

УДК 532.528

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКОЙ ВЕНТИЛИРУЕМОЙ СУПЕРКАВЕРНЫ В СВОБОДНОЙ СТРУЕ

В. Н. СЕМЕНЕНКО

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

Получено 24.12.98

Построена математическая модель плоской нестационарной суперкаверны на основе 2-ой линеаризованной схемы М.Тулина с бесконечным следом и конечным изменением давления на бесконечности. Исследована устойчивость вентилируемой суперкаверны в безграничном потоке и в свободной струе. Получены результаты, хорошо согласующиеся с экспериментальными данными по пульсациям плоских вентилируемых каверн и с решением, полученным нами ранее на основе 1-ой кинематически замкнутой схемы М.Тулина с сингулярным давлением на бесконечности.

Побудована математична модель плоскої нестационарної суперкаверни на основі 2-ї лінеаризованої схеми М.Туліна з нескінченним слідом і скінченною зміною тиску на нескінченності. Досліджена стійкість вентильованої суперкаверни в необмеженому потоці й у вільному струмені. Одержані результати, які добре узгоджуються з експериментальними даними по пульсаціям плоских вентильованих каверн і з рішенням, одержаним нами раніше на основі 1-ї кинематично замкнутої схеми М.Туліна з сингулярним тиском на нескінченності.

The mathematical model of the plane unsteady supercavity based on the 2nd linearized M.Tulin's scheme with infinite wake and finite pressure at infinity is constructed. Stability of the ventilated supercavity in both the infinite stream and the free jet is investigated. Obtained results are in good agreement with both the experimental data on the plane ventilated cavity pulsation and our previous solution based on the 1st kinematically closed M.Tulin's scheme with singular pressure at infinity.

ВВЕДЕНИЕ

Известен способ образования в потоке за телами искусственных каверн большого размера (суперкаверн) путем поддува воздуха в каверну. В статье [1] было впервые описано явление возникновения пульсаций вентилируемых суперкаверн при постоянном расходе воздуха, которое наблюдалось в опытах с плоскими вертикальными кавернами в свободной струе. Теоретическому объяснению феномена пульсирующих каверн был посвящен ряд работ 1960–1970-х гг., которые, однако, не дали полного и окончательного ответа на вопрос о его причинах и механизме [2].

Существенное продвижение в понимании данного явления было достигнуто, когда к его исследованию были привлечены методы теории нелинейных колебаний. В работе [3] была построена теория устойчивости вентилируемой осесимметричной каверны как динамической системы с запаздыванием. При этом использовалось приближенное уравнение принципа независимости расширения сечений каверны Г.В.Логвиновича и уравнение баланса массы газа в каверне.

В работе [4] мы построили решение плоской нестационарной задачи на основе 1-ой линеаризованной схемы М.Тулина [5]. При этом допускалась логарифмическая особенность давления на бесконечности $p_{\infty}(t)$, вызванная переменностью объема замкнутой каверны в безграничном потоке.

Построенное решение мы использовали для исследования устойчивости плоской вентилируемой каверны. Было получено качественное, а после введения поправки на ограниченность потока – и количественное согласование решения с экспериментальными данными [1].

Сравнение результатов работ [3] и [4] показало, что потеря устойчивости в динамических системах, моделирующих нестационарные осесимметричную и плоскую газонаполненные каверны, с качественной точки зрения происходит совершенно аналогично. Опытные данные свидетельствуют о том, что после потери устойчивости в том и в другом случае возникают отрывные автоколебания суперкаверн сходной формы. В то же время структура решения для осесимметричных каверн значительно проще, что позволило разработать алгоритм его прямого численного расчета в последовательные моменты времени. В наших работах [6, 7] приведены результаты компьютерного моделирования и спектрального анализа нелинейных пульсаций осесимметричных вентилируемых суперкаверн.

Таким образом, можно сказать, что работы [3, 4] дали принципиальный ответ на вопрос о причинах и механизме пульсаций вентилируемых каверн [2]: причиной пульсаций является глобальная потеря устойчивости и возникновение автоколебаний в динамической системе жидкость – каверна – упругий газ.

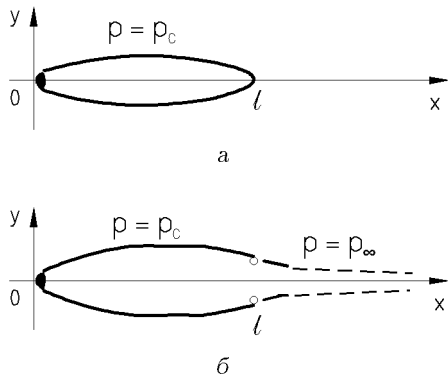


Рис. 1. 1-ая (а) и 2-ая (б) схемы М.Тулина

В данной работе построено решение плоской нестационарной задачи суперкавитационного обтекания на основе 2-ой линейризованной схемы М.Тулина с бесконечным следом [5], в которой давление на бесконечности в любой момент времени конечно. Данная кавитационная схема удобна для расчета суперкавитационных течений в ограниченных потоках и в решетках, поскольку область течения при этом односвязна. Построенное решение использовано для исследования устойчивости стационарной вентилируемой суперкаверны в безграничном потоке и в свободной струе.

Основные соотношения линейной теории плоских суперкавитационных течений можно найти в монографии [8].

1. СТАЦИОНАРНАЯ КАВЕРНА

На рис. 1 показаны две линейризованные схемы М.Тулина [5] для расчета плоского стационарного кавитационного обтекания при малых числах кавитации $\sigma = 2(p_\infty - p_c) / \rho V_\infty^2$. 1-ая, так называемая *закрытая* схема (рис. 1, а) описывает кинематически замкнутую каверну со степенной особенностью скорости при $x = l_0$, где l_0 – длина стационарной каверны. 2-ая, так называемая *полуоткрытая* схема (рис. 1, б) включает бесконечный след за каверной, причем в точке $x = l_0$ давление скачком изменяется от p_c на границе каверны до p_∞ на границе следа. При этом скорость имеет в точке $x = l_0$ логарифмическую особенность. Обе схемы приводят к смешанным краевым задачам для аналитической функции – комплексной скорости течения $\bar{V}(x, y) = \varphi_x(x, y) - i\varphi_y(x, y)$, где $\varphi(x, y)$ – потенциал скорости.

Будем как и в [4] считать течение симметричным относительно оси Ox , а размеры кавитатора – малыми по сравнению с каверной (так называ-

емая “чистая” каверна). В стационарном случае имеем смешанную краевую задачу:

$$\begin{aligned} \varphi_y &= 0 \quad \text{при} \quad -\infty < x < 0, \\ \varphi_x &= \frac{\sigma_0}{2} \quad \text{при} \quad 0 < x < l_0, \\ \varphi_x &= 0 \quad \text{при} \quad l_0 < x < \infty. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь и далее все переменные являются безразмерными. Первое из граничных условий (1) есть следствие симметрии течения. В носовой точке “чистой” каверны скорость должна иметь особенность $1/\sqrt{x}$. Решение краевой задачи (1) для верхней полуплоскости $\text{Im } z > 0$ дается формулой Келдыша–Седова [9]:

$$\bar{V}(z) = \frac{\sigma_0 \sqrt{z}}{2\pi i} \left(\frac{2}{z} + \int_0^{l_0} \frac{ds}{\sqrt{s(s-z)}} \right). \quad (2)$$

Решение (2) для “чистой” каверны не зависит от масштаба течения и конкретной формы кавитатора, параметры σ_0 и l_0 являются независимыми. Эта информация может быть учтена дополнительно в виде связи между σ_0 и l_0 . Например, для затупленного параболического кавитатора $y = \pm \sqrt{2rx}$ (где $r \ll l_0$ – радиус сопряженной окружности) и прямолинейного клина $y = \pm \alpha x$, $0 \leq x \leq a$ (где α – полуугол клина, $a \ll l_0$ – длина хорды), требуя обращения в нуль толщины следа при $x \rightarrow \infty$, имеем соответственно

$$\sigma_0 = \pi \sqrt{\frac{r}{2l_0}}, \quad \sigma_0 = 2\alpha \sqrt{\frac{a}{l_0}}. \quad (3)$$

Выражения для формы $F_0(x)$, объема Q_0 и ширины “чистой” каверны в ее конце δ_0 имеют вид

$$\begin{aligned} F_0(x) &= \frac{\sigma_0}{\pi} \left(\sqrt{l_0 x} + \frac{l_0 - x}{2} \ln \frac{\sqrt{l_0} + \sqrt{x}}{\sqrt{l_0} - \sqrt{x}} \right), \\ Q_0 &= \frac{2\sigma_0 l_0^2}{\pi}, \quad \delta_0 = \frac{2\sigma_0 l_0}{\pi}. \end{aligned} \quad (4)$$

Как видно, 2-ая схема М.Тулина дает несимметричную относительно вертикальной оси каверну, которая при том же значении σ_0 имеет меньшую длину, но больший объем, чем замкнутая каверна по 1-ой схеме М.Тулина [4]:

$$\frac{Q_0^{(2)}}{Q_0^{(1)}} = \frac{l_0^{(1)}}{l_0^{(2)}} = \frac{16}{\pi^2}. \quad (5)$$

Отметим, что суммарный объем каверны и следа в данной схеме не ограничен и имеет асимптотику

$$Q_0 + Q_w \sim \frac{8\sigma_0 l_0^2}{3\pi} \sqrt{\frac{x}{l_0}} \quad \text{при} \quad x \rightarrow \infty. \quad (6)$$

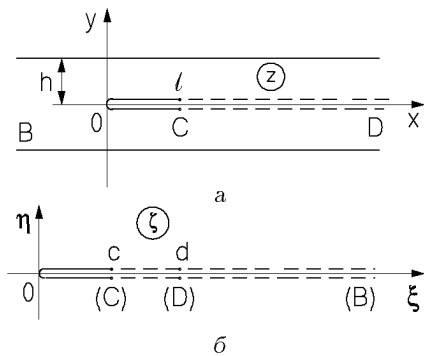


Рис. 2. “Чистая” каверна в свободной струе:
а – линейризованная область течения, б – параметрическая плоскость

На рис. 2, а показана линейризованная область течения задачи о “чистой” суперкаверне в симметричной свободной струе, представляющая собой полосу с разрезом по положительной оси Ox . Отобразим ее конформно на плоскость с разрезом с помощью функции [10]

$$z = -d \ln \left(1 - \frac{\zeta}{d} \right),$$

где $d = h/\pi$, h – полуширина струи. Соответствие точек области течения и параметрической плоскости показано на рис. 2, б. Хвостовая точка каверны $x = l$ отображается в точку c :

$$c = d \left(1 - e^{-\frac{l}{d}} \right). \quad (7)$$

На границах струи должно выполняться такое же динамическое условие $p = p_\infty$, как на следе. Следовательно, в верхней параметрической полуплоскости $\text{Im } \zeta > 0$ имеем смешанную краевую задачу (1), в которой l заменяется на c . С учетом особенности в точке $x = 0$ запишем ее решение в виде

$$\bar{V}(\zeta) = \frac{iA}{\sqrt{\zeta}} + \frac{\sigma_0 \sqrt{\zeta}}{2\pi i} \int_0^c \frac{ds}{\sqrt{s(s-\zeta)}}, \quad (8)$$

где A – константа. Для случая параболического кавитатора условие $\varphi_y(d) = 0$ и условие обтекания кавитатора дают соответственно соотношения

$$\sigma_0 = -\frac{2\pi A}{\sqrt{d} \ln \frac{\sqrt{d} + \sqrt{c}}{\sqrt{d} - \sqrt{c}}}, \quad A = -\sqrt{\frac{r}{2}}. \quad (9)$$

Отнесем линейные величины в выражении (9) к длине каверны в безграничном потоке l_∞ :

$$l' = \frac{l}{l_\infty}, \quad c' = \frac{c}{l_\infty}, \quad d' = \frac{d}{l_\infty}.$$

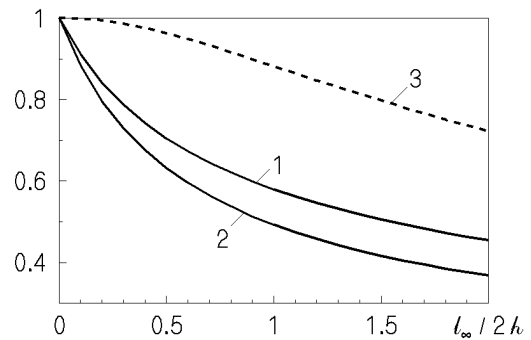


Рис. 3. Влияние ширины струи на каверну:
1 – l/l_∞ , 2 – Q/Q_∞ , 3 – l/l_∞ и Q/Q_∞ по [11]

Тогда с учетом первого из соотношений (3) выражение (9) можно преобразовать к виду

$$l' = 2d' \ln \operatorname{ch} \frac{1}{\sqrt{d'}}. \quad (10)$$

Объем Q_0 “чистой” каверны в свободной струе будет

$$\bar{Q}_0 = \frac{d^2}{\pi} \int_0^{c_0} \ln \frac{d-s}{d-c_0} \left(\frac{2}{\sqrt{s}} - \ln \frac{\sqrt{c_0} + \sqrt{s}}{\sqrt{c_0} - \sqrt{s}} \right) \frac{ds}{d-s}, \quad (11)$$

где $\bar{Q}_0 = Q_0/\sigma_0 l_\infty^2$. На рис. 3 показана зависимость длины и объема каверны от ширины струи. Здесь Q_∞ – объем каверны в безграничном потоке (4). Для сравнения штриховой линией проведена приближенная зависимость [11], которая использовалась нами в работе [4].

Интересно, что ширина “чистой” каверны в ее конце, отнесенная к l_∞ , не зависит от ширины струи и всегда равна δ_0 (4). Ширина следа при $x \rightarrow \infty$ равна нулю при $h = \infty$ и увеличивается, оставаясь конечной, при уменьшении h .

2. НЕСТАЦИОНАРНАЯ КАВЕРНА

В случае нестационарной каверны в безграничном потоке имеем на оси Ox линейризованные граничные условия для аналитической функции – комплексного потенциала ускорений $\Phi = \theta + i\chi$:

$$\begin{aligned} \chi &= 0 & \text{при } -\infty < x < 0, \\ \theta &= \frac{\sigma(t)}{2} & \text{при } 0 < x < l(t), \\ \theta &= 0 & \text{при } l(t) < x < \infty, \end{aligned} \quad (12)$$

где $\theta = (p_\infty - p)/\rho V_\infty^2$ – потенциал ускорений [8]. Первое из граничных условий (12) есть следствие

симметрии течения. Легко показать, что в точке $x = 0$ функция $\chi(x, y, t)$ должна иметь особенность того же порядка, что и функция φ_y в стационарной задаче. Решение смешанной краевой задачи в верхней полуплоскости $\mathbf{Im} z > 0$ с учетом (3) имеет вид

$$\Phi(z, t)/\sigma_0 = -\frac{i}{\pi\sqrt{z}} + \frac{\bar{\sigma}(t)\sqrt{z}}{2\pi i} \int_0^{l(t)} \frac{ds}{\sqrt{s(s-z)}}, \quad (13)$$

где $\bar{\sigma} = \sigma(t)/\sigma_0$. Выражения для формы $F(x, t)$ и объема $Q(t)$ нестационарной каверны, одинаковые для обеих кавитационных схем, получены нами в работе [4]:

$$F(x, t) = \int_0^x (x-s)\chi_t(s, t-x+s)ds - \int_0^x \chi(s, t-x+s)ds, \quad 0 < x < l(t), \quad (14)$$

$$Q(t) = -2 \int_0^l (l-s)\chi(s, t-l+s)ds. \quad (15)$$

В данном случае

$$\chi(s, t)/\sigma_0 = -\frac{1}{\pi\sqrt{s}} + \frac{\bar{\sigma}}{2\pi} \ln \frac{\sqrt{l} + \sqrt{s}}{\sqrt{l} - \sqrt{s}}.$$

Для определения двух функций времени $\bar{\sigma}(t)$, $l(t)$ требуются два дополнительных уравнения. Первым из них для вентилируемой каверны является уравнение баланса массы газа в каверне при его изотермическом расширении [3, 4]:

$$\frac{d}{dt} [(\beta - \bar{\sigma}(t))\bar{Q}(t)] = \beta [\dot{q}_{in} - \dot{q}_{out}(t)], \quad (16)$$

где $\beta = Eu/\sigma \geq 1$; Eu – число Эйлера; \dot{q}_{in} , $\dot{q}_{out}(t)$ – объемные расходы поддува воздуха в каверну и уноса из каверны. Предполагается, что давление $p_c(t)$ изменяется синхронно по длине каверны. В работе [4] использовалась аппроксимация экспериментальных данных [1]:

$$\dot{q}_{in} = \gamma b_0 V_\infty \left(1 - \frac{\sigma_0}{Eu}\right), \quad (17)$$

где γ – эмпирический коэффициент. Для стационарных каверн за перпендикулярной к потоку пластинкой из [1] следует значение $\gamma = 2.5 \cdot 10^{-4}$. Подробный анализ влияния параметра γ на устойчивость суперкаверны [4] показал, что при таких значениях его влияние на устойчивость каверны

незначительно. Поэтому здесь ограничимся случаем $\gamma = 0$, при этом уравнение (16) есть условие постоянства массы газа в каверне.

Второе, замыкающее уравнение для данной кавитационной схемы можно выбирать с известным произволом. Рассмотрим два варианта замыкающего условия.

Вариант 1 – условие ограниченности ширины следа на бесконечности:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x \chi_t(s, t-x+s)ds = 0. \quad (18)$$

Легко показать, что уравнение (18) является также условием ограниченности изменения суммарного объема каверны и следа (6).

Вариант 2 – аналог условия замкнутости нестационарной каверны [4]:

$$F(l, t) = \frac{\delta_0}{2}. \quad (19)$$

Ниже результаты расчета по обоим вариантам сравниваются между собой и с [4] на примере задачи об устойчивости вентилируемой каверны по отношению к малым колебаниям. При этом задача становится линейной в целом.

3. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ КАВЕРНЫ В БЕЗГРАНИЧНОМ ПОТОКЕ

Исследуем устойчивость стационарной суперкаверны по отношению к малым колебаниям для двух вариантов замыкающего условия (18), (19). Для этого представим неизвестные функции времени в виде

$$\bar{\sigma}(t) = 1 + \varepsilon a e^{\mu t}, \quad l(t) = 1 + \varepsilon b e^{\mu t}, \quad (20)$$

где ε – малый параметр; $\mu = \lambda + jk$; $k = \omega l_\infty / V_\infty$ – приведенная частота колебаний; ω – круговая частота; a, b – константы. Линеаризуя уравнение (16) в окрестности стационарного решения $\bar{\sigma} = 1$, $l = 1$, получаем линейное однородное уравнение относительно коэффициентов a, b :

$$a \left(\frac{\pi \bar{Q}_0}{\beta - 1} + \int_0^1 e^{-\mu s} s \ln \frac{1 + \sqrt{1-s}}{1 - \sqrt{1-s}} ds \right) - b I = 0, \quad (21)$$

где

$$I = \int_0^1 e^{-\mu s} \sqrt{1-s} ds = \frac{1}{\mu} \left[1 + \frac{j}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\mu}} e^{-\mu} \operatorname{erf}(j\sqrt{\mu}) \right];$$

Табл. 1. Собственные частоты колебаний каверны в безграничном потоке

	n	1	2	3	4	5	6	7
1-ая схема	k_n	4.810	11.04	17.31	23.58	29.86	36.14	42.42
М.Тулина [4]	β_n	3.081	11.96	27.95	51.03	81.21	118.5	162.9
Вариант 1	k_n	5.697	11.94	18.21	24.48	30.75	37.02	43.30
(21), (22)	β_n	9.628	28.85	55.55	88.54	127.1	170.7	218.9
Вариант 2	k_n	5.997	12.17	18.39	24.64	30.89	37.16	43.43
(21), (23)	β_n	12.88	36.49	68.79	108.4	154.3	206.1	263.2

$\text{erf}(z)$ – интеграл вероятностей [12]. Отметим, что при линеаризации выражения (15) был исключен член $\varepsilon\delta_0 b e^{\mu t}$, который дает кажущееся изменение массы газа в каверне в рамках данной полуоткрытой кавитационной схемы.

Линеаризуя уравнения (18), (19), получаем соответственно:

$$a \int_0^\infty e^{\mu s} \ln \left| \frac{1 + \sqrt{s}}{1 - \sqrt{s}} \right| ds + b \oint_0^\infty e^{\mu s} \frac{\sqrt{s} ds}{s - 1} = 0, \quad (22)$$

$$2a(1 + \mu I) - b \left[\int_0^1 (1 - e^{-\mu s}) \frac{\sqrt{1-s}}{s} ds + \mu I \right] = 0. \quad (23)$$

Второй интеграл в уравнении (22) понимается в смысле главного значения. Приравнявая к нулю определители систем линейных однородных относительно a, b уравнений (21), (22) и (21), (23), получим два варианта характеристического уравнения задачи. Его комплексные корни $\mu = \lambda + jk$ зависят от единственного параметра β . При $\lambda < 0$ каверна асимптотически устойчива, при $\lambda > 0$ – неустойчива.

Полагая $\lambda = 0$, получим уравнения для определения частот нейтральных колебаний каверны (собственных частот). При этом интеграл вероятностей, а также оба интеграла уравнения (22) выражаются через интегралы Френеля $C_2(k)$, $S_2(k)$ [12] с использованием соотношения

$$\oint_0^\infty \frac{e^{jks} ds}{\sqrt{s}(s-1)} = -\pi\sqrt{2}e^{j(k-\frac{\pi}{4})} [C_2(k) - jS_2(k)].$$

Расчеты показали, что при $\gamma = 0$ оба варианта дают две бесконечные серии чередующихся собственных частот $k_n^{(1)}, k_n^{(2)}$, $n = 1, 2, \dots$, которым соответствуют значения физического параметра $\beta_n^{(1)}, \beta_n^{(2)}$. В табл. 1 дано сравнение результатов расчета собственных частот каверны $k_n = k_n^{(1)}$ и соответствующих значений физического параметра $\beta_n = \beta_n^{(1)}$ для обоих вариантов и с [4].

Естественно ожидать, что результаты расчета не должны существенно зависеть от выбранной кавитационной схемы и вида замыкающего уравнения. Как видно из табл. 1, 1-ая и 2-ая схемы М.Тулина с обоими вариантами замыкающего условия дают близкие значения собственных частот каверны. Однако значения параметра β_n с ростом номера n для 2-ой схемы М.Тулина растут быстрее. Это объясняется тем, что 2-ая схема М.Тулина дает завышенное значение объема Q_0 стационарной каверны по сравнению с 1-ой схемой (5) и с экспериментом [1]. Вводя корректирующий множитель $\kappa < 1$ и используя в уравнении (21) κQ_0 вместо Q_0 , можно добиться согласования также и для β_n . При этом собственные частоты k_n не изменяются, а значения параметра β_n уменьшаются практически пропорционально κ .

Полное исследование комплексных корней $\mu = \lambda + jk$ характеристического уравнения удобнее проводить с использованием второго варианта замыкающего уравнения (23). Численный анализ корней показал, что потеря устойчивости вентилируемой каверны по 2-ой схеме М.Тулина происходит во всех деталях так же, как по 1-ой схеме [4]. Именно, $\lambda < 0$ при $k < k_1^{(1)}$ и $\lambda > 0$ при $k_n^{(1)} < k < k_n^{(2)}$, $n = 1, 2, \dots$, т.е. каверна неустойчива по отношению к колебаниям с частотами $k > k_1^{(1)}$. На рис. 4, а, б приведены графики зависимости действительной и мнимой частей μ от физического параметра β . Видно, что каверна асимптотически устойчива при $1 \leq \beta < \beta_1^{(1)}$ и неустойчива при $\beta > \beta_1^{(1)}$. При переходе параметра β через значение $\beta_n^{(1)}$ возбуждаются колебания с приведенной частотой $k_n^{(1)}$.

Предположим, следуя [3, 4], что при одновременном существовании для данного значения β нескольких возможных частот k реализуется та, которой соответствует наибольшее значение λ . Это позволяет дать оценку границ режимов автоколебаний каверны $\beta_N^{min}, \beta_N^{max}$, $N = 1, 2, 3, \dots$, которые показаны на рис. 4, а, б вертикальными штриховыми линиями. Для случая осесимметричных

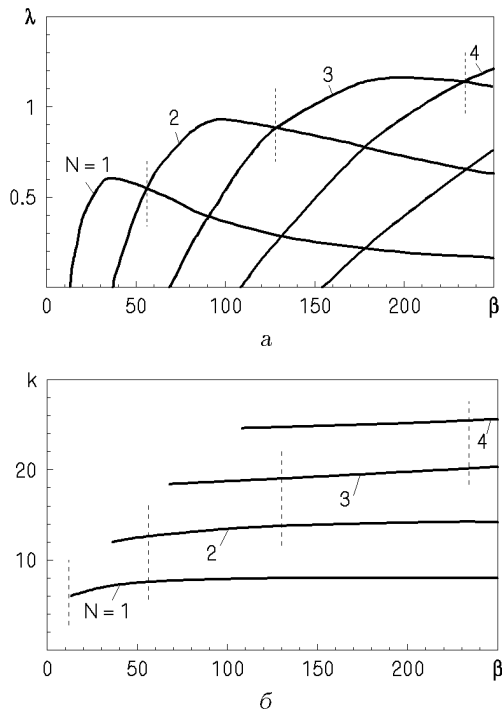


Рис. 4. Комплексные корни $\mu = \lambda + jk$ характеристического уравнения: $a - \lambda(\beta)$, $b - k(\beta)$

каверн справедливость такой оценки подтверждается прямым расчетом развития нелинейных автоколебаний неустойчивых каверн [6].

Вследствие пульсаций давления в неустойчивой каверне на ее границах возникают кинематические волны, распространяющиеся со скоростью V_∞ . При этом на N -ом режиме колебаний по длине каверны укладывается приблизительно N волн.

4. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ КАВЕРНЫ В СВОБОДНОЙ СТРУЕ

В случае нестационарной каверны в свободной струе (рис. 2) имеем на оси $O\xi$ параметрической плоскости граничные условия (12) для $\Phi(\zeta, t)$, в которых $l(t)$ заменяется на $c(t)$. Следовательно, решение смешанной краевой задачи в верхней полуплоскости $\text{Im } \zeta > 0$ имеет вид

$$\Phi(\zeta, t)/\sigma_0 = -\frac{i}{\pi\sqrt{\zeta}} + \frac{\bar{\sigma}(t)\sqrt{\zeta}}{2\pi i} \int_0^{c(t)} \frac{ds}{\sqrt{s(s-\zeta)}}. \quad (24)$$

Здесь и далее все величины отнесены к l_∞ . Связь между функциями времени $l(t)$ и $c(t)$ дается формулой (7). Выражение (15) для объема нестационарной каверны в струе преобразуется к виду

нажной каверны в струе преобразуется к виду

$$Q(t) = -2d \int_0^c [l - x(\xi)] \chi(\xi, t - l + x(\xi)) \frac{d\xi}{d - \xi}, \quad (25)$$

где $x(\xi) = -d \ln(1 - \xi/d)$. Замыкающее условие (19) для нестационарной каверны в струе принимает вид

$$d \int_0^c [l - x(\xi)] \chi_t(\xi, t - l + x(\xi)) \frac{d\xi}{d - \xi} - d \int_0^c \chi(\xi, t - l + x(\xi)) \frac{d\xi}{d - \xi} = \frac{\delta_0}{2}. \quad (26)$$

Линеаризуем уравнения (16), (26) в окрестности стационарного решения $\bar{\sigma} = 1$, $l = l_0$, представляя искомые функции времени $\bar{\sigma}(t)$, $l(t)$ в виде

$$\bar{\sigma}(t) = 1 + \varepsilon\sigma_1(t), \quad l(t) = l_0 + \varepsilon l_1(t).$$

При этом из (7) следуют соотношения

$$c(t) = c_0 (1 + \varepsilon c_1(t)), \quad c_0 = d \left(1 - e^{-\frac{l_0}{d}}\right),$$

$$c_0 c_1(t) = e^{-\frac{l_0}{d}} l_1(t).$$

Линеаризованное уравнение (16) при $\gamma = 0$ для нестационарной каверны в струе имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{Q}_0 \sigma_1 = (\beta - 1) \frac{d^2}{\pi} \left[c_1 \int_0^{c_0} \ln \frac{d-s}{d-c_0} \left(\frac{d+s}{\sqrt{s}} - d \ln \frac{\sqrt{c_0} + \sqrt{s}}{\sqrt{c_0} - \sqrt{s}} \right) \frac{ds}{(d-s)^2} - \int_0^{c_0} \ln \frac{d-s}{d-c_0} \times \right. \\ \left. \times \left(\tilde{\sigma}_1 \ln \frac{\sqrt{c_0} + \sqrt{s}}{\sqrt{c_0} - \sqrt{s}} - \frac{(\tilde{c}_1 - c_1)\sqrt{c_0 s}}{c_0 - s} \right) \frac{ds}{d-s} \right], \quad (27) \end{aligned}$$

где $\tilde{\sigma}_1$ и \tilde{c}_1 – функции запаздывающего времени

$$\tilde{\sigma}_1 = \sigma_1 \left(t - d \ln \frac{d-s}{d-c_0} \right) \quad \text{и т.п.}$$

Отметим, что при линеаризации выражения (25), как и в случае безграничного потока, исключен член

$$\varepsilon \delta_0 l_1(t) = \varepsilon \frac{2dc_0 c_1(t)}{\pi(d-c_0)},$$

который дает кажущееся изменение массы газа в полукрытой каверне.

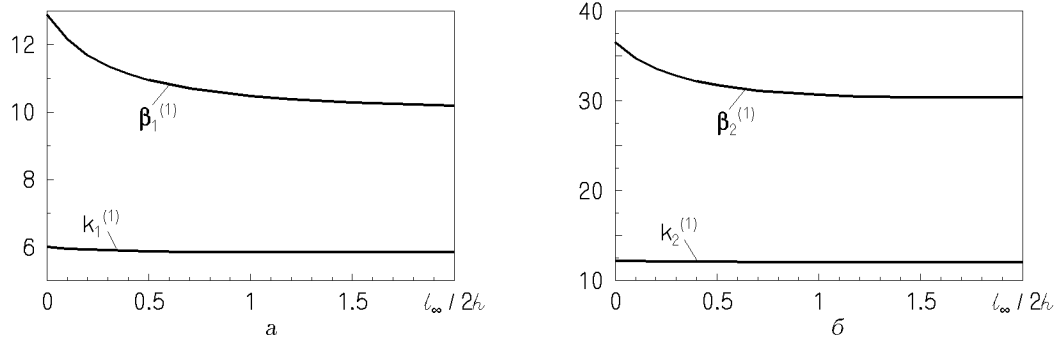


Рис. 5. Влияние ширины струи на собственные частоты каверны:
а - $n = 1$, б - $n = 2$

Табл. 2. Оценка границ режимов пульсаций каверны и сравнение с экспериментом

N	$l_\infty/2h = 0$				$l_\infty/2h = 7.75$				$\kappa = 0.4$		Эксп. [1]	
	β_N^{min}	β_N^{max}	k_N^{min}	k_N^{max}	β_N^{min}	β_N^{max}	k_N^{min}	k_N^{max}	β_N^{min}	β_N^{max}	β_N	k_N
1	12.9	56.1	6.00	7.61	9.97	43.1	5.94	8.07	3.99	17.2	5.06	6.15
2	56.1	131	12.6	13.7	43.1	109	12.4	14.3	17.2	43.8	16.1	12.9
3	131	233	19.0	20.1	109	206	18.9	20.4	43.8	82.6	33.5	18.8
4	233	362	25.3	26.3	206	332	25.3	26.7	82.6	132	55.5	22.9
5	362	514	31.8	32.5	332	483	31.7	32.9	132	193	88.7	30.3

Линеаризованное замыкающее уравнение (26) имеет вид

$$d \int_0^{c_0} \ln \frac{d-s}{d-c_0} \left(\dot{\sigma}_1 \ln \frac{\sqrt{c_0} + \sqrt{s}}{\sqrt{c_0} - \sqrt{s}} - \dot{c}_1 \frac{\sqrt{c_0 s}}{c_0 - s} \right) \frac{ds}{d-s} = \int_0^{c_0} \left(\tilde{\sigma}_1 \ln \frac{\sqrt{c_0} + \sqrt{s}}{\sqrt{c_0} - \sqrt{s}} - \frac{(\tilde{c}_1 - c_1)\sqrt{c_0 s}}{c_0 - s} \right) \frac{ds}{d-s}. \tag{28}$$

Произведя в уравнениях (27), (28) замену:

$$\sigma_1(t) = ae^{\mu t}, \quad c_1(t) = be^{\mu t},$$

будем иметь систему двух линейных однородных уравнений относительно a, b . Приравняв к нулю определитель системы, получим характеристическое уравнение для численного исследования комплексных корней $\mu = \lambda + jk$ в зависимости от двух параметров h, β .

На рис. 5, а, б представлена зависимость первой и второй приведенных собственных частот каверны $k_n^{(1)} = \omega l_0 / V_\infty$, $n = 1, 2$ и соответствующих значений физического параметра $\beta_n^{(1)}$ от ширины струи. Поскольку длина невозмущенной каверны l_0 в свободной струе при том же значении σ_0 меньше, чем в безграничном потоке, полученные из характеристического уравнения собственные частоты умножены на l_0 / l_∞ (10).

Из рис. 5 видно, что изменение ширины струи весьма слабо влияет на собственные частоты k_n . Влияние ширины струи на параметр β_n также можно считать слабым при $h < l_\infty / 2$, причем оно уменьшается с возрастанием номера n .

В табл. 2 дано сравнение оценок границ режимов пульсаций каверны для случаев безграничного потока и свободной струи, ширина которой $l_\infty / 2h = 7.75$ выбрана соответствующей условиям экспериментов [1].

5. СРАВНЕНИЕ С ЭКСПЕРИМЕНТОМ

Экспериментальные данные [1] относятся к вентилируемым кавернам за плоской пластинкой шириной 3.2 мм, поставленной поперек потока, в свободной струе шириной $2h = 0.254$ м. Значения числа кавитации в различных опытах равнялись $\sigma = 0.061 \div 0.073$, средняя длина стационарной каверны составляла $l_0 = 0.52 \div 0.55$ м. Такие каверны хорошо описываются принятой в настоящей работе моделью “чистой” суперкаверны.

Особенности сопоставления результатов теоретического исследования устойчивости каверн с экспериментальными данными [1] описаны в нашей работе [4]. Влияние границ струи учитывалось в [4] посредством приближенного учета уменьшения в струе объема невозмущенной ка-

верны Q_0 . Результаты настоящей работы могут быть сопоставлены с экспериментальными данными [1] непосредственно.

Как было сказано выше, полуоткрытая кавитационная схема дает завышенное по сравнению с экспериментом значение объема невозмущенной каверны Q_0 и, как следствие, заведомо завышенные значения параметра β . Это завышение может быть скорректировано введением множителя $\kappa < 1$. Сравнивая экспериментальное и вычисленное значения объема стационарной каверны при $l_\infty/2h = 7.75$, находим $\kappa \approx 0.4$.

В последних двух колонках табл. 2 приведены экспериментальные значения β_N, k_N , рассчитанные по данным работы [1]. В предшествующих двух колонках таблицы помещены оценки границ режимов пульсаций $\beta_N^{min}, \beta_N^{max}$, умноженные на корректирующий множитель $\kappa = 0.4$. Сравнение показывает хорошее согласование для режимов пульсаций $N = 1, 2$. Из табл. 1 можно видеть, что лучшее согласование с экспериментом на режимах $N \geq 3$ можно получить, используя первый вариант замыкающего уравнения (22).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получено решение задачи о плоской нестационарной суперкаверне в безграничном потоке и в свободной струе на основе 2-ой линеаризованной схемы М.Тулина с бесконечным следом. Достоинством полученного решения является его математическая корректность, так как в нем благодаря введению следа за каверной преодолен известный парадокс плоских нестационарных кавитационных течений [2], заключающийся в том, что изменение объема замкнутой каверны в безграничном потоке влечет логарифмическую сингулярность давления на бесконечности.

Второе преимущество полученного решения состоит в его значительно более простой структуре по сравнению с решением по 1-ой схеме М.Тулина [4]. Это позволяет разработать алгоритм его прямого численного расчета при произвольной зависимости от времени, подобный алгоритму расчета нестационарных осесимметричных каверн [6]. Оно удобно для расчета нестационарных суперкавитационных течений в ограниченных потоках и в решетках, поскольку область течения при этом односвязна.

Полученное решение использовано для исследования устойчивости вентилируемой суперкаверны

в безграничном потоке и в свободной струе. Проведенный анализ устойчивости “чистой” каверны имеет универсальный характер в том смысле, что не зависит от масштаба течения и конкретной формы кавитатора.

Показано, что уменьшение полуширины свободной струи h слабо влияет на значения собственных частот каверны k_n , обезразмеренных по длине стационарной каверны в струе $l_0(h)$. Соответствующие значения физического параметра β_n уменьшаются с уменьшением h , однако это влияние становится слабым при $h < l_\infty/2$. Эти выводы справедливы также для оценки границ режимов пульсаций каверн β_N, k_N .

Полученные результаты хорошо согласуются с экспериментальными данными по пульсациям плоских вентилируемых каверн в свободной струе, а также с решением аналогичной задачи, полученным нами ранее на основе кинематически замкнутой кавитационной схемы с сингулярным давлением на бесконечности. Отсюда следует важный вывод, что динамические свойства обеих рассмотренных кавитационных схем по существу идентичны. Таким образом, обе схемы могут использоваться для практических расчетов нестационарных суперкавитационных течений.

1. *Silberman E., Song C.S.* Instability of ventilated cavities // J. of Ship Research.– 1961.– 5, N 1.– P. 13–33.
2. *Michel J.M.* Some features of water flows with ventilated cavities // Trans. ASME, J. of Fluids Engineering.– 1984.– N 3.– P. 140–147.
3. *Парышев Э.В.* Теоретическое исследование устойчивости и пульсаций осесимметричных каверн // Тр. ЦАГИ.– 1978.– Вып. 1907.– С. 17–40.
4. *Семененко В.Н.* Неустойчивость плоской газонаполненной суперкаверны в безграничном потоке // Гидромеханика.– 1995.– Вып. 69.– С. 56–64.
5. *Tulin M.P.* Supercavitating flows – small perturbation theory // J. of Ship Research.– 1964.– 7, N 3.– P. 16–37.
6. *Семененко В.Н.* Компьютерное моделирование пульсаций вентилируемых суперкаверн // Гидромеханика.– 1997.– Вып. 71.– С. 110–118.
7. *Semenenko V.N.* Instability and oscillation of gas-filled supercavities // Proc. Third International Symp. on Cavitation. Vol. 2.– Grenoble (France), 1998.– P. 25–30.
8. *Сфремов І.І.* Лінеаризована теорія кавітаційного обтікання.– К.: Наук. думка, 1974.– 156 с.
9. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. – 2-е изд., перераб. и доп.– М.: Физматгиз, 1963.– 640 с.
10. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. – 4-е изд., испр.– М.: Наука, 1973.– 736 с.
11. *Эпштейн Л.А., Лапин В.М.* Приближенный расчет влияния границ потока на длину каверны в плоской задаче и за осесимметричным телом // Тр. ЦАГИ.– 1980.– Вып. 2060.– С. 3–24.
12. *Абрамовиц М., Стиган И. (ред.)* Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами.– М.: Наука, 1979.– 832 с.