving are pointed out. The modified speed vector is expressed in terms of potential complying with Laplas equation in the first case and Helmholtz equation in the second case. Two-parametric problem based on the symmetry integrals is reduced to one nonlinear equation in quadratic partial derivatives to establish modified stream function. This relation is the generalization of Yih equation, that is well-known in the usual dynamics of nonhomogeneous fluids. A set of situations when the equation for the modified stream function becomes linear is pointed. Magnetohydrodynamic generalization of well-known in common hydrodynamics Hill vortex is obtained. The exact solutions describing the internal waves with finite amplitude in a plane and circular layers of magnetized nonhomoheneous fluid are received. The influence of magnetization on dispersion relationships is analysed.

ВВЕДЕНИЕ

Разработка магнитной гидродинамики (МГД) как новой физической дисциплины было обусловлено, в первую очередь, различными астрофизическими и геофизическими приложениями (распространение радиоволн, магнитные бури, полярные сияния, гидромагнитное динамо, МГД - эффекты в крупномасштабных океанических течениях и т.д. [1, 3, 13, 24-26, 32, 34, 39, 40]. В последующем ее интенсивное развитие связано с рядом технических приложений [6, 7, 9-11, 13, 15, 18, 21-25, 30, 40]. В числе первых технических задач МГД было изучение движения электропроводных жидкостей в трубах и каналах [6, 7, 22-25, 33, 39, 41]. Прежде были рассмотрены задачи, связанные с электромагнитными расходомерами и насосами. Электромагнитные насосы для жидких металлов имеют приложения в атомной энергетике (для перекачки носителя), в металлургии и литейном деле (для транспортировки, разливки, перемешивания и очистки расплавленных металлов) и других областях [22, 23, 25, 37, 38, 42]. Однако, наиболее интенсивные исследования течений проводящих жидкостей и газов в каналах при наличии магнитного поля связаны с созданием МГД преобразователей тепловой энергии в электрическую за счет возникающей при этом электродвижущей силы. В связи с этим следует отметить, что идея преобразования кинетической энергии движущейся в магнитном поле проводящей жидкости в электрическую была предложена еще Фарадеем [22]. На основе МГД движителей со скрещенными внешними электрическим и магнитным полями, коаксиальных ускорителей, плазменных и ионных пушек и т.п. в ракетной технике и авиации разрабатывались и продолжают разрабатываться различного рода двигатели большого удельного импульса для межпланетных кораблей и для торможения ракет при их возвращении на Землю [12, 25]. Задача овладения практически неограниченными запасами избыточной энергии, содержащейся в ядрах легких елементов, приводит к проблеме термоядерного управляемого синтеза. Эта проблема вызвала всестороннее изучение свойств высокотемпературной плазмы [2, 10, 11, 21, 40]. Для изучения ряда вопросов физики высокотемпературной плазмы широко используются различные модели МГД. Определенный интерес представляют внешние задачи МГД. При гиперзвуковых скоростях полета за фронтом ударной волны у поверхности летательного аппарата температура повышается настолько, что газ становится электропроводным. Это создает определенные возможности электромагнитного воздействия на режимы обтекания и теплообмена.

В систему уравнений МГД однородной недиссипативной жидкости в стационарном случае векторы скорости и магнитного поля входят симметричным образом. Эта симметрия обусловливает существование весьма широкого и важного класса решений указанной системы уравнений, в котором векторы скорости и магнитного поля коллинеарны [1, 34, 35, 43-45]. В частности, установившиеся волны конечной амплитуды Альфвена принадлежат этому классу решений [1, 45]. Этому же классу принадлежат решения, описывающие обтекание тонких крыльев жидкостью с бесконечной проводимостью [43], когда скорость профиля параллельна невозмущенному магнитному полю на бесконечности. В математическом отношении этот класс решений принадлежит к классам решений систем нелинейных уравнений в частных производных с дифференциальными связями, которые в гидродинамике широко изучались и изучаются в настоящее время, в частности, в работах Н.Н.Яненко и его школы [46-48].

Далее в стационарном случае в предположении коллинеарности векторов скорости и магнитного поля выполнены методические проработки и получены и проанализированы классы точных решений уравнений МГД идеально проводящей стратифицированной по плотности вращающейся жидкости. Особое внимание уделено анализу симметричной (двухпараметрической) задачи.

1. ТРЕХПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА

Исходная система уравнений вращающейся стратифицированной по плотности идеально проводящей невязкой жидкости в стационарном случае имеет вид

$$\nabla w = \vec{v} \times \mathrm{rot}(\vec{v} - \vec{W}) - \frac{1}{4\pi\rho}\vec{H} \times \mathrm{rot}\vec{H} - \frac{p}{\rho^2}\nabla\rho, \quad (1)$$

$$\mathrm{div}\vec{v} = 0, \quad (2)$$

$$(\vec{v}\nabla)\rho = 0, \quad (3)$$

$$\mathrm{div}\vec{H} = 0, \quad (4)$$

$$\nabla\Phi_e = \frac{1}{c}\vec{v} \times \vec{H}, \quad (5)$$

$$w = \frac{\vec{v}^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \Phi, \quad \vec{W} = -\omega_* \vec{e}_* \times \vec{R},$$

$$\Phi \equiv G(x) - \frac{\vec{W}^2}{2} \quad (6)$$

Здесь $\vec{v}$, $\vec{H}$, ρ, p, G, Φ_e и c - соответственно скорость, напряженность магнитного поля, плотность, давление, потенциал внешних объёмных сил, электрический потенциал и скорость света; ω_* - угловая скорость вращения; $\vec{e}_*$ - единичный вектор вдоль оси вращения; $\vec{R}$ - радиус-вектор текущей точки. "Скоростная" часть уравнения движения (1) представлена в форме Громеки-Ламба, весьма удобной при дальнейшем анализе. В соответствии со сказанным во "Введении" положим

$$\vec{H} = f\vec{v}. \quad (7)$$

Тогда из уравнений (2), (4) и (5) следует

$$(\vec{v}\nabla)f = 0, \quad (8)$$

$$\Phi_e = \Phi_{e0} = 0. \quad (9)$$

Таким образом, электрическое поле в рассматриваемом МГД - течении отсутствует. Скалярную величину f, входящую в соотношения (7) и (8), будем называть функцией стратификации магнитного поля. Наряду с этой величиной будем рассматривать также величину $k_{\text{н}}$, определяемую соотношением

$$k_{\text{н}} = \frac{|f|}{\sqrt{4\pi\rho}}. \qquad (10)$$

Скалярную величину $k_{\text{н}}$ будем называть коэффициентом стратификации магнитного поля. Будем говорить, что стратификация магнитного поля в данной частице жидкости доальфвеновская, если $k_{\text{н}} < 1$, альфвеновская - если $k_{\text{н}} = 1$ и, наконец, супеpальфвеновская, если $k_{\text{н}} > 1$.

Учитывая соотношения (7) и (8) в уравнении движения (1), будем иметь

$$\nabla\frac{\rho w}{\rho_0} = (\frac{\rho}{\rho_0} - \frac{f^2}{4\pi\rho_0})\vec{v}\times \mathrm{rot}\vec{v} + \frac{\vec{v}^2}{2}\nabla(\frac{\rho}{\rho_0} - \frac{f^2}{4\pi\rho_0}) +$$
$$+\Phi\nabla\frac{\rho}{\rho_0} - \frac{\rho}{\rho_0}\vec{v}\times\mathrm{rot}\vec{W}. \qquad (11)$$

Здесь $\rho_0 = \mathrm{const}$ – характерное значение плотности. Умножая левую и правую части уравнения (11) на скорость $\vec{v}$, с учетом (3) и (8) получаем

$$(\vec{v}\nabla)w = 0. \qquad (12)$$

С учетом (12) можно видеть, что в рассматриваемом случае первое соотношение (6) фактически представляет собой аналог интеграла Бернулли.

Таким образом, в рассматриваемом случае задача сведена к системе трех скалярных уравнений (2), (3), (8) и одного векторного уравнения (11), служащей для определения трех скалярных величин ρ, w и f и вектора скорости $\vec{v}$. Если указанные величины определены, то давление и напряженность магнитного поля найдем, соответственно, с помощью соотношений (6) и (7).

1. Пусть стратификация магнитного поля альфвеновская:

$$k_{\text{н}} = 1 \longrightarrow f = \pm\sqrt{4\pi\rho}. \qquad (13)$$

Выберем ось z вдоль оси вращения

$$\vec{e}_* = \vec{e}_z. \qquad (14)$$

Будем считать $\omega_* \neq 0$ и введем обозначение

$$\vec{q} = 2\omega_*\rho\vec{v} \qquad (15)$$

Тогда с учетом (6) уравнения (11), (2) и (3) принимают, соответственно, вид

$$\nabla\Pi = -\rho\nabla\Phi + \vec{q}\times\vec{e}_z, \quad \Pi \equiv p + \rho\frac{\vec{v}^2}{2}, \qquad (16)$$

$$\mathrm{div}\vec{q} = 0, \qquad (17)$$

$$(\vec{q}\nabla)\rho = 0. \qquad (18)$$

С помощью второй и первой компонент уравнения (16) выражаем величины q_1 и q_2 через величины Π и ρ:

$$q_1 = -\frac{\partial\Pi}{h_2\partial x_2} - \rho\frac{\partial\Phi}{h_2\partial x_2}, \qquad (19)$$

$$q_2 = \frac{\partial\Pi}{h_1\partial x_1} + \rho\frac{\partial\Phi}{h_1\partial x_1}. \qquad (20)$$

Из третьей компоненты уравнения (16) имеем

$$\frac{\partial\Pi}{\partial z} = -\rho\frac{\partial\Phi}{\partial z}. \qquad (21)$$

С учетом выражений (19) и (20) из уравнений (2) и (3) следует

$$\frac{\partial h_1h_2q_z}{\partial z} = \frac{\partial(\rho,\Phi)}{\partial(x_1,x_2)}, \qquad (22)$$

$$h_1h_2q_z\frac{\partial\rho}{\partial z} = \frac{\partial(\rho,\Pi)}{\partial(x_1,x_2)} + \rho\frac{\partial(\rho,\Phi)}{\partial(x_1,x_2)}. \qquad (23)$$

Таким образом, в рассматриваемом случае задача сведена к системе трех нелинейных уравнений в частных производных первого порядка (21)-(23), служащей для определения трех величин Π, ρ и q_z. Если эти величины найдены, то физические величины $\vec{v}$, $\vec{H}$ и p определяются с помощью операций дифференцирования и конечных соотношений. Пусть $\rho = \rho_0 = \mathrm{const}$. Тогда из (21)-(23) следует

$$\Pi = \Pi_0(x_1,x_2) - \rho_0\Phi, \quad q_z = \frac{Q_{z0}(x_1,x_2)}{h_1h_2}. \qquad (24)$$

В соотношениях (24) величины $\Pi_0(x_1,x_2)$ и $Q_{z0}(x_1,x_2)$ - произвольные функции своих аргументов. Пусть

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial h_1h_2q_z}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial\rho}{\partial z} = 0. \qquad (25)$$

Тогда из (21)-(23) следует

$$\rho = \rho(\Phi), \qquad \Pi = \Pi(\Phi), \qquad (26)$$

где ρ и Π - произвольные функции своих аргументов. Для величины q_z при этом имеет место выражение (24).

Пусть выполнено условие (13), а вращение отсутствует ($\omega_* = 0$). Тогда с учетом (6) уравнение (11) принимает вид

$$\nabla\Pi = -\rho\nabla G. \qquad (27)$$

Здесь величина Π определяется согласно (16). Пусть $\rho = \rho_0 = \text{const}$. Тогда из (27) с учетом второго соотношения (16) следует интеграл

$$p + \rho_0 (\frac{\vec{v}^2}{2} + G) = \rho_0 w_0, \qquad w_0 = \text{const}. \tag{28}$$

Пусть $\nabla\rho \neq 0$, G =0. Тогда из (27) следует

$$p + \rho\frac{\vec{v}^2}{2} = \rho_0 w_0. \tag{29}$$

Пусть $\nabla\rho \neq 0$, $\nabla G \neq 0$. Тогда из (27) имеем

$$p + \rho\frac{\vec{v}^2}{2} = \Pi(G), \tag{30}$$

$$\rho = -\frac{d\Pi}{dG}, \qquad \frac{d\rho}{dG} \equiv -\frac{d^2\Pi}{dG^2} \neq 0. \tag{31}$$

С учетом (31) из (3) следует, что потенциал G должен удовлетворять условию

$$(\vec{v}\nabla)G = 0. \tag{32}$$

Пусть внешнее поле плоское

$$G = G(z). \tag{33}$$

Подставляя (33) в (32), получим

$$v_z = 0. \tag{34}$$

С учетом (34) решение уравнения неразрывности (2) представим в виде

$$v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad \psi = \psi(x, y, z). \tag{35}$$

В соотношениях (35) функция тока $\psi(x, y, z)$ произвольным образом зависит от своих аргументов. Пусть внешнее поле сферическое

$$G = G(R), \tag{36}$$

где R - расстояние от центра. Учитывая (36) в условии (32), получаем

$$v_R = 0. \tag{37}$$

С учетом (37) решение уравнения неразрывности (2) запишем в виде

$$v_\theta = \frac{\partial\psi}{R^2 \sin\Theta\partial\varphi}, \quad v_\varphi = -\frac{\partial\psi}{R^2\partial\Theta},$$

$$\psi = \psi(R, \Theta, \varphi). \tag{38}$$

Здесь функция тока $\psi(R, \Theta, \varphi)$ долна иметь период 2π по аргументу φ.

2. Пусть стратификация магнитного поля отлична от альфвеновской:

$$k_{\text{н}} \neq 1 \longrightarrow f^2 \neq 4\pi\rho. \tag{39}$$

Пусть

$$s = \text{sign}(\frac{\rho}{\rho_0} - \frac{f^2}{4\pi\rho_0}). \tag{40}$$

Умножим левую и правую части уравнения (11) на s и введем модифицированную скорость $\vec{U}$ следующим образом:

$$\vec{v} = \frac{\vec{U}}{\sqrt{s(\frac{\rho}{\rho_0} - \frac{f^2}{4\pi\rho_0})}}. \tag{41}$$

В результате уравнение (11) преобразуем к виду

$$\nabla\frac{s\rho w}{\rho_0} = \vec{U} \times \text{rot}\vec{U} + s\Phi\nabla\frac{\rho}{\rho_0} -$$

$$-\frac{s\rho}{\rho_0\sqrt{s(\frac{\rho}{\rho_0} - \frac{f^2}{4\pi\rho_0})}}\vec{U} \times \text{rot}\vec{W}. \tag{42}$$

Применяя к левой и правой частям соотношения (41) операцию дивергенции, с учетом уравнений (2), (3) и (8) запишем

$$\text{div}\vec{U} = 0. \tag{43}$$

Умножая левую и правую части уравнений (3) и (8) на $\sqrt{s[(\rho/\rho_0) - (f^2/4\pi\rho_0)]}$, с учетом определения (41) имеем

$$(\vec{U}\nabla)\rho = 0, \tag{44}$$

$$(\vec{U}\nabla)f = 0. \tag{45}$$

Таким образом получаем, что при выполнении соотношений (7) и (39) задача (1)-(6) сводится к системе трех скалярных уравнений (43)-(45) и одного векторного уравнения (42), служащей для определения трех скалярных величин w, ρ и f и вектора модифицированной скорости $\vec{U}$. Если величины w, ρ, f и $\vec{U}$ найдены, то скорость, магнитное поле и давление определим с помощью соотношений (41), (7) и (6) соответственно.

Пусть

$$G = 0, \quad \vec{W} = 0.$$

Тогда уравнение (42) упрощается и принимает вид

$$\nabla w_{s\rho} = \vec{U} \times \text{rot}\vec{U}, \quad w_{s\rho} \equiv \frac{s\rho w}{\rho_0}. \tag{46}$$

Уравнения (43) и (46) в математическом отношении совпадают с уравнениями гидродинамики несжимаемой невязкой жидкости в стационарном случае. Это обстоятельство позволяет сформулировать следующую теорему.

ТЕОРЕМА СООТВЕТСТВИЯ. Каждому решению уравнений гидродинамики несжимаемой невязкой жидкости в стационарном случае

$$\nabla w_h = \vec{u} \times \mathrm{rot}\vec{u}, \quad \mathrm{div}\vec{u} = 0 \tag{47}$$

соответствует следующее решение системы уравнений (1)-(6):

$$\vec{v} = \frac{\vec{u}}{\sqrt{s(\frac{\rho}{\rho_0} - \frac{f^2}{4\pi\rho_0})}}, \quad \vec{H} = \frac{f\vec{u}}{\sqrt{s(\frac{\rho}{\rho_0} - \frac{f^2}{4\pi\rho_0})}},$$

$$\Phi_e = 0, \qquad (\vec{u}\nabla)\{\rho, f\} = 0.$$

$$p = \rho[\frac{s\rho_0(w^0_{s\rho} + w_h)}{\rho} - \frac{\vec{v}^2}{2}], \tag{48}$$

Здесь $w^0_{s\rho}$- постоянная.

Для системы (43) и (46) отметим два случая, когда задача сводится к решению линейных уравнений. Пусть вектор $\vec{U}$ потенциальный

$$\vec{U} = \nabla\Omega. \tag{49}$$

Тогда из (43) и (46) следует

$$w = \frac{\rho_0}{\rho}w_0, \quad w_0 = \mathrm{const}, \tag{50}$$

$$\Delta\Omega = 0. \tag{51}$$

Здесь Δ - оператор Лапласа.

Пусть вектор $\vec{U}$ удовлетворяет уравнению Громеки-Жуковского [29, 30] с постоянным коэффициентом спиральности β_0:

$$\mathrm{rot}\vec{U} = \beta_0\vec{U}, \quad \beta_0 = \mathrm{const} \neq 0. \tag{52}$$

Тогда из (46) следует соотношение (50). Пусть коэффициенты Ламе ортогональной системы координат (x_1, x_2, x_3) удовлетворяют условиям

$$h_1 = 1, \qquad \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{h_2}{h_3} = 0. \tag{53}$$

Тогда справедливо следующее представление решения уравнения Громеки-Жуковского (52) [29]:

$$\vec{U} = \nabla\frac{\partial(qS)}{\partial x_1} + \beta_0\mathrm{rot}(qS\vec{e}_1) + \beta_0^2 qS\vec{e}_1,$$

$$q = q(x_1) \tag{54}$$

$$(\Delta^* + \beta_0^2)(qS) = 0,$$

$$\Delta^* = \Delta - \frac{\partial(h_2h_3)}{h_2h_3\partial x_1\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_1}. \tag{55}$$

Здесь, по-прежнему, Δ - оператор Лапласа. К числу ортогональных систем координат, коэффициенты Ламе которых удовлетворяют условиям (53) и переменные в которых разделяются, относятся прямоугольная, цилиндрические (круговая, эллиптическая и параболическая), сферическая и коническая системы. Полагая в случае прямоугольной и указанных трех цилиндрических систем у координат $x_1 = z$, $q = 1$, где z – прямолинейная координата, а в случае сферической и конической систем $x_1 = R$, $q = R$, где R – расстояние от центра, из (55) получаем уравнение Гельмгольца:

$$(\Delta + \beta_0^2)S = 0. \tag{56}$$

Решая в первом случае уравнение Лапласа (51), а во втором - уравнение Гельмгольца (56), соответственно с помощью (49) и (54) определим поля $\vec{U}$. Зная $\vec{U}$, поля величин ρ и f определим из линейных уравнений (44) и (45). Далее с помощью соотношений (41), (7) и (29) определим поля $\vec{v}$, $\vec{H}$ и p соответственно.

В заключение данного параграфа отметим случай сводимости задачи к линейному уравнению для системы уравнений (42)-(45). А именно, система уравнений (42)-(45) будет удовлетворена, если имеют место соотношения

$$\mathrm{rot}\vec{U} - \beta_0\vec{U} = -\frac{2s\omega_*\vec{e}_*}{\sqrt{s(1 - \frac{f_0^2}{4\pi\rho_0})}}, \quad \beta_0 = \mathrm{const},$$

$$\rho = \rho_0 = \mathrm{const}, \quad f = f_0 = \mathrm{const},$$

$$w = w_0 = \mathrm{const}. \tag{57}$$

Общее решение уравнения (57) имеет вид

$$\vec{U} = \frac{2s\omega_*\vec{e}_*}{\beta_0\sqrt{s(1 - \frac{f_0^2}{4\pi\rho_0})}} + \nabla\frac{\partial(qS)}{\partial x_1} +$$

$$+\beta_0\mathrm{rot}(qS\vec{e}_1) + \beta_0^2 qS\vec{e}_1. \tag{58}$$

Здесь обобщенный потенциал S удовлетворяет уравнению Гельмгольца (56), при этом координата x_1 и функция $q(x_1)$ должны выбираться как указано выше.

Отметим, что в работе [29] в конце абзаца, следующего сразу за формулой (1.9) на стр. 98, вместо [5] должно быть [15].

2. ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА

Обратимся к системе соотношений (2), (3), (7), (8), (11) и (39). Пусть величины $\vec{v}$, $\vec{H}$, p, ρ и коэффициенты Ламе h_1, h_2, h_3 ортогональной системы координат (x_1, x_2, x_3) не зависят от координаты x_3. Решая тогда уравнение неразрывности (2), вводим функцию тока

$$\vec{v} = \nabla\psi \times \frac{\vec{e}_3}{h_3} + h_3 v_3 \frac{\vec{e}_3}{h_3}. \qquad (59)$$

Здесь $\vec{e}_3$ - орт, касательный координатной линии x_3. Учитывая выражение (59) в уравнениях (3), (8), а также в третьей компоненте уравнения (11), будем иметь

$$\rho = \rho(\psi), \qquad f = f(\psi),$$

$$h_3\big[(1 - \frac{f^2}{4\pi\rho})v_3 - W_3\big] = (1 - \frac{f^2}{4\pi\rho})q_3(\psi). \qquad (60)$$

Здесь ρ, f и q_3 - произвольные функции своего аргумента. Из первых двух компонент уравнения движения (11) с учетом (59) и (60) получаем

$$(\rho - \frac{f^2}{4\pi})D^*\psi + (\frac{d\rho}{2d\psi} - \frac{ff'}{4\pi})(\nabla\psi)^2 +$$

$$+\rho h_3 \mathrm{rot}_3\vec{W} + h_3 v_3 \frac{d}{d\psi}\big[(1 - \frac{f^2}{4\pi\rho})q_3\big] +$$

$$+h_3^2 v_3^2(\frac{d\rho}{2d\psi} - \frac{f^2}{4\pi\rho}\frac{d\rho}{d\psi} + \frac{ff'}{4\pi}) +$$

$$+h_3^2\Phi\frac{d\rho}{d\psi} - h_3^2\frac{d(\rho w)}{d\psi} = 0, \qquad (61)$$

$$D^* = \frac{h_3}{h_1 h_2}(\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{h_2}{h_3 h_1}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{h_1}{h_3 h_2}\frac{\partial}{\partial x_2}), \qquad (62)$$

$$w = w(\psi). \qquad (63)$$

Здесь w – произвольная функция своего аргумента, штрих означает дифференцирование по своему аргументу. Таким образом, с учетом соотношений (60) получаем, что задача (1)-(6) сведена к одному нелинейному дифференциальному уравнению в частных производных второго порядка (61), служащему для определения функции тока ψ. Умножим левую и правую части уравнения (61) на величину s, определяемую согласно (40), разделим левую и правую части получившегося уравнения на $\sqrt{s[\rho - (f^2/4\pi)]}$ и введем модифицированную функцию тока следующим образом:

$$F = \int \sqrt{s(\frac{\rho}{\rho_0} - \frac{f^2}{4\pi\rho_0})}d\psi. \qquad (64)$$

В результате приходим к следующему уравнению для модифицированной функции тока F:

$$D^*F + s\{\frac{\rho}{\sqrt{s\rho_0(\rho - \frac{f^2}{4\pi})}}h_3\mathrm{rot}_3\vec{W} +$$

$$+h_3 v_3\frac{\rho}{\rho_0}\frac{d}{dF}\big[(1 - \frac{f^2}{4\pi\rho})q_3\big] +$$

$$+\frac{h_3^2 v_3^2}{\rho_0}\big[\frac{1}{2}\frac{d}{dF}(\rho + \frac{f^2}{4\pi}) - \frac{f^2}{4\pi\rho}\frac{d\rho}{dF}\big] +$$

$$+\frac{h_3^2\Phi}{\rho_0}\frac{d\rho}{dF} - \frac{h_3^2}{\rho_0}\frac{d(\rho w)}{dF}\} = 0. \qquad (65)$$

Учитывая в (65) выражение (60) для $h_3 v_3$, будем иметь

$$D^*F + s\{\frac{1}{2\rho_0}\frac{d}{dF}\big[(\rho - \frac{f^2}{4\pi})q_3^2\big] +$$

$$+h_3 W_3\frac{1}{\rho_0}\frac{d(\rho q_3)}{dF} - h_3^2\frac{d}{dF}\frac{\rho w}{\rho_0} + \frac{h_3^2\Phi}{\rho_0}\frac{d\rho}{dF} +$$

$$+\frac{(h_3 W_3)^2}{2}\frac{1}{\rho_0(1 - \frac{f^2}{4\pi\rho})^2}\big[(1 - \frac{f^2}{2\pi\rho})\frac{d\rho}{dF} + \frac{d}{dF}\frac{f^2}{4\pi}\big] +$$

$$+\frac{\rho}{\sqrt{s\rho_0(\rho - \frac{f^2}{4\pi})}}h_3\mathrm{rot}_3\vec{W}\} = 0. \qquad (66)$$

Пусть вращение отсутствует ($\vec{W} = 0$). Тогда уравнение (66) значительно упрощается и принимает вид

$$D^*F + \frac{s}{\rho_0}\{h_3^2\Phi\frac{d\rho}{dF} - h_3^2\frac{d(\rho w)}{dF} +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{d}{dF}\big[(\rho - \frac{f^2}{4\pi})q_3^2\big]\} = 0. \qquad (67)$$

Пусть магнитное поле отсутствует,

$$f = 0 \longrightarrow s = 1, \quad h_3 v_3 = q_3 + h_3 W_3. \qquad (68)$$

Тогда уравнение (66) также существенно упрощается и приобретает форму

$$D^*F + \frac{d}{dF}\frac{\rho q_3^2}{2\rho_0} + h_3 W_3\frac{d}{dF}\frac{\rho q_3}{\rho_0} - h_3^2\frac{d}{dF}\frac{\rho w}{\rho_0} +$$

$$+h_3^2(\frac{W_3^2}{2} + \Phi)\frac{d}{dF}\frac{\rho}{\rho_0} + \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}}h_3\mathrm{rot}_3\vec{W} = 0. \qquad (69)$$

Уравнение для модифицированной функции тока в гидродинамике вращающейся стратифицированной по плотности непроводящей невязкой жидкости ранее получено в [30, см. уравнение (6, 7) гл.II]. Следует отметить, что оно содержит опечатки. А именно, в последнем слагаемом правой части выражения (6.7) пропущены множитель "h_3", а также знак корня под интегралом. С учетом указанных опечаток уравнение (6.7) главы II монографии [30] и уравнение (69) идентичны. В декартовой системе координат $(z,x,y) x_1 \equiv z, x_2 \equiv x, x_3 \equiv y$ при $q_3 = 0, \vec{W} = 0, \Phi = gz$, где g - ускорение силы тяжести, соотношение (69) переходит в уравнение Йи [49].

Можно указать специализации величин $\rho(F)$, $f(F)$, $q_3(F)$, $w(F)$, $\Phi(x)$ и $W(x)$, когда уравнение (66) становится линейным. Далее для простоты рассмотрим случай отсутствия вращения, когда уравнение (66) принимает вид (67). Пусть выполнены одни из условий

$$\Phi = 0, \qquad h_3 = 1; \tag{70}$$

$$\Phi = 0, \qquad \nabla h_3 \neq 0; \tag{71}$$

$$\nabla\Phi \neq 0, \qquad h_3 = 1; \tag{72}$$

$$\nabla\Phi \neq 0, \qquad \nabla h_3 \neq 0. \tag{73}$$

Пусть, далее, квадратичными полиномами модифицированной функции тока F являются величины:

$$[\rho w + \frac{1}{2}(\frac{f^2}{4\pi} - \rho)q_3^2] \qquad - \text{в} \quad \text{случае} \quad (70);$$

$$\rho w \quad \text{и} \quad (\frac{f^2}{4\pi} - \rho)q_3^2 \quad - \text{в} \quad \text{случае} \quad (71);$$

$$\rho \quad \text{и} \quad [\rho w + \frac{1}{2}(\frac{f^2}{4\pi} - \rho)q_3^2] \quad - \text{в} \quad \text{случае} \quad (72);$$

$$\rho, \quad \rho w \quad \text{и} \quad (\frac{f^2}{4\pi} - \rho)q_3^2 \quad - \text{в} \quad \text{случае} \quad (73).$$

Тогда уравнение (67) становится линейным неоднородным. Если в выражениях для указанных величин отсутствуют слагаемые, линейные по F, то уравнение (67) становится линейным однородным.

3. АНАЛОГ ВИХРЯ ХИЛЛА

Гидродинамиков уже давно привлекают методы, в которых склеиваются различные режимы течений в различных зонах, а физические факторы учитываются на сравнительно небольших участках. Достаточно отметить сферический вихрь Хилла [5, 17], цилиндрический вихрь Ламба-Чаплыгина [17, 36] и эллиптический вихрь Кирхгофа [5]. Идея использования вихрепотенциальных течений в качестве модели отрывных течений получила развитие в работах Бэтчелора [5], М.А. Лаврентьева и Б.В. Шабата [16], М.А. Гольдштика [8] и ряде других. В работе Садовского [27] с использованием единого аналитико-расчетного метода исследованы и систематизированы многие классы плоских стационарных вихрепотенциальных течений невязкой жидкости для ограниченных и неограниченных областей. В данном параграфе на основе уравнения для модифицированной функции тока получено магнитогидродинамическое обобщение вихря Хилла при наличии стратификации жидкости по плотности.

Рассмотрение проведем в сферических координатах (R,Θ,φ). Как и в случае обычного вихря Хилла, область течения разбиваем на подобласти $0 \leq R \leq R_2$ и $R_2 \leq R \leq \infty$. Предполагаем выполненными условия:

$$q_3 \equiv p_\varphi = 0; \quad \Phi = 0, \quad 0 \leq R \leq \infty;$$

$$\frac{\rho w}{\rho_0} = w_0 - 10 b_0 F, \quad 0 \leq R \leq R_2;$$

$$\frac{\rho w}{\rho_0} = w_{01}, \qquad R_2 \leq R \leq \infty. \tag{74}$$

Здесь b_0, w_0 и w_{01} – постоянные. Тогда уравнение (67) принимает, соответственно, следующий вид:

$$(\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{\sin\Theta}{R^2}\frac{\partial}{\partial\Theta}\frac{1}{\sin\Theta}\frac{\partial}{\partial\Theta})F = -10 s b_0 R^2 \sin^2\Theta,$$

$$0 \leq R \leq R_2 \tag{75}$$

$$(\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{\sin\Theta}{R^2}\frac{\partial}{\partial\Theta}\frac{1}{\sin\Theta}\frac{\partial}{\partial\Theta})F = 0,$$

$$R_2 \leq R \leq \infty. \tag{76}$$

Рассмотрим следующие частные решения уравнений (75) и (76) соответственно:

$$F = (C_1 R^2 + \frac{C_2}{R} - s b_0 R^4)\sin^2\Theta, \tag{77}$$

$$F = (D_1 R^2 + \frac{D_2}{R})\sin^2\Theta. \tag{78}$$

Здесь C_1, C_2, D_1 и D_2 - произвольные постоянные. С помощью решений (77) и (78) удовлетворяем следующим условиям при $R = 0$, предельным и краевым условиям:

$$R = 0, \quad \{\vec{v}, \vec{H}, p\} < \infty;$$

$$\Theta = 0, \quad R \longrightarrow \infty, \quad v_R \longrightarrow U_\infty;$$

$$\Theta = \pi, \quad R \longrightarrow \infty, \quad v_R \longrightarrow -U_\infty$$

$$R \longrightarrow \infty, \qquad p \longrightarrow p_\infty^0$$

$$R = R_2, \quad v_R = 0, \quad [\rho, f, H_\theta, p + \frac{\vec{H}^2}{8\pi}] = 0 \tag{79}$$

Здесь квадратные скобки означают скачок заключенной в ней величины на поверхности $R = R_2(F=0)$. В результате получим следующие выражения для физических величин в указанных выше подобластях:

$\underline{0 \le R \le R_2}$

$$F = -\frac{3ss_0U_\infty}{4R_2^2}\sqrt{s_0(1-k_{\text{н}0}^2)}R^2(R_2^2-R^2)\sin^2\Theta, \quad (80)$$

$$v_R = -\frac{3ss_0U_\infty}{2R_2^2}\frac{\sqrt{s_0\rho_0(1-k_{\text{н}0}^2)}}{\sqrt{s\rho(1-k_{\text{н}}^2)}}(R_2^2-R^2)\cos\Theta, \quad (81)$$

$$v_\Theta = \frac{3ss_0U_\infty}{2R_2^2}\frac{\sqrt{s_0\rho_0(1-k_{\text{н}0}^2)}}{\sqrt{s\rho(1-k_{\text{н}}^2)}}(R_2^2-2R^2)\sin\Theta, \quad (82)$$

$$p = p_\infty^0 + \frac{\rho_0}{2}U_\infty^2 + \frac{15s_0\rho_0U_\infty}{2R_2^2}\sqrt{s_0(1-k_{\text{н}0}^2)}F - -\frac{\rho}{2}(v_R^2+v_\theta^2). \quad (83)$$

$\underline{R_2 \le R \le \infty}$

$$F = \frac{U_\infty}{2}\sqrt{s_0(1-k_{\text{н}0}^2)}(R^2-\frac{R_2^3}{R})\sin^2\Theta, \quad (84)$$

$$v_R = U_\infty\frac{\sqrt{s_0\rho_0(1-k_{\text{н}0}^2)}}{\sqrt{s\rho(1-k_{\text{н}}^2)}}(1-\frac{R_2^3}{R^3})\cos\Theta, \quad (85)$$

$$v_\theta = -U_\infty\frac{\sqrt{s_0\rho_0(1-k_{\text{н}0}^2)}}{\sqrt{s\rho(1-k_{\text{н}}^2)}}(1+\frac{R_2^3}{2R^3})\sin\Theta, \quad (86)$$

$$p = p_\infty^0 + \frac{\rho_0}{2}U_\infty^2 - \frac{\rho}{2}(v_r^2+v_\theta^2), \quad (87)$$

$$k_{\text{н}0} = \frac{f_0}{\sqrt{4\pi\rho_0}}; \qquad \rho_0 = \rho\big|_{F=0},$$

$$f_0 = f\big|_{F=0}, \qquad s_0 = \text{sign}(1-k_{\text{н}0}^2). \quad (88)$$

Здесь величины $k_{\text{н}}$ и s определяются согласно (10) и (40) соответственно. Отметим, что для магнитного поля в обеих подобластях справедливо выражение (7). В случае отсутствия магнитного поля ($f=0$) и стратификации жидкости ($\rho=\rho_0=$const) решение (80)-(88) переходит в решение, описывающее вихрь Хилла [5, 17].

4. ВОЛНЫ КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ В ЗАМАГНИЧЕННОМ ПЛОСКОМ СЛОЕ НЕОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ

Пусть $h_3 = 1(x_3 \equiv z)$. Тогда уравнение (67) принимает вид

$$\Delta F + \frac{s}{\rho_0}\big[\Phi\frac{d\rho}{dF} - \frac{d}{dF}(\rho w_\perp + \frac{H_z^2}{8\pi})\big] = 0, \quad (89)$$

$$w_\perp(\psi) = w(\psi) - \frac{v_z^2(\psi)}{2}, \quad H_z(\psi) = f(\psi)v_z(\psi). \quad (90)$$

Пусть вектор силы тяжести направлен вдоль оси $x_2 \equiv y$ ($\Phi = gy$, g - ускорение силы тяжести), а величины ρ и $[\rho w_\perp + (H_z^2/8\pi)]$ являются квадратичными полиномами модифицированной функции тока F:

$$\rho = \rho_0(1+\frac{b}{2}F+\frac{a}{2}F^2), \quad (91)$$

$$\rho w_\perp + \frac{H_z^2}{8\pi} = \rho_0\big(w_\perp^0 + \frac{H_{z0}^2}{8\pi\rho_0} - b_0F - \frac{a_0}{2}F^2\big). \quad (92)$$

Здесь ρ_0, b, a, $w_\perp^0$, H_{z0}, b_0 и a_0 - постоянные. Подставляя (91) и (92) в (89), приходим к следующему линейному неоднородному уравнению для определения модифицированной функции тока F:

$$\Delta F + s(a_0+gay)F + s(b_0+\frac{gb}{2}x_2) = 0. \quad (93)$$

Пусть $a=0$. Тогда соотношения (91) и (93) несколько упрощаются:

$$\rho = \rho_0(1+\frac{b}{2}F), \quad (94)$$

$$\Delta F + sa_0F = -sb_0 - \frac{sgb}{2}y. \quad (95)$$

На основе уравнения (95) рассмотрим распространение волн конечной амплитуды в замагниченном слое неоднородной жидкости. Ось y перпендикулярна слою, толщина слоя l_2, волна распространяется вдоль оси $x(x_1 \equiv x)$. Рассмотрение проведем в системе отсчета, связанной с волной. На границах слоя заданы условия "твердых крышек":

$$y = 0, l_2; \qquad v_y = 0. \quad (96)$$

Пусть параметр a_0 удовлетворяет условию

$$\frac{n_*^2\pi^2}{l_2^2} < sa_0 < \frac{(n_*+1)^2\pi^2}{l_2^2}, \quad n_* \ge 1. \quad (97)$$

Тогда запишем следующее частное решение уравнения (95), удовлетворяющее условиям (96):

$$F = -\frac{b_0}{a_0} - \frac{gb}{2a_0}y + \sum_{n=1}^{n_*}C_n\sin\frac{n\pi}{l_2}y\sin\Big[\sqrt{sa_0-\frac{n^2\pi^2}{l_2^2}}x+\varphi_n\Big]. \quad (98)$$

Здесь C_n и φ_n - постоянные. Пусть выполнены условия

$$v_z = v_{z0} = \text{const},$$

$$f = f_0 = \text{const} \to H_z = H_{z0} = \text{const}. \qquad (99)$$

В результате для вектора скорости имеем следующее выражение:

$$\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{s\big(1 + \frac{b}{2}F - \frac{H_{z0}^2}{4\pi\rho_0 v_{zo}^2}\big)}} \nabla F \times \vec{e}_y + v_{z0}\vec{e}_z. \quad (100)$$

Рассмотрим "фоновое" решение, соответствующее случаю $C_n = 0$, $n = 1, \ldots, n_*$ в выражении (98). Для скорости $\vec{v}_f$ фонового решения согласно (98) и (100) имеем

$$\vec{v}_f = \frac{1}{\sqrt{s\big(1 - \frac{bb_0}{2a_0} - \frac{gb^2}{4a_0}y - \frac{H_{z0}^2}{4\pi\rho_0 v_{z0}^2}\big)}} \frac{gb}{2a_0}\vec{e}_x + $$
$$+ v_{z0}\vec{e}_z. \qquad (101)$$

Пусть в лабораторной системе отсчета жидкость при $y = y_*$ покоится. Тогда согласно (101) имеем

$$V_\Phi = -\frac{1}{\sqrt{s_*\big(1 - \frac{bb_0}{2a_0} - \frac{gb^2}{4a_0}y_* - \frac{H_{z0}^2}{4\pi\rho_0 v_{z0}^2}\big)}} \frac{gb}{2a_0},$$

$$s_* = \text{sign}\big(1 - \frac{bb_0}{2a_0} - \frac{gb^2}{4a_0}y_* - \frac{H_{z0}^2}{4\pi\rho_0 v_{z0}^2}\big), \qquad (102)$$

где V_Φ– фазовая скорость распространения волны. Учитывая выражение (102) в (101), запишем

$$\vec{v}_f = -V_\Phi \frac{\sqrt{s_*\big(1 - \frac{bb_0}{2a_0} - \frac{gb^2}{4a_0}y_* - \frac{H_{z0}^2}{4\pi\rho_0 v_{z0}^2}\big)}}{\sqrt{s\big(1 - \frac{bb_0}{2a_0} - \frac{gb^2}{4a_0}y - \frac{H_{z0}^2}{4\pi\rho_0 v_{z0}^2}\big)}} \vec{e}_x +$$
$$+ v_{z0}\vec{e}_z \qquad (103)$$

Введем в рассмотрение локальную частоту Брента-Вяйсяля

$$N_*^2 = \Big|\frac{g d\rho_f}{\rho_f dy}\Big|_{y=y_*}, \qquad (104)$$

где ρ_f - плотность жидкости в фоновом решении:

$$\rho_f = \rho_0\big(1 - \frac{bb_0}{2a_0} - \frac{gb^2}{4a_0}y\big). \qquad (105)$$

Учитывая выражение (105) в (104), запишем

$$N_*^2 = \frac{g^2 b^2}{4 s_* a_0\big(1 - \frac{bb_0}{2a_0} - \frac{gb^2}{4a_0}y_*\big)}. \qquad (106)$$

Комбинируя (106) и (102), можно получить:

$$s a_0 = \frac{N_*^2}{V_\Phi^2 s_*\big(1 - \frac{H_{z0}^2}{4\pi\rho_* v_{z0}^2}\big)}. \qquad (107)$$

Как было отмечено выше, условием распространения n -й гармоники в слое является

$$s a_0 > \frac{n^2\pi^2}{l_2^2}. \qquad (108)$$

Учитывая соотношение (107) в (108), этому условию придадим вид

$$\frac{N_* l_2}{n\pi V_\Phi \sqrt{s_*\big(1 - \frac{H_{z0}^2}{4\pi\rho_* v_{z0}^2}\big)}} > 1. \qquad (109)$$

При $H_{z0} = 0$ условие (109) переходит в условие (13.87) монографии [28]. Далее будут получены и проанализированы различные формы дисперсионного соотношения, характеризующие рассматриваемые волны. Согласно (98),

$$\sqrt{s a_0 - \frac{n^2\pi^2}{l_2^2}} = k_x, \qquad (110)$$

где k_x - волновое число. Возведем левую и правую части соотношения (110) в квадрат и учтем выражение (107). В результате получим следующее дисперстонное соотношение в переменных "волновое число - фазовая скорость":

$$\gamma_{vn}^{\text{н}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \kappa_{xn}^2}},$$

$$\gamma_{vn}^{H} \equiv \frac{n\pi V_\Phi}{l_2 N_*}\sqrt{s_*\big(1 - \frac{H_{z0}^2}{4\pi\rho_* v_{z0}^2}\big)},$$

$$\kappa_{xn} \equiv \frac{k_x l_2}{n\pi}. \qquad (111)$$

Учтем в выражении (111) связь

$$\omega = k_x V_\Phi, \qquad (112)$$

где ω - частота волны. В результате на основе соотношений (112) и (111) получаем дисперсионное соотношение в переменных "волновое число - частота":

$$\gamma_\omega^{\text{н}} = \frac{\kappa_{xn}}{\sqrt{1 + \kappa_{xn}^2}},$$

$$\gamma_\omega^{\text{н}} \equiv \frac{\omega}{N_*}\sqrt{s_*\big(1 - \frac{H_{z0}^2}{4\pi\rho_* v_{z0}^2}\big)}. \qquad (113)$$

Дисперсионные соотношения (111) и (113) полностью аналогичны известным дисперсионым соотношениям теории линейных [4, 19, 20] и нелинейных [28, 31] внутренних гравитационных и гироскопических волн. При отсутствии магнитного поля ($H_{z0} = 0$) дисперсионные соотношения (111) и (113) переходят в последние.

Зависимости фазовой скорости и частоты от магнитного поля и номера гармоники "n" в дисперсионных соотношениях (111) и (113) завуалированы. Преобразуя соотношения (111) и (113), выделяем эти зависимости в явном виде:

$$\gamma_v = K_{\text{н}} K_v^n,$$

$$\gamma_\omega = K_{\text{н}} K_\omega^n,$$

$$K_{\text{н}} = \frac{1}{\sqrt{s_*(1-\varepsilon_{\text{н}}^2)}}, \quad K_v^n \equiv \frac{1}{\sqrt{n^2+\kappa_x^2}},$$

$$K_\omega^n = \frac{\kappa_x}{\sqrt{n^2+\kappa_x^2}},$$

$$\gamma_v \equiv \frac{V_\Phi}{l_2 N_*}, \qquad \gamma_\omega = \frac{\omega}{N_*},$$

$$\varepsilon_{\text{н}} \equiv \frac{/H_{z0}/}{\sqrt{4\pi\rho_*/v_{z0}/}}, \quad \kappa_x \equiv \frac{k_x l_2}{\pi}. \tag{114}$$

Входящие в соотношения (114) зависимости $K_{\text{н}}(\varepsilon_{\text{н}})$, $K_v^n(\kappa_x)$ и $K_\omega^n(\kappa_x)$ представлены, соответственно, на рис. 1-3.

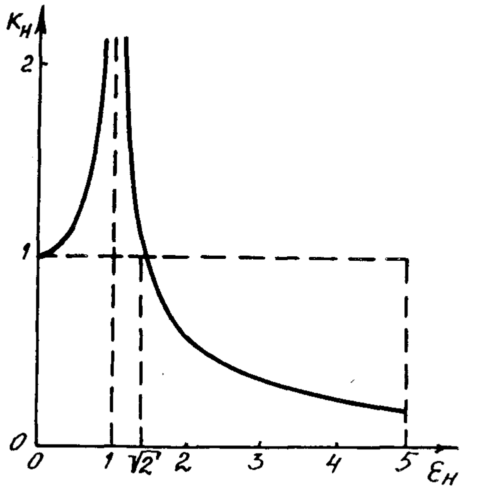

Рис. 1. Влияние магнитного поля на фазовую скорость и частоту

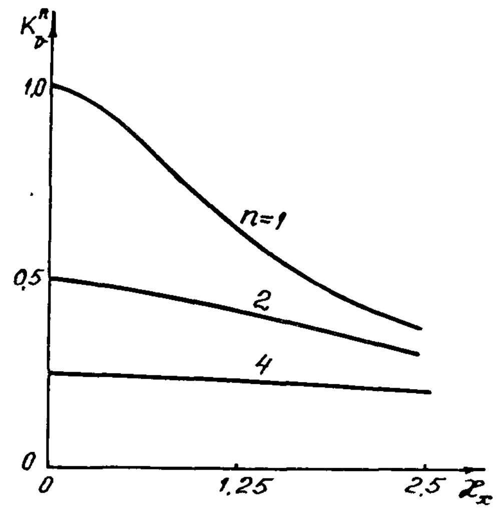

Рис. 2. Зависимость фазовой скорости от волнового числа при $K_H = 1$

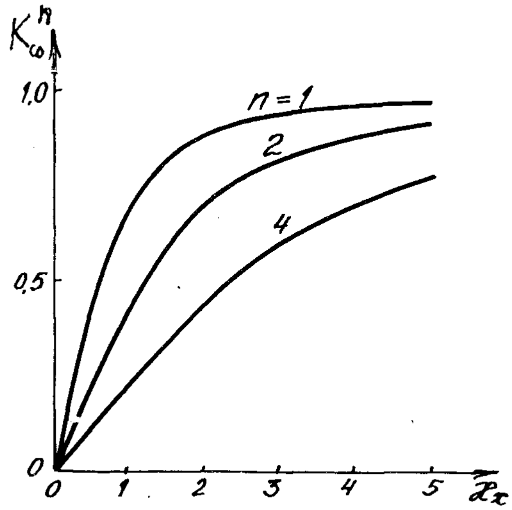

Рис. 3. Зависимость частоты от волнового числа при $K_H = 1$

Из выражений (114) и рис. 1 можно видеть, что при $\varepsilon_{\text{н}} < 1$ безмерные фазовая скорость γ_v и частота γ_ω являются нарастающими функциями напряженности магнитного поля H_{z0}, при $\varepsilon_{\text{н}} > 1$ - убывающими функциями указанного параметра. При этом для $0 < \varepsilon_{\text{н}} < \sqrt{2}$ имеем $K_{\text{н}} > 1$, для $\varepsilon_{\text{н}} > \sqrt{2} - k_{\text{н}} < 1$. Из выражений (114) и рис. 2 и 3 следует, что величины γ_v и γ_ω являются убывающими функциями номера гармоники "n". Отметим, что при $\varepsilon_{\text{н}} = 0$ и $\sqrt{2}$ имеем $\gamma_v = K_v^n$, $\gamma_\omega = K_\omega^n$.

Учтем в выражении (113) связь

$$\lambda = \frac{2\pi}{k_x} \tag{115}$$

где λ - длина волны. В результате на основе соотношений (115) и (113) получаем дисперсионное соотношение в переменных "частота – длина волны":

$$n\gamma_\lambda = \frac{\sqrt{1-(\gamma^{\text{н}}_\omega)^2}}{\gamma^{\text{н}}_\omega}, \quad \gamma_\lambda \equiv \frac{\lambda}{2l_2}. \tag{116}$$

Зависимость длины волны от магнитного поля в дисперсионном соотношении (116) завуалирована. Преобразуя соотношение (116), выделяем эту зависимость в явном виде:

$$n\gamma_\lambda = \sqrt{\frac{K^2_{\text{н}}}{\gamma^2_\omega} - 1}. \tag{117}$$

Здесь величины $K_{\text{н}}$ и γ_ω определяются согласно уравнения (114). Как видим, условием распространения рассматриваемого типа волн является неравенство

$$\frac{\gamma_\omega}{K_{\text{н}}} > 1. \tag{118}$$

Решая соотношение (117) относительно γ_ω, имеем

$$\gamma_\omega = K_{\text{н}} \cdot K^n_\omega, \quad K^n_\omega = \frac{1}{\sqrt{1+n^2\gamma^2_\lambda}}. \tag{119}$$

Зависимости $K^n_\omega(\gamma_\lambda)$ изображены на рис. 4.

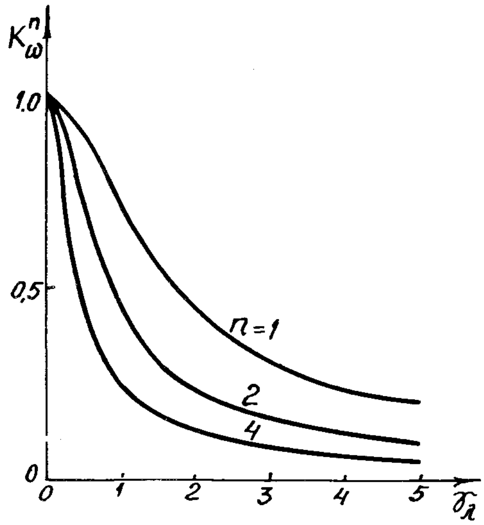

Рис. 4. Зависимость частоты от длины волны при $K_H = 1$

5. ВОЛНЫ КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ В ЗАМАГНИЧЕННОМ КРУГОВОМ СЛОЕ ОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ

Уравнение (67) в круговой цилиндрической системе координат (z, r, φ) при $\Phi = 0$ принимает вид

$$DF + s\Big\{\frac{1}{2\rho_0}\frac{d}{dF}\Big[\Big(\rho - \frac{f^2}{4\pi}\Big)p^2_\varphi\Big] - r^2\frac{d}{dF}\frac{\rho w}{\rho_0}\Big\} = 0,$$

$$D \equiv r\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad p_\varphi \equiv q_3. \tag{120}$$

Далее будут рассмотрены две специализации величин $p_\varphi(F)$, $\rho(F)$, $f(F)$ и $w(F)$, когда уравнение (120) становится линейным, и на основе соответствующих соотношений изучены волны конечной амплитуды в замагниченном круговом слое однородной жидкости.

1. Пусть

$$\rho = \rho_0, \qquad s\Big(1 - \frac{f^2}{4\pi\rho_0}\Big) = 1 + \frac{a}{2}F^2,$$

$$p_\varphi = p_{\varphi 0}, \qquad w = w_0 + b_0 f, \tag{121}$$

где $p_{\varphi 0}$ и w_0 - постоянные; a и b_0 - положительные постоянные. Можно видеть, что при положительном значении величины "a" второе из соотношений (121) возможно только при

$$s = -1. \tag{122}$$

Учитывая условие (122) во втором соотношении (121) и решая получившееся соотношение относительно f, будем иметь

$$f = \pm\sqrt{2\pi\rho(4 + aF^2)}. \tag{123}$$

Учитывая соотношения (121) и (122) в (120), для модифицированной функции тока получаем следующее линейное уравнение:

$$\Big(D + \frac{ap^2_{\varphi 0}}{2}\Big)F = -b_0 r^2. \tag{124}$$

Далее рассмотрим следующее частное решение уравнения (124):

$$F = -\frac{2b_0}{ap^2_{\varphi 0}}r^2 + r\big[A_1 J_1(\kappa r) +$$

$$+ A_2 N_1(\kappa r)\big]\cos k_z z, \tag{125}$$

$$\kappa^2 = \frac{ap^2_{\varphi 0}}{2} - k^2_z. \tag{126}$$

Здесь J_1 и N_1 - функции Бесселя и Неймана первого порядка, A_1 и A_2 - постоянные. На основе соотношений (59), (60), (64), (120), (121), (125) и (126) для компонент скорости получаем следующие выражения:

$$v_z = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{a}{2}F^2}}\Big\{ -\frac{4b_0}{ap^2_{\varphi 0}} + \kappa\big[A_1 J_0(\kappa r) +$$

$$+ A_2 N_0(\kappa r)\big]\cos k_z z\Big\}, \tag{127}$$

$$v_r = \frac{k_z}{\sqrt{1+\frac{a}{2}F^2}}\big[A_1 J_1(\kappa r) +$$

$$+A_2 N_1(\kappa r)]\sin k_z z, \qquad (128)$$

$$v_\varphi = \frac{p_{\varphi 0}}{r}. \qquad (129)$$

Пусть вращающийся цилиндрический слой жидкости ограничен твердыми стенками,

$$r = r_1, r_2, \qquad v_r = 0. \qquad (130)$$

Учитывая выражение (128) в условиях (130), приходим к дисперсионному соотношению

$$J_1(\kappa r_1)N_1(\varepsilon\kappa r_1) - N_1(\kappa r_1)J_1(\varepsilon\kappa r_1) = 0,$$

$$\varepsilon = \frac{r_2}{r_1}. \qquad (131)$$

Из соотношения (131) можно определить зависимость

$$\kappa r_1 = \alpha(\varepsilon). \qquad (132)$$

Соотношения (125)-(132) описывают в системе отсчета, связанной с волной, распространение вдоль оси z волн конечной амплитуды во вращающемся цилиндрическом слое однородной идеально проводящей жидкости с суперальфвеновской стратификацией магнитного поля. Придадим соотношению (132) вид, аналогичный виду дисперсионных соотношений для известных внутренних гравитационных и гироскопических волн [4, 19, 20, 28, 30]. Пусть суперальфвеновская стратификация магнитного поля мала:

$$\left(\frac{a}{2}F^2\right) << 1. \qquad (133)$$

Тогда из выражения (127) приближенно имеем

$$\frac{4b_0}{ap_{\varphi 0}^2} = V_\Phi, \qquad (134)$$

где V_Φ - фазовая скорость. Введем далее следующий магнитный аналог частоты Брента-Вяйсяля:

$$N_{cm}^2 = \frac{g_c}{\rho_0}\frac{d}{dr}\left(\frac{f^2}{4\pi}\right)\Big|_{r=r_1, A_1=0, A_2=0},$$

$$g_c = \frac{p_{\varphi 0}^2}{r_1^3}. \qquad (135)$$

Учитывая в (135) выражения (121) и (125), находим

$$N_{cm}^2 = \frac{8b_0^2}{ap_{\varphi 0}^2}. \qquad (136)$$

Исключая величину b_0 с помощью (134), имеем

$$\frac{ap_{\varphi 0}^2}{2} = \frac{N_{cm}^2}{V_\Phi^2}. \qquad (137)$$

Учитывая соотношения (137) и (132) в (126), запишем

$$\gamma_\omega^2 = \frac{\bar{k}_z^2}{\alpha^2(\varepsilon) + \bar{k}_z^2}, \quad \gamma_\omega = \frac{\omega}{N_{cm}},$$

$$\bar{k}_z = k_z r_1 \qquad (138)$$

Решая уравнения (138) относительно $\bar{k}_z$ и выражая в получившемся соотношении волновое число через длину волны, находим

$$\gamma_\lambda = \frac{\sqrt{1-\gamma_\omega^2}}{\alpha(\varepsilon)\gamma_\omega}, \quad \gamma_\lambda = \frac{\lambda}{2\pi r_1}. \qquad (139)$$

Сравнивая (138) и (139) с соответствующими зависимостями для известных внутренних гравитационных и гироскопических волн [4, 19, 20, 28, 30], убеждаемся в их полной аналогии.

2. Пусть

$$\rho = \rho_0, \quad f = f_0, \quad p_\varphi^2 = p_{\varphi 0}^2 + \kappa_0^2 F^2,$$

$$w = w_0 - b_0 F, \qquad (140)$$

где $p_{\varphi 0}$ и w_0– постоянные , κ_0^2 и b_0– положительные постоянные. Тогда уравнение (120) также становится линейным:

$$[D + s(1 - k_{\text{н}0}^2)\kappa_0^2]F = -b_0 r^2, \qquad (141)$$

где величина $k_{\text{н}0}$ определяется согласно первого соотношения (88). Частное решение уравнения (141) имеет вид

$$F = -\frac{b_0 r^2}{s_0(1-k_{\text{н}0}^2)\kappa_0^2} + r[A_1 J_1(\kappa r) +$$

$$+A_2 N_1(\kappa r)]\cos k_z z, \qquad (142)$$

$$\kappa^2 = s_0(1-k_{\text{н}0}^2)\kappa_0^2 - k_z^2. \qquad (143)$$

Здесь величины J_1, N_1, A_1 и A_2 имеют тот же смысл, что и в (125) . На основе формулы (142) получаем следующие выражения для компонент скорости:

$$v_z = -\frac{2b_0}{[s_0(1-k_{\text{н}0}^2)]^{3/2}\kappa_0^2} +$$

$$+\frac{\kappa}{\sqrt{s_0(1-k_{\text{н}0}^2)}}[A_1 J_0(\kappa r) +$$

$$+A_2 N_0(\kappa r)]\cos k_z z, \qquad (144)$$

$$v_r = \frac{k_z}{\sqrt{s_0(1-k_{\text{н}0}^2)}}[A_1 J_1(\kappa r) +$$

$$+A_2 N_1(\kappa r)]\sin k_z z, \qquad (145)$$

$$v_\varphi = \frac{\sqrt{p_{\varphi 0}^2 + \kappa_0^2 F^2}}{r}. \qquad (146)$$

Учитывая выражение (145) в условиях (130), приходим к соотношениям (131) и (132).

Соотношения (142)-(146), (131) и (132) описывают в системе отсчета, связанной с волной, распространение вдоль оси z волны конечной амплитуды в цилиндрическом слое идеально проводящей жидкости постоянной плотности с неоднородным по толщине слоя вращением, определяемым третьим из соотношений (140). Придадим и в данном случае выражению (132) вид, аналогичный виду дисперсионного соотношения для известных внутренних гравитационных и гироскопических волн [4, 19, 20, 28 - 31]. Из уравнения (144) имеем

$$\frac{2b_0}{[s(1-k_{\text{н}0}^2)]^{3/2}\kappa_0^2} = V_\Phi, \tag{147}$$

где V_Φ - фазовая скорость волны. Пусть заданы угловые скорости вращения жидкости при $r = r_1$, r_2:

$$\frac{v_\varphi}{r}\Big|_{r=r_1,r_2} = \omega_{*1}, \omega_{*2}. \tag{148}$$

Подставляя выражения (142) и (146) в условия (148), с учетом (130) имеем

$$p_{\varphi 0}^2 + \frac{r_1^4}{(1-k_{\text{н}0}^2)^2}\frac{b_0^2}{\kappa_0^2} = \omega_{*1}^2 r_1^4,$$

$$p_{\varphi 0}^2 + \frac{r_2^4}{(1-k_{\text{н}0}^2)^2}\frac{b_0^2}{\kappa_0^2} = \omega_{*2}^2 r_2^4. \tag{149}$$

Вычитая из левой и правой частей второго соотношения (149), соответственно, левую и правую части первого соотношения (149), получаем

$$\frac{r_2^4 - r_1^4}{(1-k_{\text{н}0}^2)^2}\frac{b_0^2}{\kappa_0^2} = \omega_{*2}^2 r_2^4 - \omega_{*1}^2 r_1^4. \tag{150}$$

Исключим величину b_0 из (150) с помощью (147) и из получившегося соотношения определим величину κ_0. В результате получаем:

$$\kappa_0 = \frac{2\Omega_*}{\sqrt{s_0(1-k_{\text{н}0}^2}V_\Phi}, \quad b_0 = \frac{2\sqrt{s_0(1-k_{\text{н}0}^2)}\Omega_*^2}{V_\Phi},$$

$$\Omega_* \equiv \sqrt{\frac{\omega_{*2}^2 r_2^4 - \omega_{*1}^2 r_1^4}{r_2^4 - r_1^4}}. \tag{151}$$

Учитывая выражение (151) в одном из соотношений (149), запишем

$$p_{\varphi 0}^2 = \frac{\omega_{*1}^2 - \omega_{*2}^2}{r_2^4 - r_1^4} r_1^4 r_2^4. \tag{152}$$

Из условий положительности правых частей соотношений (150) и (152) следуют неравенства

$$\frac{r_2^4}{r_1^4} > \frac{\omega_{*1}^2}{\omega_{*2}^2} > 1. \tag{153}$$

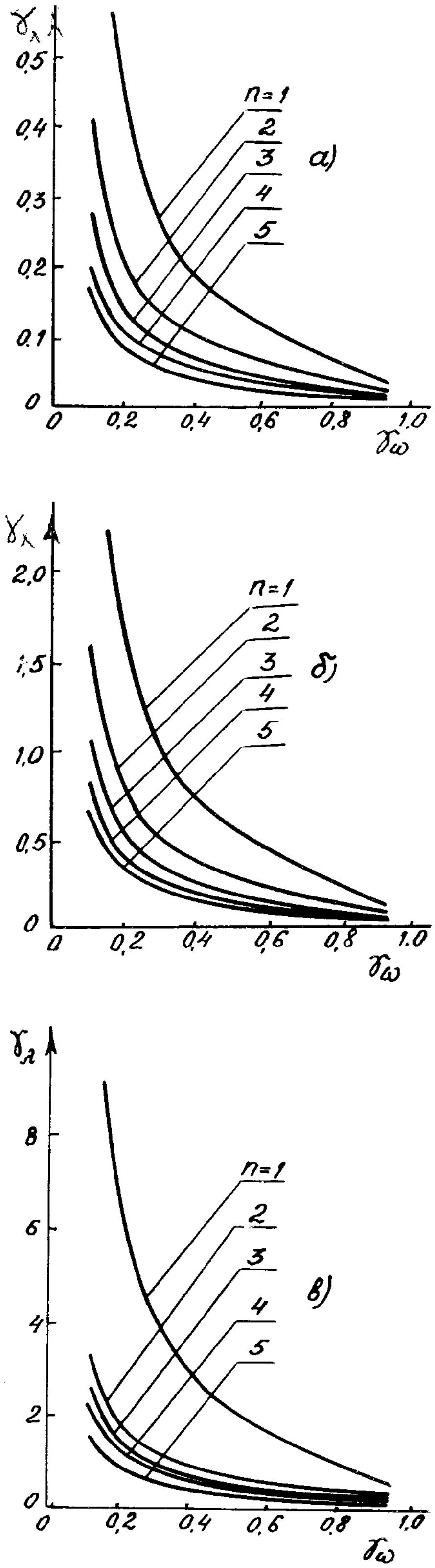

Рис. 5. Зависимость длины волны от частоты
$\epsilon = 1.25$ (а); $\epsilon = 2$ (б); $\epsilon = 5$ (в).

Обратимся к соотношению (132). С учетом выражений (143) и (151) придаем ему форму первого соотношения (138), где величина $\bar{k}_z$ определяется третьим соотношением(138), а величина γ_ω – следующим соотношением

$$\gamma_\omega = \frac{\omega}{2\Omega_*}. \qquad (154)$$

Ясно, что в рассматриваемом случае справедливо и соотношение (139). Примеры дисперсионных кривых, задаваемых соотношениями (131) и (139), представлены на рис. 5. Можно видеть, что величины γ_λ являются убывающими функциями параметров γ_ω и n и нарастающими – параметра ε.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

1. Система уравнений гидродинамики стратифицированной по плотности идеально проводящей невязкой жидкости в стационарном случае при отсутствии электрического поля сведена к системе пяти нелинейных уравнений в частных производных первого порядка, служащей для определения пяти величин: трех компонент модифицированной скорости, функции Бернулли и плотности. Если указанные величины определены, то скорость, магнитное поле и давление определяются из конечных соотношений на основе решения одного линейного уравнения в частных производных первого порядка для функции стратификации магнитного поля $f(\vec{H} = f\vec{v})$. Отмечены три различных случая стратификации магнитного поля: доальфвеновская ($f^2 < 4\pi\rho$), альфвеновская ($f^2 = 4\pi\rho$) и суперальфвеновская ($f^2 > 4\pi\rho$).

2. В случае, когда внешние объёмные силы отсутствуют, получены уравнения, которые в математическом отношении идентичны уравнениям гидродинамики несжимаемой невязкой жидкости в стационарном случае. Это обстоятельство позволило сформулировать теорему соответствия, которая каждому решению уравнений гидродинамики несжимаемой невязкой жидкости сопоставляет соответствующее решение исходной системы уравнений гидродинамики стратифицированной по плотности идеально проводящей невязкой жидкости при отсутствии электрического поля. Указаны три случая, когда задача сводится к решению линейных уравнений. В первом случае вектор модифицированной скорости является потенциальным. Во втором и третьем случаях он удовлетворяет, соответственно, однородному и неоднородному уравнениям Громеки-Жуковского с постоянным коэффициентом спиральности.

3. Рассмотрена двухпараметрическая (стационарная с одной циклической координатой) задача. Записаны интегралы симметрии и "вмороженности". В результате задача сведена к одному квазилинейному уравнению в частных производных второго порядка, служащему для определения модифицированной функции тока. Указан ряд случаев, когда уравнение для модифицированной функции тока становится линейным.

4. То обстоятельство, что в ряде случаев по существу нелинейная исходная задача сведена к решению линейных уравнений, позволяет использовать при решении краевых задач хорошо разработанные методы математической физики.

5. В одном из случаев, когда задача сводится к решению линейного уравнения для модифицированной функции тока, получено магнитогидродинамическое обобщение хорошо известного в обычной гидродинамике сферического вихря Хилла. В случае отсутствия магнитного поля и стратификации жидкости полученное в статье решение переходит в решение, описывающее сферический вихрь Хилла.

6. Изучены волны конечной амплитуды в замагниченном плоском слое неоднородной жидкости. Получены и исследованы дисперсионные соотношения в переменных "волновое число-фазовая скорость", "волновое число-частота" и "длина волны-частота". Записаны критерии существования волн и установлено влияние магнитного поля на дисперсионные зависимости.

7. Исследованы волны конечной амплитуды в замагниченном круговом слое однородной жидкости. Рассмотрены два случая. В первом случае существование волны обусловлено неоднородностью суперальфвеновской стратификации магнитного поля и функции Бернулли и "твердым" вращением слоя. Эта волна аналогична внутренней гравитационной волне в неоднородной жидкости. При этом роль гравитационного ускорения играет центростремительное ускорение. Во втором случае существование волны обусловлено неоднородностью угловой скорости вращения частиц и функции Бернулли. При этом постоянная стратификация магнитного поля может быть как доальфвеновской, так и суперальфвеновской. В обоих случаях получены и проанализированы дисперсионные соотношения в переменных "волновое число-частота" и "частота -длина волны".

Авторы посвящают это исследование 70-летию со дня рождения В. С. Ткалича (13.02.2000 г.)

1. *Альфвен Г., Фельтхаммар К.-Г.* Космическая электродинамика.– М.: Мир, 1967.– 260 с.
2. *Арцимович Л.А., Сагдеев Р.З.* Физика плазмы для физиков.– М.: Атомиздат, 1979.– 472 с.
3. *Бескин В.С.* Осесимметричные стационарные течения в компактных астрофизических объектах // Успехи физ.наук.– 1997.– **167**,N 7.– С. 689–720.
4. *Бреховских Л.И., Гончаров В.В.* Введение в механику сплошных сред.– М.: Наука, 1982.– 336 с.
5. *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости.– М.: Мир, 1973.– 760 с.
6. *Валуманис Я., Шишко А., Шим Я.Я.* Разработка теоретических основ расчета плоского индукционного МГД затвора // Магнитная гидродинамика.– 1997.– **33**,N 1.– С. 81–94.
7. *Ватажин А.Б., Любимов Г.А., Регирер С.А.* Магнитогидродинамические течения в каналах.– М.: Наука, 1970.– 672 с.
8. *Гольдштик М.А.* Вихревые потоки.– Новосибирск: Наука, 1981.– 368 с.
9. *Емец Ю.П.* Краевые задачи электродинамики анизотропно проводящих сред.– Киев: Наук. думка, 1987.– 256 с.
10. *Кадомцев Б.Б.* Коллективные явления в плазме.– М.: Наука, 1988.– 304 с.
11. *Кадомцев Б.Б.* От МТР до ИТЭР // Успехи физ.наук.– 1996.– **166**,N 5.– С. 449–458.
12. *Калихман Л.Е.* Элементы магнитной газодинамики.– М.: Атомиздат, 1964.– 424 с.
13. *Каулинг Т.* Магнитная гидродинамика.– М.: Мир, 1964.– 80 с.
14. *Кирхгоф Г.* Механика.– М.: Изд-во АН СССР, 1962.– 404 с.
15. *Курилко В.И., Ткач Ю.В.* Физические механизмы формирования когерентного излучения в ультрарелятивистских ЛСЭ // Успехи физ.наук.– 1995.– **165**,N 3.– С. 241–261.
16. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Проблемы гидродинамики и их математические модели.– М.: Наука, 1973.– 416 с.
17. *Ламб Г.* Гидродинамика.– М.: Л.: Гостехтеориздат, 1947.– 928 с.
18. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред.– М.: Наука, 1982.– 532 с.
19. *Мадерич В.С., Никишов В.И., Стеценко А.Г.* Динамика внутреннего перемешивания в стратифицированной среде.– Киев: Наук.думка, 1988.– 240 с.
20. *Миропольский Ю.З.* Динамика внутренних гравитационных волн в океане.– Л.: Гидрометеоиздат, 1981.– 304 с.
21. *Михайловский А.Б., Хаусланс Г.Т.А., Кернер В.О.* Оптимизация численного анализа МГД-мод в токамаках // Физика плазмы.– 1997.– N 10.– С. 916–930.
22. *Новиков И.И.* Прикладная магнитная гидродинамика.– М.: Атомиздат, 1969.– 360 с.
23. *Повх И.Л., Капуста А.Б., Чекин Б.В.* Магнитная гидродинамика в металлургии.– М.: Металлургия, 1974.– 276 с.
24. *Половин Р.В., Демуцкий В.П.* Основы магнитной гидродинамики.– М.: Энергоатомиздат, 1987.– 208 с.
25. *Пинчак А.,Жукоски Э.* Прикладная магнитная гидродинамика.– М.: Мир, 1965.– 456 с.
26. *Прист Э.Р.* Солнечная магнитогидродинамика.– М.: Мир, 1985.– 600 с.
27. *Садовский В.С.* Плоские вихрепотенциальные течения невязкой жидкости и их приложения.- Труды ЦАГИ им.проф. Н.Е. Жуковского, вып. 2447.– М.: Издат. отдел ЦАГИ, 1989.– 108 с.
28. *Салтанов Н.В.* Аналитическая гидромеханика.– Киев: Наук.думка, 1984.– 200 с.
29. *Салтанов Н.В.* Обобщенный гидродинамический потенциал и его аналоги в теории упругости // Прикл. механика.– 1990.– **26**,N 4.– С. 97–101.
30. *Салтанов Н.В., Горбань В.А.* Вихревые структуры в жидкости: аналитические и численные решения.– Киев: Наук.думка, 1993.– 244 с.
31. *Салтанов Н.В., Шестопал П.А.* Волны конечной амплитуды во вращающемся цилиндрическом слое неоднородной и однородной жидкости // Гидромеханика.– 1995.– N 69.– С. 28–32.
32. *Селезов И.Т., Корсунский С.В.* Нестационарные и нелинейные волны в электропроводящих средах.– Киев: Наук.думка, 1991.– 200 с.
33. *Тарапов И. Е.* Об одном новом интеграле вихревых стационарных движений в магнитной гидродинамике // Магнитная гидродинамика.– 1988.– N 2.– С. 3–7.
34. *Ткалич В.С.* Нелинейные симметричные задачи магнитной гидродинамики. Автореф. дисс. соиск. учен. степ. докт. физ.-мат. наук.– Новосибирск: НГУ, 1967.– 60 с.
35. *Ткалич В.С., Ткалич Е.Ф.* О соответствии между стационарными движениями в гидродинамике и магнитной гидродинамике // Изв. АН СССР, ОТН, Мех. и машиностр..– 1961.– N 2.– С. 115–116.
36. *Чаплыгин С.А.* Один случай вихревого движения жидкости // Труды Отделения физических наук Общества любителей естествознания.– 1902.– **19**,N 3.– С. 155–165.
37. *Шамота В.П.* Вращение проводящей жидкости электромагнитным полем // Магнитная гидродинамика.– 1997.– **33**,N 1.– С. 52–55.
38. *Шатров В., Мютчке Г., Гербет Г.* Численное моделирование двухмерного МГД течения при обтекании круглого цилиндра // Магнитная гидродинамика.– 1997.– **33**,N 1.– С. 5–15.
39. *Шерклиф Дж.* Курс магнитной гидродинамики.– М.: Мир, 1967.– 320 с.
40. *Яньков В.В.* Аттракторы и инварианты вмороженности в турбулентной плазме // Успехи физ.наук.– 1997.– **167**,N 5.– С. 499–516.
41. *Birgyzan G.S.* Elements of Technical Theory of MHD flows of incompressible conducting fluid on channel with inclined bottom // Магнитная гидродинамика.– 1997.– **33**,N 1.– С. 25–29.
42. *Marty Ph., Martin - Witkowski L.* Influence of a magnetic field on the stability of a liquid metal layer // Магнитная гидродинамика.– 1997.– **33**,N 1.– С. 35–47.
43. *SearsW.R., Resler E.L.* Theory of thin airfoils in fluids of high electrical conductivity // J. Fluid Mech.– 1959.– **5**, N 2.– P. 257-268.
44. *Велихов Е. П.* Выступление по докладу А.К. Гайлитиса // Вопросы магнитной гидродинамики (сборник докладов).– Рига; Институт физики Латв. ССР.– 1959.– С. 227.
45. *Салтанов Н.В., Ткалич В.С.* Магнитодинамические волны конечной амплитуды // Журнал технической физики.– 1960.– **30**, вып. 10.– С. 1253 - 1255.

46. *Яненко Н.Н.* Теория совместности и методы интегрирования систем нелинейных уравнений в частных производных // Труды четвертого Всесоюзного математического съезда.– т.II. – Л: Изд-во "Наука".– 1964.– С. 247-252.

47. *Сидоров А.Ф., Шапеев В.П., Яненко Н.Н.* Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике.– Новосибирск: Наука, 1984.– 272 с.

48. *Сидоров А.Ф.* Новые режимы неограниченного безударного сжатия газа // Доклады Академии наук (Россия).– 1999.– **364**, N 2.– С. 199 - 202.

49. *Yih C. - S.* Dynamics of nonhomogeneous fluids.– New York – London: Macmillan company, 1965.– 306 p.