УДК 510.69

О.С. Шкільняк

СЕКВЕНЦІЙНІ ЧИСЛЕННЯ КОМПОЗИЦІЙНО-НОМІНАТИВНИХ МОДАЛЬНИХ ЛОГІК ФУНКЦІОНАЛЬНО-ЕКВАЦІЙНОГО РІВНЯ

Досліджуються композиційно-номінативні модальні та темпоральні логіки функціонально-еквацийного рівня. На основі властивостей відношення логічного наслідку для множин формул збудовані числення секвенційного типу для загальних та темпоральних композиційно-номінативних модальних логік такого рівня. Для побудованих числень доведені теореми коректності та повноти.

Вступ

Модальні та темпоральні логіки є потужним засобом моделювання різноманітних предметних областей, специфікації та верифікації програм. Композиційно-номінативні модальні логіки (КНМЛ) [1] поєднують можливості традиційних модальних логік [2, 3] та композиційно-номінативних логік (КНЛ) квазіарних предикатів [4].

Центральним поняттям КНМЛ є [1] поняття композиційно-номінативної модальної системи (КНМС). Спеціальне уточнення КНМС для логік номінативних рівнів запропоноване в [5]. Композиційно-номінативні модальні та темпоральні логіки на пропозиційному, реномінативному, кванторному та кванторно-еквацийному рівнях досліджені в [5–7], для цих логік збудовані числення секвенційного типу. Композиційно-номінативні модальні та темпоральні логіки функціонально-еквацийного рівня розглянуті в [8]. Для таких логік визначені транзиційні (ТМС), загальні та темпоральні модальні системи, досліджені їх семантичні властивості.

У даній роботі продовжується дослідження функціонально-еквацийних композиційно-номінативних модальних та темпоральних логік. На основі властивостей відношення логічного наслідку для множин специфікованих станами формул будуються числення секвенційного типу для загальних транзиційних та темпоральних КНМЛ функціонально-еквацийного рівня. Для таких числень доводяться теореми коректності та повноти.

Поняття, які тут не визначаються, будемо тлумачити в сенсі робіт [4, 6–8].

1. Відношення логічного наслідку для множин формул КНМЛ функціонально-еквацийного рівня

Нагадаємо визначення відношення логічного наслідку для множин специфікованих станами формул. Нехай Δ та Γ – множини таких формул.

Δ є логічним наслідком Γ в КНМС $\boldsymbol{M}$ (позначаємо $\Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta$), якщо для всіх $d \in {}^{V}A$ із того, що $\Phi_{\alpha}(d \cap {}^{V}A_{\alpha}) = T$ для всіх $\Phi^{\alpha} \in \Gamma$, випливає, що неможливо $\Psi_{\beta}(d \cap {}^{V}A_{\beta}) = F$ для всіх $\Psi^{\beta} \in \Delta$.

Δ є логічним наслідком Γ (щодо КНМС певного типу), якщо $\Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta$ для всіх КНМС $\boldsymbol{M}$ відповідного типу.

Те, що Δ є логічним наслідком Γ, позначаємо $\Gamma \models \Delta$.

Приклад 1. Для випадку функціонально стабільних [8] ТМС можливо:

1) $\Box\, t = s^{\alpha}, \Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta$ та $t = s^{\alpha}, \Gamma \not\models_{\boldsymbol{M}} \Delta$;

2) $t = s^{\alpha}, \Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta$ та $\Box\, t = s^{\alpha}, \Gamma \not\models_{\boldsymbol{M}} \Delta$.

Задамо КНМС $\boldsymbol{M}$ такого вигляду: $\boldsymbol{S} = \{\alpha, \beta\}$, $\boldsymbol{R} = \{\alpha \triangleright \beta\}$. Покладемо $\Gamma = \varnothing$, $\Delta = \{\Psi^{\alpha}\}$.

1. Нехай $A_{\alpha} = \{a, b\}$, $A_{\beta} = \{b\}$, для Ψ неістотні всі імена, окрім x та y. Візьмемо $'x$ та $'y$ як терми t та s. Задамо $\Psi^{\alpha}([x \mapsto a, y \mapsto a]) = F$; задамо $\Psi^{\alpha}(\delta) = T$ при умові $\delta \in \{a, b\}^{\{x, y\}}$ та $b \in den(\delta)$.

Нехай $d=[x\mapsto a, y\mapsto a]$. Тоді $d_\alpha = d$. Маємо $d_\alpha(x)\downarrow = d_\alpha(y)\downarrow = a$, звідки отримуємо $'x='y_\alpha(d_\alpha)=T$, тому $'x='y^\alpha \,|\!\!\neq_{\boldsymbol{M}} \Psi^\alpha$. Проте $d_\alpha \notin^V A_\beta$, звідки $'x='y_\beta(d_\alpha)\uparrow$, що дає $\Box\, 'x='y_\alpha(d_\alpha)\uparrow$. У випадку $\delta\in\{a, b\}^{\{x,y\}}$ та $b\in den(\delta)$ отримуємо $\Psi^\alpha(\delta)=T$; у випадку $\delta\in\{a, b\}^{\{x,y\}}$ та $b\notin den(\delta)$ маємо $\delta=d_\alpha=d$, тоді $d_\alpha\notin^V A_\beta$, звідки $'x='y_\beta(d_\alpha)\uparrow$, що дає $\Box\, 'x='y_\alpha(d_\alpha)\uparrow$. Отже, $\Box\, 'x='y^\alpha \,|\!\!=_{\boldsymbol{M}} \Psi^\alpha$.

2. Нехай $A_\alpha=A_\beta=\{0\}$, для t, s, Ψ неістотні всі імена, окрім x. Для довільного $d\supseteq[x\mapsto 0]$ задамо $t_\alpha(d)\uparrow$, $s_\alpha(d)\uparrow$, $\Psi_\alpha(d)=F$, $t_\beta(d)=s_\beta(d)=0$, $\Psi_\beta(d)\uparrow$. Тоді $(t=s)_\beta(d)=T$, звідки $(\Box\, t=s)_\alpha(d)=T$. Звідси отримуємо, що $(\Box\, t=s\to\Psi)_\alpha(d)=F$, $(t=s\to\Psi)_\alpha(d)\uparrow$, $(t=s\to\Psi)_\beta(d)\uparrow$. Для усіх інших δ вважаємо $t_\alpha(\delta)\uparrow$, $s_\alpha(\delta)\uparrow$, $\Psi_\alpha(\delta)\uparrow$, $t_\beta(\delta)\uparrow$, $s_\beta(\delta)\uparrow$, $\Psi_\beta(\delta)\uparrow$. Тоді отримуємо $\alpha\models t=s\to\Psi$, $\beta\models t=s\to\Psi$, $\alpha\not\models\Box\, t=s\to\Psi$, звідки $\boldsymbol{M}\models t=s\to\Psi$ та $\boldsymbol{M}\not\models\Box\, t=s\to\Psi$, що дає $t=s^\alpha \,|\!\!=_{\boldsymbol{M}} \Psi^\alpha$ та $\Box\, t=s^\alpha \,|\!\!\neq_{\boldsymbol{M}} \Psi^\alpha$.

До успадкованих із пропозиційного рівня властивостей ПС, П1–П4 та модальних властивостей [7] додаємо властивості, які формулюються на основі семантичних властивостей ФЕНКЛ [4]. Вони є розвитком відповідних семантичних властивостей КНМЛ кванторного рівня з рівністю.

ZNΦ$_{|-}$) $S^{x,\bar v}(\Phi, s, \bar t)^\alpha, \Gamma \,|\!\!=_{\boldsymbol{M}} \Delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow S^{\bar v}(\Phi, \bar t)^\alpha, \Gamma \,|\!\!=_{\boldsymbol{M}} \Delta$ при умові $x\in\mu(\Phi)$.

ZNΦ$_{-|}$) $\Gamma \,|\!\!=_{\boldsymbol{M}} \Delta, S^{x,\bar v}(\Phi, s, \bar t)^\alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Gamma \,|\!\!=_{\boldsymbol{M}} \Delta, S^{\bar v}(\Phi, \bar t)^\alpha$ при умові $x\in\mu(\Phi)$.

ZΦ$_{|-}$) $S^{\bar x,\bar v}(\Phi, '\bar x, \bar t)^\alpha, \Gamma \,|\!\!=_{\boldsymbol{M}} \Delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow S^{\bar v}(\Phi, \bar t)^\alpha, \Gamma \,|\!\!=_{\boldsymbol{M}} \Delta$.

ZΦ$_{-|}$) $\Gamma \,|\!\!=_{\boldsymbol{M}} \Delta, S^{\bar x,\bar v}(\Phi, '\bar x, \bar t)^\alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Gamma \,|\!\!=_{\boldsymbol{M}} \Delta, S^{\bar v}(\Phi, \bar t)^\alpha$.

TrN$_{|-}$) $\Phi^\alpha, \Gamma \,|\!\!=_{\boldsymbol{M}} \Delta \Leftrightarrow \Psi^\alpha, \Gamma \,|\!\!=_{\boldsymbol{M}} \Delta$.

TrN$_{-|}$) $\Gamma \,|\!\!=_{\boldsymbol{M}} \Delta, \Phi^\alpha \Leftrightarrow \Gamma \,|\!\!=_{\boldsymbol{M}} \Delta, \Psi^\alpha$.

Для TrN формула Ψ отримана із формули Φ нормалізацією термів на основі властивостей ZT, ZNT, DD, DS, SST [4].

S¬$_{|-}$) $S^{\bar x}(\neg\Phi, \bar t)^\alpha, \Gamma \,|\!\!=_{\boldsymbol{M}} \Delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \neg S^{\bar x}(\Phi, \bar t)^\alpha, \Gamma \,|\!\!=_{\boldsymbol{M}} \Delta$.

S¬$_{-|}$) $\Gamma \,|\!\!=_{\boldsymbol{M}} \Delta, S^{\bar x}(\neg\Phi, \bar t)^\alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Gamma \,|\!\!=_{\boldsymbol{M}} \Delta, \neg S^{\bar x}(\Phi, \bar t)^\alpha$.

S∨$_{|-}$) $S^{\bar x}(\Phi\vee\Psi, \bar t)^\alpha, \Gamma \,|\!\!=_{\boldsymbol{M}} \Delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow S^{\bar x}(\Phi, \bar t)\vee S^{\bar x}(\Psi, \bar t)^\alpha, \Gamma \,|\!\!=_{\boldsymbol{M}} \Delta$.

S∨$_{-|}$) $\Gamma \,|\!\!=_{\boldsymbol{M}} \Delta, S^{\bar x}(\Phi\vee\Psi, \bar t)^\alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Gamma \,|\!\!=_{\boldsymbol{M}} \Delta, S^{\bar x}(\Phi, \bar t)\vee S^{\bar x}(\Psi, \bar t)^\alpha$.

SSΦ$_{|-}$) $S^{\bar u,\bar x}(S^{\bar x,\bar v}(\Phi, \bar r, \bar s), \bar t, \bar w)^\alpha, \Gamma \,|\!\!=_{\boldsymbol{M}} \Delta \Leftrightarrow \Xi^\alpha, \Gamma \,|\!\!=_{\boldsymbol{M}} \Delta$.

SSΦ$_{-|}$) $\Gamma \,|\!\!=_{\boldsymbol{M}} \Delta,$ $S^{\bar u,\bar x}(S^{\bar x,\bar v}(\Phi, \bar r, \bar s), \bar t, \bar w)^\alpha \Leftrightarrow \Gamma \,|\!\!=_{\boldsymbol{M}} \Delta, \Xi^\alpha$.

Для SSΦ Ξ – це формула $S^{\bar u,\bar x,\bar v}(\Phi, \bar t, S^{\bar u,\bar x}(r_1, \bar t, \bar w), ..., S^{\bar u,\bar x}(r_k, \bar t, \bar w),$ $S^{\bar u,\bar x}(s_1, \bar t, \bar w), ..., S^{\bar u,\bar x}(s_m, \bar t, \bar w))$.

S∃$_{|-}$) $S^{\bar v}(\exists x\Phi, \bar t)^\alpha, \Gamma \,|\!\!=_{\boldsymbol{M}} \Delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists x S^{\bar v}(\Phi, \bar t)^\alpha, \Gamma \,|\!\!=_{\boldsymbol{M}} \Delta$.

S∃$_{-|}$) $\Gamma \,|\!\!=_{\boldsymbol{M}} \Delta, S^{\bar v}(\exists x\Phi, \bar t)^\alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Gamma \,|\!\!=_{\boldsymbol{M}} \Delta, \exists x S^{\bar v}(\Phi, \bar t)^\alpha$.

Для властивостей S∃ умова $x\notin\{\bar v\}$ та x неістотне для $\bar t$.

S∃∃$_{|-}$) $S^{\bar v}(\exists x\Phi, \bar t)^\alpha, \Gamma \,|\!\!=_{\boldsymbol{M}} \Delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists y S^{\bar v,x}(\Phi, \bar t, 'y)^\alpha, \Gamma \,|\!\!=_{\boldsymbol{M}} \Delta$.

S∃∃$_{-|}$) $\Gamma \,|\!\!=_{\boldsymbol{M}} \Delta, S^{\bar v}(\exists x\Phi, \bar t)^\alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Gamma \,|\!\!=_{\boldsymbol{M}} \Delta, \exists y S^{\bar v,x}(\Phi, \bar t, 'y)^\alpha$.

Для S∃∃ умова $y\notin ndn(S^{\bar v}(\exists x\Phi, \bar t))$ та y тотально неістотне.

∃$_{|-}$) $\exists x\Phi^\alpha, \Gamma \,|\!\!=_{\boldsymbol{M}} \Delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow S^x(\Phi, 'y)^\alpha, \Gamma \,|\!\!=_{\boldsymbol{M}} \Delta$ при y тотально неістотному та $y\notin ndn(\Gamma, \Delta, \Phi)$.

∃$_{-|}$) $\Gamma \,|\!\!=_{\boldsymbol{M}} \Delta, \exists x\Phi^\alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Gamma \,|\!\!=_{\boldsymbol{M}} \Delta, S^x(\Phi, t_1)^\alpha, ..., S^x(\Phi, t_n)^\alpha, \exists x\Phi^\alpha$.

SE$_{|-}$) $S^{\bar v}(r=s, \bar t)^\alpha, \Gamma \,|\!\!=_{\boldsymbol{M}} \Delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow S^{\bar v}(r, \bar t)=S^{\bar v}(s, \bar t)^\alpha, \Gamma \,|\!\!=_{\boldsymbol{M}} \Delta$.

SE$_{-|}$) $\Gamma \,|\!\!=_{\boldsymbol{M}} \Delta, S^{\bar v}(r=s, \bar t)^\alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Gamma \,|\!\!=_{\boldsymbol{M}} \Delta, S^{\bar v}(r, \bar t)=S^{\bar v}(s, \bar t)^\alpha$.

ESm) $t=s^\alpha, \Gamma \,|\!\!=_{\boldsymbol{M}} \Delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t=s^\alpha, s=t^\alpha, \Gamma \,|\!\!=_{\boldsymbol{M}} \Delta$.

ETr) $t=s^\alpha, s=r^\alpha, \Gamma \,|\!\!=_{\boldsymbol{M}} \Delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t=s^\alpha, s=r^\alpha, t=r^\alpha, \Gamma \,|\!\!=_{\boldsymbol{M}} \Delta$.

$\mathrm{EPr}_{\vdash}$) $t=s^{\alpha}, \varphi^{\alpha}, \Gamma \models_M \Delta \;\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; t=s^{\alpha}, \varphi^{\alpha}, \xi^{\alpha}, \Gamma \models_M \Delta.$

$\mathrm{EPr}_{\dashv}$) $t=s^{\alpha}, \Gamma \models_M \Delta, \varphi^{\alpha} \;\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; t=s^{\alpha}, \Gamma \models_M \Delta, \varphi^{\alpha}, \xi^{\alpha}.$

Тут φ та ξ – $t=s$-еквівалентні примітивні формули.

Для функціонально стабільних ТМС згідно теореми 4 [8] отримуємо наступні властивості:

S□$_{\vdash}$) $\Gamma, S^{\bar{v}}(\square\Phi,\bar{t})^{\alpha} \models_M \Delta \;\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; \Gamma, \square S^{\bar{v}}(\Phi,\bar{t})^{\alpha} \models_M \Delta.$

S□$_{\dashv}$) $\Gamma \models_M \Delta,\; S^{\bar{v}}(\square\Phi,\bar{t})^{\alpha} \;\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; \Gamma \models_M \Delta,\; \square S^{\bar{v}}(\Phi,\bar{t})^{\alpha}.$

2. Секвенційні форми числень функціонально-екваційного рівня

Секвенційні числення КНМЛ функціонально-екваційного рівня можна трактувати як прикладні секвенційні числення. Виведення в таких численнях є виведеннями збагачених секвенцій – секвенцій з доданими аксіомами для рівності. До них належать:

– аксіома рефлексивності $\forall x('x='x)$;

– аксіома симетричності $\forall x\forall y('x='y \to 'y='x)$;

– аксіома транзитивності $\forall x\forall y\forall z('x='y \to 'y='z \to 'x='z)$.

Тут x, y, z – тотально неістотні.

– аксіоми заміни рівних у нормальних термах (для всіх $f\in Fns$ та $z,\bar{u},\bar{t}$)
$\forall x\forall y('x='y \to S^{z,\bar{u}}(f,'x,\bar{t}) = S^{z,\bar{u}}(f,'y,\bar{t}))$;

– аксіоми заміни рівних в елементарних формулах (для всіх $p\in Ps$ та $z,\bar{u},\bar{t}$)
$\forall x\forall y('x='y \to (S^{z,\bar{u}}(p,'x,\bar{t}) \leftrightarrow S^{z,\bar{u}}(p,'y,\bar{t}))$.

Тут x, y – тотально неістотні, причому x, y відмінні від $z,\bar{t}$ та $x,y \notin nm(\bar{t})$.

Секвенційні форми числень КНМЛ функціонально-екваційного рівня індуковані відповідними властивостями відношення $\models$. До базових секвенційних форм таких числень найперше віднесемо форми, успадковані від числень КНЛ [4]. Вони не змінюють схему моделі світу. Це $\vdash\neg$, $\dashv\neg$, $\vdash\vee$, $\dashv\vee$, $\vdash$**SSΦ**, $\dashv$**SSΦ**, $\vdash$**S¬**, $\dashv$**S¬**, $\vdash$**S∨**, $\dashv$**S∨**, $\vdash$**S∃**, $\dashv$**S∃**, $\vdash$**S∃∃**, $\dashv$**S∃∃**, $\vdash\exists$, $\dashv\exists$, $\vdash$**ZNΦ**, $\dashv$**ZNΦ**, $\vdash$**ZΦ**, $\dashv$**ZΦ**, $\vdash$**SE**, $\dashv$**SE**, а також форми, призначені для нормалізації термів.

Наведемо ці секвенційні форми:

$$\vdash\neg\;\frac{{}_{\alpha\dashv}A,\ \Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha\vdash}\neg A,\ \Sigma\ //\ St\ //\ M};$$

$$\dashv\neg\;\frac{{}_{\alpha\vdash}A,\ \Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha\dashv}\neg A,\ \Sigma\ //\ St\ //\ M};$$

$$\vdash\vee\;\frac{{}_{\alpha\vdash}A,\ \Sigma\ //\ St\ //M \qquad {}_{\alpha\vdash}B,\ \Sigma\ //\ St\ //M}{{}_{\alpha\vdash}A\vee B,\ \Sigma\ //\ St\ //M};$$

$$\dashv\vee\;\frac{{}_{\alpha\dashv}A,\ {}_{\alpha\dashv}B,\ \Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha\dashv}A\vee B,\ \Sigma\ //\ St\ //\ M}.$$

Нехай B отримана з A згорткою суперпозицій згідно із SSΦ. Відповідні форми:

$$\vdash\mathbf{SS\Phi}\;\frac{{}_{\alpha\vdash}B,\Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha\vdash}A,\Sigma\ //\ St\ //\ M};$$

$$\dashv\mathbf{SS\Phi}\;\frac{{}_{\alpha\dashv}B,\Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha\dashv}A,\Sigma\ //\ St\ //\ M}.$$

Секвенційні форми для пронесення суперпозицій через $\neg$ та $\vee$:

$$\vdash\mathbf{S}\neg\;\frac{{}_{\alpha\vdash}\neg S^{\bar{v}}(A,\bar{t}),\Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha\vdash}S^{\bar{v}}(\neg A,\bar{t}),\Sigma\ //\ St\ //\ M};$$

$$\dashv\mathbf{S}\neg\;\frac{{}_{\alpha\dashv}\neg S^{\bar{v}}(A,\bar{t}),\Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha\dashv}S^{\bar{v}}(\neg A,\bar{t}),\Sigma\ //\ St\ //\ M};$$

$$\vdash\mathbf{S}\vee\;\frac{{}_{\alpha\vdash}S^{\bar{v}}(A,\bar{t})\vee S^{\bar{v}}(B,\bar{t}),\Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha\vdash}S^{\bar{v}}(A\vee B,\bar{t}),\Sigma\ //\ St\ //\ M};$$

$$\dashv\mathbf{S}\vee\;\frac{{}_{\alpha\dashv}S^{\bar{v}}(A,\bar{t})\vee S^{\bar{v}}(B,\bar{t}),\Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha\dashv}S^{\bar{v}}(A\vee B,\bar{t}),\Sigma\ //\ St\ //\ M}.$$

Секвенційні форми для елімінації неістотних імен і спрощення формул:

$$\vdash\mathbf{ZN}\;\frac{{}_{\alpha\vdash}S^{\bar{v}}(p,\bar{t}),\Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha\vdash}S^{x,\bar{v}}(p,t,\bar{t}),\Sigma\ //\ St\ //\ M};$$

$$\dashv\mathbf{ZN}\;\frac{{}_{\alpha\dashv}S^{\bar{v}}(p,\bar{t}),\Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha\dashv}S^{x,\bar{v}}(p,t,\bar{t}),\Sigma\ //\ St\ //\ M}.$$

Для форм типу **ZN** умова: $x\in\mu(p)$.

$$\vdash\mathbf{Z\Phi}\;\frac{{}_{\alpha\vdash}S^{\bar{v}}(A,\bar{t}),\Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha\vdash}S^{\bar{x},\bar{v}}(A,'\bar{x},\bar{t}),\Sigma\ //\ St\ //\ M};$$

$$_{\dashv}\mathbf{Z\Phi}\ \frac{{}_{\alpha}{\dashv} S^{\bar{v}}(A,\bar{t}),\Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha}{\dashv} S^{x,\bar{v}}(A,{}'x,\bar{t}),\Sigma\ //\ St\ //\ M}.$$

Секвенційні форми для пронесення суперпозиції через рівність:

$$_{\vdash}\mathbf{SE}\ \frac{{}_{\alpha}{\vdash} S^{\bar{v}}(t,\bar{t}) = S^{\bar{v}}(s,\bar{t}),\Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha}{\vdash} S^{\bar{v}}(t = s,\bar{t}),\Sigma\ //\ St\ //\ M};$$

$$_{\dashv}\mathbf{SE}\ \frac{{}_{\alpha}{\dashv} S^{\bar{v}}(t,\bar{t}) = S^{\bar{v}}(s,\bar{t}),\Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha}{\dashv} S^{\bar{v}}(t = s,\bar{t}),\Sigma\ //\ St\ //\ M}.$$

Задамо секвенційні форми для нормалізації термів.

Нехай B отримана з A виконанням кроку нормалізації термів на основі властивостей SST, ZNT, ZT, DS, DD. Отримуємо секвенційні форми ${}_{\vdash}$**SST**, ${}_{\dashv}$**SST**, ${}_{\vdash}$**ZNT**, ${}_{\dashv}$**ZNT**, ${}_{\vdash}$**ZT**, ${}_{\dashv}$**ZT**, ${}_{\vdash}$**DS**, ${}_{\dashv}$**DS**, ${}_{\vdash}$**DD**, ${}_{\dashv}$**DD**. Вони мають наступний вигляд (тут **тип** означає **SST**, **ZNT**, **ZT**, **DS**, **DD**):

$$_{\vdash}\mathbf{тип}\ \frac{{}_{\alpha}{\vdash} B,\Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha}{\vdash} A,\Sigma\ //\ St\ //\ M};$$

$$_{\dashv}\mathbf{тип}\ \frac{{}_{\alpha}{\dashv} B,\Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha}{\dashv} A,\Sigma\ //\ St\ //\ M}.$$

Базові секвенційні форми ${}_{\vdash}$**SST** та ${}_{\dashv}$**SST**, ${}_{\vdash}$**ZNT** та ${}_{\dashv}$**ZNT**, ${}_{\vdash}$**ZT** та ${}_{\dashv}$**ZT**, ${}_{\vdash}$**DS** та ${}_{\dashv}$**DS**, ${}_{\vdash}$**DD** та ${}_{\dashv}$**DD** індукують похідні форми нормалізації термів ${}_{\vdash}$**TrN** та ${}_{\dashv}$**TrN**:

$$_{\vdash}\mathbf{TrN}\ \frac{{}_{\alpha}{\vdash} B,\Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha}{\vdash} A,\Sigma\ //\ St\ //\ M};$$

$$_{\dashv}\mathbf{TrN}\ \frac{{}_{\alpha}{\dashv} B,\Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha}{\dashv} A,\Sigma\ //\ St\ //\ M}.$$

Тут B отримана з A нормалізацією термів на основі властивостей SST, ZNT, ZT, DS, DD.

Секвенційні форми для пронесення суперпозицій через квантор:

$$_{\vdash}\mathbf{S}\exists\ \frac{{}_{\alpha}{\vdash} \exists x S^{\bar{v}}(A,\bar{t}),\Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha}{\vdash} S^{\bar{v}}(\exists xA,\bar{t}),\Sigma\ //\ St\ //\ M};$$

$$_{\dashv}\mathbf{S}\exists\ \frac{{}_{\alpha}{\dashv} \exists x S^{\bar{v}}(A,\bar{t}),\Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha}{\dashv} S^{\bar{v}}(\exists xA,\bar{t}),\Sigma\ //\ St\ //\ M};$$

$$_{\vdash}\mathbf{S}\exists\exists\ \frac{{}_{\alpha}{\vdash} \exists y S^{\bar{v},x}(A,\bar{t},{}'y),\Sigma\ //\ St'\ //\ M}{{}_{\alpha}{\vdash} S^{\bar{v}}(\exists xA,\bar{t}),\Sigma\ //\ St\ //\ M};$$

$$_{\dashv}\mathbf{S}\exists\exists\ \frac{{}_{\alpha}{\dashv} \exists y S^{\bar{v},x}(A,\bar{t},{}'y),\Sigma\ //\ St'\ //\ M}{{}_{\alpha}{\dashv} S^{\bar{v}}(\exists xA,\bar{t}),\Sigma\ //\ St\ //\ M}.$$

Для ${}_{\vdash}$**S**∃ та ${}_{\dashv}$**S**∃ умови: $x \notin \{\bar{v}\}$ та $x \in \mu(\bar{t})$. Для ${}_{\vdash}$**S**∃∃ та ${}_{\dashv}$**S**∃∃ умови: $x \in \{\bar{v}\}$ або $x \notin \mu(\bar{t})$, причому y тотально неістотне та $y \notin ndn(S^{\bar{v}}(\exists x\Phi,\bar{t}))$.

Наведемо секвенційні форми для елімінації кванторів.

$$_{\vdash}\exists\ \frac{{}_{\alpha}{\vdash} S^{x}(A,{}'y),\Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha}{\vdash} \exists xA,\Sigma\ //\ St\ //\ M}.$$

Для ${}_{\vdash}$∃ умова: y тотально неістотне та $y \notin ndn(\Sigma, A)$.

$$_{\dashv}\exists\ \frac{{}_{\alpha}{\dashv} S^{x}(A,t_1),\ldots,{}_{\alpha}{\dashv} S^{x}(A,t_n),\Sigma,{}_{\alpha}{\dashv} \exists xA\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha}{\dashv} \exists xA,\Sigma\ //\ St\ //\ M}.$$

Для ${}_{\dashv}$∃ терми $t_1,\ldots,t_n$ нормальні, побудовані з ФНС і ДНС-дублів імен доступних формул секвенції ${}_{\alpha}{\dashv}\exists xA,\Sigma$ та її наступників.

Для пронесення модальності через суперпозицію необхідна умова функціональної стабільності. Тому семантичними моделями секвенційних числень КНМЛ функціонально-еквацiйного рівня вважаємо функціонально стабільні ТМС. Звідси маємо форми:

$$_{\vdash}\mathbf{S}\Box\ \frac{{}_{\alpha}{\vdash} \Box S^{\bar{v}}(A,\bar{t}),\Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha}{\vdash} S^{\bar{v}}(\Box A,\bar{t}),\Sigma\ //\ St\ //\ M};$$

$$_{\dashv}\mathbf{S}\Box\ \frac{{}_{\alpha}{\dashv} \Box S^{\bar{v}}(A,\bar{t}),\Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha}{\dashv} S^{\bar{v}}(\Box A,\bar{t}),\Sigma\ //\ St\ //\ M}.$$

Наявність аксіом рівності означає, що для кожного наявного в секвенції стану α в ній мусять бути присутні ${}_{\alpha}{\vdash}\forall x({}'x = {}'x)$, ${}_{\alpha}{\vdash}\forall x\forall y({}'x = {}'y \to {}'y = {}'x)$, ${}_{\alpha}{\vdash}\forall x\forall y\forall z({}'x = {}'y \to {}'y = {}'z \to {}'x = {}'z)$, а також ${}_{\alpha}{\vdash}\forall x\forall y({}'x = {}'y \to S^{z,\bar{u}}(f,{}'x,\bar{t}) = S^{z,\bar{u}}(f,{}'y,\bar{t}))$ та ${}_{\alpha}{\vdash}\forall x\forall y({}'x = {}'y \to (S^{z,\bar{u}}(p,{}'x,\bar{t}) \leftrightarrow S^{z,\bar{u}}(p,{}'y,\bar{t}))$ для всіх $f \in Fns$, $p \in Ps$ та $z,\bar{u},\bar{t}$.

Поява нового стану α веде до явного виписування таких специфікованих формул. Проте не будемо явно вносити до формул секвенції зазначені аксіоми, а будемо враховувати їх при потребі. При цьому замість продукування всеможливих елементарних формул-рівностей та еквівалентних елементарних формул на основі аксіом заміни рівних, використаємо властивість EPr [8], яка при умові $\alpha|{=}\,t=s$ дає змогу продукувати $t{=}s$-варіанти доступних примітивних формул стану α. Це означає наступну модифікацію процедури побудови секвенційного дерева.

Аксіома рефлексивності вимагає, щоб при появі в стані α кожного нового терма t до секвенції додавалась $_{\alpha|-}\,t=t$. Тому цю аксіому можна врахувати введенням додаткової умови замкненості секвенції: наявність специфікованої формули вигляду $_{\alpha-|}\,t=t$.

Нехай на попередньому кроці була отримана формула $_{\alpha|-}t{=}s$, або формула $_{\alpha|-}t=s$ стала доступною на початку етапу (тут s та t – нормальні терми). Далі робимо наступні додаткові кроки.

Для врахування аксіоми симетричності додаємо формулу $_{\alpha|-}s=t$. Для цього використовуємо допоміжну секвенційну форму:

$$\mathbf{ESm}\ \frac{_{\alpha|-}\,t=s,\ _{\alpha|-}s=t,\ \Sigma\ //\ St\ //\ M}{_{\alpha|-}\,t=s,\ \Sigma\ //\ St\ //\ M}.$$

Нехай невірно $t\angle s$ та невірно $s\angle t$ ($\sigma\angle\rho$ означає [8], що терм σ є підтермом терма чи формули ρ). Тоді для кожної доступної специфікованої примітивної формули $_{\alpha|-}\varphi$ чи $_{\alpha-|}\varphi$, до складу якої входить t або s, будуємо $t{=}s$-еквівалентні їй формули ($t{=}s$-варіанти формули φ) з тією ж специфікацією, всеможливими способами замінюючи деякі входження t на s та s на t.

Нехай $t\angle s$. Тоді для кожної доступної специфікованої примітивної формули $_{\alpha|-}\varphi$ чи $_{\alpha-|}\varphi$, до складу якої входить s, будуємо її $t{=}s$-варіанти з тією ж специфікацією, всеможливими способами замінюючи деякі входження s на t (можливо, за декілька кроків, адже при заміні s на t може виникнути нове входження s, яке замінимо на t і т.д.). Заміни t на s не робимо, адже тоді процес заміни не обірветься.

Аналогічно робимо у випадку $s\angle t$, тоді виконуємо заміни t на s.

Допоміжні секвенційні форми для отримання $t{=}s$-варіант:

$$_{|-}\mathbf{EPr}\ \frac{_{\alpha|-}\,t=s,\ _{\alpha|-}\varphi,\ _{\alpha|-}\psi,\ \Sigma\ //\ St\ //\ M}{_{\alpha|-}\,t=s,\ _{\alpha|-}\varphi,\ \Sigma\ //\ St\ //\ M};$$

$$_{-|}\mathbf{EPr}\ \frac{_{\alpha|-}\,t=s,\ _{\alpha-|}\varphi,\ _{\alpha-|}\psi,\ \Sigma\ //\ St\ //\ M}{_{\alpha|-}\,t=s,\ _{\alpha-|}\varphi,\ \Sigma\ //\ St\ //\ M}.$$

Тут φ та ψ – $t{=}s$-еквівалентні примітивні формули, причому ψ отримана із φ так, як вищеописано.

Для врахування аксіоми транзитивності при появі $_{\alpha|-}t=s$ та $_{\alpha|-}s=r$ додаємо $_{\alpha|-}t=r$ (фактично, враховуючи симетричність рівності, до наявних $_{\alpha|-}t=s$, $_{\alpha|-}s=t$, $_{\alpha|-}s=r$, $_{\alpha|-}r=s$ додаємо $_{\alpha|-}t=r$, $_{\alpha|-}r=t$), а далі робимо так, як вищеописано.

Допоміжна секвенційна форма для врахування аксіоми транзитивності:

$$\mathbf{ETr}\ \frac{_{\alpha|-}\,t=s,\ _{\alpha|-}s=r,\ _{\alpha|-}t=r,\ \Sigma\ //St//M}{_{\alpha|-}\,t=s,\ _{\alpha|-}s=r,\ \Sigma\ //\ St\ //\ M}.$$

Секвенційні форми для модальних операторів аналогічні відповідним секвенційним формам пропозиційного та кванторного рівнів (див. [5, 6]).

3. Коректність і повнота секвенційних числень загальних та темпоральних КНМЛ

Процедура побудови секвенційного дерева в основному аналогічна відповідній процедурі для секвенційних числень КНЛ [4], але побудова дерева ведеться паралельно із побудовою схеми моделей світу. При цьому схема моделей світу оновлюється при використанні $_{-|}\Box$-форми, яка додає нові стани. На початку побудови зафіксуємо деякий нескінченний список TN "нових" тотально неістотних імен, такі імена та відповідні "нові" ДНС не зустрічаються в початковій секвенції. З кожним листом дерева пов’язуємо списки ATr, AFs, ADn відповідно активних термів, ФНС, ДНС-дублів імен. Терми будуються з ФНС та ДНС-дублів імен доступних формул відповідного стану для листа та його наступників.

Побудова секвенційного дерева розбита на етапи. Кожне застосування секвенційної форми здійснюється до скінченної множини доступних на даний момент формул. На початку кожного етапу розширюємо список доступних формул, розширюємо *AFs* та *ADn*. Спочатку виконуємо ${}_{\dashv}\Box$-форми, які додають нові стани. Потім виконуємо всі ${}_{\vdash}\exists$-форми, які додають нові терми (кожне таке виконання задіює нове $z \in TN$, далі для відповідного стану додаємо z' до *ADn* та розширюємо *ATr* так, як описано в [4]). Після цього виконуємо всі **S**$\exists\exists$-форми, далі – форми типу ${}_{\vdash}\neg$, ${}_{\dashv}\neg$, ${}_{\vdash}\vee$, ${}_{\dashv}\vee$, ${}_{\vdash}\mathbf{SS\Phi}$, ${}_{\dashv}\mathbf{SS\Phi}$, ${}_{\vdash}\mathbf{S}\neg$, ${}_{\dashv}\mathbf{S}\neg$, ${}_{\vdash}\mathbf{S}\vee$, ${}_{\dashv}\mathbf{S}\vee$, ${}_{\vdash}\mathbf{SE}$, ${}_{\dashv}\mathbf{SE}$, ${}_{\vdash}\mathbf{S}\exists$, ${}_{\dashv}\mathbf{S}\exists$, ${}_{\vdash}\mathbf{S}\Box$, ${}_{\dashv}\mathbf{S}\Box$, ${}_{\dashv}\exists$. При застосуванні ${}_{\dashv}\exists$ використовуємо терми *ATr*. До кожної отриманої таким чином нової формули як допоміжні застосовуємо, за можливості, форми типу ${}_{\vdash}\mathbf{Z\Phi}$, ${}_{\dashv}\mathbf{Z\Phi}$, ${}_{\vdash}\mathbf{ZN\Phi}$, ${}_{\dashv}\mathbf{ZN\Phi}$. Якщо нова формула елементарна, але непримітивна, то додатково застосовуємо форми типу ${}_{\vdash}\mathbf{TrN}$, ${}_{\dashv}\mathbf{TrN}$.

При потребі виконуємо також додаткові кроки для продукування нових примітивних формул-рівностей (форми **ESm** і **ETr**) та отримання *t*=*s*-варіант доступних примітивних формул (форми ${}_{\vdash}\mathbf{EPr}$ і ${}_{\dashv}\mathbf{EPr}$) так, як вищеописано. Враховуємо також наступну умову замкненості секвенції: наявність специфікованої формули вигляду ${}_{\alpha\dashv}t = t$.

На основі семантичних властивостей відношення $\models$ для секвенційних числень КНМЛ функціонально-екваційного рівня отримуємо наступну теорему.

Теорема 1. 1) нехай

$$\frac{{}_{\vdash}\Lambda_{\dashv}\mathrm{K}\ //\ St'\ //\ M'}{{}_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta\ //\ St\ //\ M}$$ – секвенційна форма.

Тоді якщо $\Lambda \models \mathrm{K}$, то $\Gamma \models \Delta$;

2) нехай

$$\frac{{}_{\vdash}\Lambda_{\dashv}\mathrm{K}\ //\ St\ //\ M \qquad {}_{\vdash}\mathrm{X}_{\dashv}\mathrm{Z}\ //\ St\ //\ M}{{}_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta\ //\ St\ //\ M}$$ –

секвенційна форма. Тоді якщо $\Lambda \models \mathrm{K}$ та $\mathrm{X} \models \mathrm{Z}$, то $\Gamma \models \Delta$.

Для секвенційних числень КНМЛ функціонально-екваційного рівня справджується

Теорема 2 (коректності). Нехай секвенція ${}_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ вивідна. Тоді $\Gamma \models \Delta$.

Доведення аналогічне доведенню відповідної теореми традиційних секвенційних числень. Воно здійснюється індукцією за побудовою замкненого секвенційного дерева для ${}_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$. Для гарантування пронесення суперпозицій через модальні композиції обмежуємо клас ТМС умовою функціональної стабільності.

Нехай для ${}_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ маємо замкнене тривіальне дерево, тоді воно складається з єдиної вершини ${}_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$, яка є замкненою секвенцією. Звідси $\Gamma \models \Delta$.

Нехай для ${}_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ маємо замкнене секвенційне дерево γ, причому на останньому кроці виведення була застосована секвенційна форма $\dfrac{{}_{\vdash}\Lambda_{\dashv}\mathrm{K}\ //\ St'\ //\ M'}{{}_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta\ //\ St\ //\ M}$. За припущенням індукції маємо $\Lambda \models \mathrm{K}$. За теоремою 1 тоді $\Gamma \models \Delta$.

Нехай для ${}_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ маємо замкнене секвенційне дерево та останньому кроці виведення застосована секвенційна форма

$$\frac{{}_{\vdash}\Lambda_{\dashv}\mathrm{K}\ //\ St\ //\ M \qquad {}_{\vdash}\mathrm{X}_{\dashv}\mathrm{Z}\ //\ St\ //\ M}{{}_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta\ //\ St\ //\ M}.$$

За припущенням індукції маємо $\Lambda \models \mathrm{K}$ та $\mathrm{X} \models \mathrm{Z}$ для кожної узгодженої ТМС $\boldsymbol{M}$. За теоремою 1 тоді $\Gamma \models \Delta$.

Теорема доведена.

Для доведення повноти секвенційних числень КНМЛ функціонально-екваційного рівня використовуємо метод систем модельних множин.

Система модельних множин – це пара $(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{R})$, де $\boldsymbol{\Omega} = \{\boldsymbol{H}_\alpha \mid \alpha \in \boldsymbol{S}\}$.

Нехай Tr_α – множина нормальних термів, побудованих із ФНС та ДНС-дублів імен формул множин $\boldsymbol{H}_\alpha$.

Множина $\boldsymbol{H}_\alpha$ специфікованих формул із $W_\alpha = nm(\boldsymbol{H}_\alpha)$ – модельна множина стану α, якщо виконуються такі умови.

НС. Для кожної примітивної Φ лише одна з формул ${}_{\alpha\vdash}\Phi$ чи ${}_{\alpha\dashv}\Phi$ може належати до $\boldsymbol{H}_\alpha$.

НN. Нехай Φ – елементарна формула, Ψ – примітивна формула, отримана з Φ нормалізацією термів на основі властивостей SST, ZNT, ZT, DS, DD. Тоді:

якщо ${}_{\alpha\vdash}\Phi \in \boldsymbol{H}_\alpha$, то ${}_{\alpha\vdash}\Psi \in \boldsymbol{H}_\alpha$;

якщо ${}_{\alpha\dashv}\Phi \in \boldsymbol{H}_\alpha$, то ${}_{\alpha\dashv}\Psi \in \boldsymbol{H}_\alpha$.

HNΦ. Якщо ${}_{\alpha}\vdash S^{x,\bar{v}}(\Phi, s, \bar{t}) \in \boldsymbol{H}_{\alpha}$ та $y\in\mu(\Phi)$, то ${}_{\alpha}\vdash S^{\bar{v}}(\Phi, \bar{t}) \in \boldsymbol{H}_{\alpha}$;

якщо ${}_{\alpha}\dashv S^{x,\bar{v}}(\Phi, s, \bar{t}) \in \boldsymbol{H}_{\alpha}$ та $y\in\mu(\Phi)$, то ${}_{\alpha}\dashv S^{\bar{v}}(\Phi, \bar{t}) \in \boldsymbol{H}_{\alpha}$.

HΦ. Якщо $\vdash S^{\bar{x},\bar{v}}(\Phi, '\bar{x}, \bar{t}) \in \boldsymbol{H}_{\alpha}$, то $\vdash S^{\bar{v}}(\Phi, \bar{t}) \in \boldsymbol{H}_{\alpha}$;

якщо $\dashv S^{\bar{x},\bar{v}}(\Phi, '\bar{x}, \bar{t}) \in \boldsymbol{H}_{\alpha}$, то $\dashv S^{\bar{v}}(\Phi, \bar{t}) \in \boldsymbol{H}_{\alpha}$.

H¬. Якщо ${}_{\alpha}\vdash\neg\Phi\in\boldsymbol{H}_{\alpha}$, то ${}_{\alpha}\dashv\Phi\in\boldsymbol{H}_{\alpha}$;

якщо ${}_{\alpha}\dashv\neg\Phi\in\boldsymbol{H}_{\alpha}$, то ${}_{\alpha}\vdash\Phi\in\boldsymbol{H}_{\alpha}$.

H∨. Якщо ${}_{\alpha}\vdash\Phi\vee\Psi\in\boldsymbol{H}_{\alpha}$, то ${}_{\alpha}\vdash\Phi\in\boldsymbol{H}_{\alpha}$ або ${}_{\alpha}\vdash\Psi\in\boldsymbol{H}_{\alpha}$;

якщо ${}_{\alpha}\dashv\Phi\vee\Psi\in\boldsymbol{H}_{\alpha}$, то ${}_{\alpha}\dashv\Phi\in\boldsymbol{H}_{\alpha}$ та ${}_{\alpha}\dashv\Psi\in\boldsymbol{H}_{\alpha}$.

HSΦ. Якщо

${}_{\alpha}\vdash S^{\bar{u},\bar{x}}(S^{\bar{x},\bar{v}}(\Phi, \bar{r}, \bar{s}), \bar{t}, \bar{w}) \in \boldsymbol{H}_{\alpha}$, то ${}_{\alpha}\vdash S^{\bar{u},\bar{x},\bar{v}}(\Phi, \bar{t}, S^{\bar{u},\bar{x}}(r_1, \bar{t}, \bar{w}), ..., S^{\bar{u},\bar{x}}(r_k, \bar{t}, \bar{w}),$ $S^{\bar{u},\bar{x}}(s_1, \bar{t}, \bar{w}), ..., S^{\bar{u},\bar{x}}(s_m, \bar{t}, \bar{w})) \in \boldsymbol{H}_{\alpha}$;

якщо ${}_{\alpha}\dashv S^{\bar{u},\bar{x}}(S^{\bar{x},\bar{v}}(\Phi, \bar{r}, \bar{s}), \bar{t}, \bar{w}) \in \boldsymbol{H}_{\alpha}$, то ${}_{\alpha}\dashv S^{\bar{u},\bar{x},\bar{v}}(\Phi, \bar{t}, S^{\bar{u},\bar{x}}(r_1, \bar{t}, \bar{w}), ..., S^{\bar{u},\bar{x}}(r_k, \bar{t}, \bar{w}),$ $S^{\bar{u},\bar{x}}(s_1, \bar{t}, \bar{w}), ..., S^{\bar{u},\bar{x}}(s_m, \bar{t}, \bar{w})) \in \boldsymbol{H}_{\alpha}$.

HS¬. Якщо ${}_{\alpha}\vdash S^{\bar{x}}(\neg\Phi, \bar{t}) \in \boldsymbol{H}_{\alpha}$, то ${}_{\alpha}\vdash\neg S^{\bar{x}}(\Phi, \bar{t}) \in \boldsymbol{H}_{\alpha}$;

якщо ${}_{\alpha}\dashv S^{\bar{x}}(\neg\Phi, \bar{t}) \in \boldsymbol{H}_{\alpha}$, то ${}_{\alpha}\dashv\neg S^{\bar{x}}(\Phi, \bar{t}) \in \boldsymbol{H}_{\alpha}$.

HS∨. Якщо ${}_{\alpha}\vdash S^{\bar{x}}(\Phi\vee\Psi, \bar{t}) \in \boldsymbol{H}_{\alpha}$, то ${}_{\alpha}\vdash S^{\bar{x}}(\Phi, \bar{t}) \vee S^{\bar{x}}(\Psi, \bar{t}) \in \boldsymbol{H}_{\alpha}$;

якщо ${}_{\alpha}\dashv S^{\bar{x}}(\Phi\vee\Psi, \bar{t}) \in \boldsymbol{H}_{\alpha}$, то ${}_{\alpha}\dashv S^{\bar{x}}(\Phi, \bar{t}) \vee S^{\bar{x}}(\Psi, \bar{t}) \in \boldsymbol{H}_{\alpha}$.

HSE. Якщо ${}_{\alpha}\vdash S^{\bar{v}}(r = s, \bar{t}) \in \boldsymbol{H}_{\alpha}$, то ${}_{\alpha}\vdash S^{\bar{v}}(r, \bar{t}) = S^{\bar{v}}(s, \bar{t}) \in \boldsymbol{H}_{\alpha}$;

якщо ${}_{\alpha}\dashv S^{\bar{v}}(r = s, \bar{t}) \in \boldsymbol{H}_{\alpha}$, то ${}_{\alpha}\dashv S^{\bar{v}}(r, \bar{t}) = S^{\bar{v}}(s, \bar{t}) \in \boldsymbol{H}_{\alpha}$.

HS∃. Якщо $x\notin\{\bar{v}\}$ та $x\in\mu(\bar{t})$, то:

якщо ${}_{\alpha}\vdash S^{\bar{v}}(\exists x\Phi, \bar{t}) \in \boldsymbol{H}_{\alpha}$, то ${}_{\alpha}\vdash\exists x S^{\bar{v}}(\Phi, \bar{t}) \in \boldsymbol{H}_{\alpha}$;

якщо ${}_{\alpha}\dashv S^{\bar{v}}(\exists x\Phi, \bar{t}) \in \boldsymbol{H}_{\alpha}$, то ${}_{\alpha}\dashv\exists x S^{\bar{v}}(\Phi, \bar{t}) \in \boldsymbol{H}_{\alpha}$.

HS∃∃. Якщо $x\in\{\bar{v}\}$ або $x\notin\mu(\bar{t})$, то для деякого тотально неістотного $y\in W_{\alpha}$ такого, що $y \notin ndn(S^{\bar{v}}(\exists x\Phi, \bar{t}))$, маємо:

якщо ${}_{\alpha}\vdash S^{\bar{v}}(\exists x\Phi, \bar{t}) \in \boldsymbol{H}_{\alpha}$, то ${}_{\alpha}\vdash\exists y S^{\bar{v},x}(\Phi, \bar{t}, 'y) \in \boldsymbol{H}_{\alpha}$;

якщо ${}_{\alpha}\dashv S^{\bar{v}}(\exists x\Phi, \bar{t}) \in \boldsymbol{H}_{\alpha}$, то ${}_{\alpha}\dashv\exists y S^{\bar{v},x}(\Phi, \bar{t}, 'y) \in \boldsymbol{H}_{\alpha}$.

HS□. Якщо ${}_{\alpha}\vdash S^{\bar{v}}(\Box\Phi, \bar{t}) \in \boldsymbol{H}_{\alpha}$, то ${}_{\alpha}\vdash\Box S^{\bar{v}}(\Phi, \bar{t}) \in \boldsymbol{H}_{\alpha}$;

якщо ${}_{\alpha}\dashv S^{\bar{v}}(\Box\Phi, \bar{t}) \in \boldsymbol{H}_{\alpha}$, то ${}_{\alpha}\dashv\Box S^{\bar{v}}(\Phi, \bar{t}) \in \boldsymbol{H}_{\alpha}$.

H∃. Якщо ${}_{\alpha}\vdash\exists x\Phi\in\boldsymbol{H}_{\alpha}$, то існує $t\in Tr_{\alpha}$ таке, що ${}_{\alpha}\vdash S^{x}(\Phi, t) \in \boldsymbol{H}_{\alpha}$;

якщо ${}_{\alpha}\dashv\exists x\Phi\in\boldsymbol{H}_{\alpha}$, то для всіх $t\in Tr_{\alpha}$ маємо ${}_{\alpha}\dashv S^{x}(\Phi, t) \in \boldsymbol{H}_{\alpha}$.

HERf. Кожна формула вигляду $\vdash t = t$, де $t\in Tr_{\alpha}$, належить до $\boldsymbol{H}_{\alpha}$.

HESm. Якщо ${}_{\alpha}\vdash t = s\in\boldsymbol{H}_{\alpha}$, то ${}_{\alpha}\vdash s = t\in\boldsymbol{H}_{\alpha}$.

HETr. Якщо ${}_{\alpha}\vdash t = s\in\boldsymbol{H}_{\alpha}$ та ${}_{\alpha}\vdash s = r\in\boldsymbol{H}_{\alpha}$, то $\vdash t = r\in\boldsymbol{H}_{\alpha}$.

HEPr. Нехай ξ – t=s-варіанта примітивної формули φ.

Якщо ${}_{\alpha}\vdash t = s\in\boldsymbol{H}_{\alpha}$ та ${}_{\alpha}\vdash\varphi\in\boldsymbol{H}_{\alpha}$, то ${}_{\alpha}\vdash\xi\in\boldsymbol{H}_{\alpha}$;

якщо ${}_{\alpha}\vdash t = s\in\boldsymbol{H}_{\alpha}$ та ${}_{\alpha}\dashv\varphi\in\boldsymbol{H}_{\alpha}$, то ${}_{\alpha}\dashv\xi\in\boldsymbol{H}_{\alpha}$.

У випадку загальних ТМЛ додаємо:

H□. Якщо ${}_{\alpha}\vdash\Box\Phi\in\boldsymbol{H}_{\alpha}$, то ${}_{\beta}\vdash\Phi\in\boldsymbol{H}_{\beta}$ для всіх станів $\beta\in\boldsymbol{S}$ таких, що $\alpha\rhd\beta$;

якщо ${}_{\alpha}\dashv\Box\Phi\in\boldsymbol{H}_{\alpha}$, то ${}_{\beta}\dashv\Phi\in\boldsymbol{H}_{\beta}$ для деякого стану $\beta\in\boldsymbol{S}$ такого, що $\alpha\rhd\beta$.

У випадку темпоральних КНМЛ додаємо:

H□↑. Якщо ${}_{\alpha}\vdash\Box{\uparrow}\Phi\in\boldsymbol{H}_{\alpha}$, то ${}_{\beta}\vdash\Phi\in\boldsymbol{H}_{\beta}$ для всіх $\beta\in\boldsymbol{S}$ таких, що $\alpha\rhd\beta$;

якщо ${}_{\alpha}\dashv\Box{\uparrow}\Phi\in\boldsymbol{H}_{\alpha}$, то ${}_{\beta}\dashv\Phi\in\boldsymbol{H}_{\beta}$ для деякого $\beta\in\boldsymbol{S}$ такого, що $\alpha\rhd\beta$.

H□↓. Якщо ${}_{\alpha}\vdash\Box{\downarrow}\Phi\in\boldsymbol{H}_{\alpha}$, то ${}_{\beta}\vdash\Phi\in\boldsymbol{H}_{\beta}$ для всіх $\beta\in\boldsymbol{S}$ таких, що $\beta\rhd\alpha$;

якщо ${}_{\alpha}\dashv\Box{\downarrow}\Phi\in\boldsymbol{H}_{\alpha}$, то ${}_{\beta}\dashv\Phi\in\boldsymbol{H}_{\beta}$ для деякого $\beta\in\boldsymbol{S}$ такого, що $\beta\triangleright\alpha$.

Процедура побудови секвенційного дерева може завершуватися або не завершуватися.

Якщо процедура завершена позитивно, то маємо замкнене дерево. Якщо процедура завершена негативно або не завершується, то маємо скінченне чи нескінченне незамкнене дерево. Тоді в дереві існує скінченний або нескінченний незамкнений шлях. Кожна з формул початкової секвенції зустрінеться на цьому шляху і стане доступною.

Теорема 3. Нехай $\wp$ – незамкнений шлях в секвенційному дереві, $\mathbf{H}_\alpha$ – множина всіх специфікованих $_{\alpha|-}$ чи $_{\alpha-|}$ формул секвенцій цього шляху, де $\alpha\in\boldsymbol{S}$, M – схема моделі світу. Тоді $\mathbf{H}_M = (\{\boldsymbol{H}_\alpha \mid \alpha\in\boldsymbol{S}\}, M)$ – система модельних множин.

Для переходу від нижчої вершини шляху до вищої використовується одна з базових секвенційних форм. Переходи згідно таких форм точно відповідають пунктам визначення системи модельних множин. Допоміжні специфіковані формули (їхній префікс містить символ $*$) для модельних множин не беремо до уваги. Кожна непримітивна формула, що зустрічається на шляху $\wp$, рано чи пізно буде розкладена згідно відповідної секвенційної форми. Всі секвенції шляху $\wp$ незамкнені, тому виконується пункт НС визначення системи модельних множин.

Теорема доведена.

Теорема 4. Нехай $\mathbf{H}_M$ – система модельних множин, W – множина імен, відповідних до ДНС-дублів імен формул $\mathbf{H}_M$. Тоді існують ТМС $\boldsymbol{M} = (\boldsymbol{S}, \boldsymbol{R}, A, \boldsymbol{I})$ та функція $\delta\in{}^{V}\!A$ з $im(\delta) = W$ такі:

1) $_{\alpha|-}\Phi\in\boldsymbol{H}_\alpha \Rightarrow \Phi_\alpha(\delta_\alpha) = T$;

2) $_{\alpha-|}\Phi\in\boldsymbol{H}_\alpha \Rightarrow \Phi_\alpha(\delta_\alpha) = F$.

Доводимо для випадку загальних ТМЛ функціонально-еквацiйного рівня. Для темпоральних КНМЛ доведення аналогічне, з тією лише відмінністю, що замість двох пунктів, пов'язаних з $\Box\uparrow$, додаємо чотири пункти, пов'язані з $\Box\uparrow$ та $\Box\downarrow$.

Відмінності між ТМС із сильною та загальною умовами визначеності на станах [7, 8] не впливають на доведення теореми 4 і подальше доведення теореми 5. Водночас для пронесення суперпозицій через модальні композиції необхідно обмежити клас ТМС умовою функціональної стабільності [8].

Нехай W_α – множина імен, відповідних до ДНС-дублів імен формул множини $\boldsymbol{H}_\alpha$, Dn_α – множина ДНС-дублів імен усіх формул $\boldsymbol{H}_\alpha$, $Tr_\alpha = \{t_0, t_1, ..., t_n, \ldots\}$ – множина нормальних термів, побудованих із ФНС та елементів Dn_α. Зрозуміло, що $Dn_\alpha = \{'v \mid v\in W_\alpha\} \subseteq Tr_\alpha$. Тоді отримуємо $W = \bigcup_{\alpha\in S} W_\alpha$, $Dn = \bigcup_{\alpha\in S} Dn_\alpha$, $Tr = \bigcup_{\alpha\in S} Tr_\alpha$.

Рівність індукує на Tr_α відношення еквівалентності: $t\sim_\alpha s \Leftrightarrow {}_{\alpha|-}t = s\in\boldsymbol{H}_\alpha$.

Задамо $A_\alpha = {Tr_\alpha}/{\sim_\alpha}$ – фактор-множину Tr_α за відношенням $\sim_\alpha$.

Позначимо $[t]_\alpha$ клас еквівалентності з представником t.

Тепер задамо $\delta_\alpha = [v\mapsto['v]_\alpha \mid v\in W_\alpha]$.

Нехай $W_\alpha = \{v_0, \ldots, v_n, \ldots\}$, причому кожне $'v_j$ – це t_{kj}.

Тоді $\delta_\alpha = [v_0\mapsto[t_{k0}]_\alpha, \ldots, v_j\mapsto[t_{kj}]_\alpha, \ldots]$. Позначимо $[t_i]_\alpha$ як a_i.

Визначимо f_α так, щоб виконувалась умова $(t_i)_\alpha(\delta_\alpha) = a_i$ для всіх $t_i\in Tr_\alpha$.

Нехай $t_m = 'x$. Тоді

$(t_m)_\alpha(\delta_\alpha) = ('x)_\alpha(\delta_\alpha) = ['x]_\alpha = [t_m]_\alpha = a_m$.

Нехай $t_m = f$. Тоді задаємо

$f_\alpha(\delta_\alpha) = (t_m)_\alpha(\delta_\alpha) = a_m$.

Нехай $t_m = S^{v_1,...,v_n} f t_1 ... t_n$. Тоді маємо

$(t_m)_\alpha(\delta_\alpha) =$

$= f_\alpha(\delta_\alpha\nabla v_1\mapsto(t_{j1})_\alpha(\delta_\alpha)\nabla\ldots\nabla v_n\mapsto(t_{jn})_\alpha(\delta_\alpha)) = a_m$.

Проте $(t_{j1})_\alpha(\delta) = a_{j1}, \ldots, (t_{jn})_\alpha(\delta) = a_{jn}$.

Тому покладемо

$f_\alpha(\delta_\alpha\nabla v_1\mapsto a_{j1}\nabla\ldots\nabla v_n\mapsto a_{jn}) = a_m$.

Визначимо тепер p_α, ураховуючи, що $(t_i)_\alpha(\delta_\alpha) = a_i$.

Якщо $_{\alpha|-}p\in\boldsymbol{H}_\alpha$, то $p_\alpha(\delta_\alpha) = T$.

Якщо $_{\alpha-|}p\in\boldsymbol{H}_\alpha$, то $p_\alpha(\delta_\alpha) = F$.

Якщо $_{\alpha|-}S^{v_1,...,v_n} p t_{j_1} ... t_{j_n} \in\boldsymbol{H}_\alpha$, то

$p_\alpha(\delta_\alpha\nabla v_1\mapsto a_{j1}\nabla\ldots\nabla v_n\mapsto a_{jn}) = T$.

Якщо $_{\alpha-|}S^{v_1,...,v_n} p t_{j_1} ... t_{j_n} \in\boldsymbol{H}_\alpha$, то

$p_\alpha(\delta_\alpha\nabla v_1\mapsto a_{j1}\nabla\ldots\nabla v_n\mapsto a_{jn}) = F$.

Для всіх інших $d\in A_\alpha^{W_\alpha}$ значення f_α та p_α задаємо довільно, враховуючи еквітонність та обмеження щодо неістотності імен: для всіх $d, h\in A_\alpha^{W_\alpha}$ із умови $d\|\text{-}\mu(f) = h\|\text{-}\mu(f)$ випливає $f_\alpha(d) = f_\alpha(h)$ та з умови $d\|\text{-}\mu(p) = h\|\text{-}\mu(p)$ випливає $p_\alpha(d) = p_\alpha(h)$.

Так визначені значення f_α та p_α продовжимо за еквітонністю, враховуючи умови неістотності імен, на відповідні $h\in {}^W\!A_\alpha$.

Доведення тверджень 1) та 2) даної теореми ведемо індукцією за складністю формули згідно з побудовою $\mathbf{H}_M$.

Для примітивних формул твердження 1) та 2) випливають з визначення значень базових функцій і предикатів. При цьому предикати на станах α, що є значеннями таких формул, еквітонні та тотальні на відповідних $A_\alpha^{W_\alpha}$.

HN. Нехай Φ – елементарна формула, Ψ – примітивна формула, отримана з Φ нормалізацією. Якщо Ψ_α еквітонний та тотальний на $A_\alpha^{W_\alpha}$, то Φ_α еквітонний та тотальний на $A_\alpha^{W_\alpha}$, причому $\Phi_\alpha(\delta_\alpha)=\Psi_\alpha(\delta_\alpha)$.

Нехай ${}_\alpha{\vdash}\Phi\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За визначенням $\mathbf{H}_M$ маємо ${}_\alpha{\vdash}\Psi\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За припущенням індукції $\Psi_\alpha(\delta_\alpha) = T$, звідки $\Phi_\alpha(\delta_\alpha) = T$.

Нехай ${}_\alpha{\dashv}\Phi\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За визначенням $\mathbf{H}_M$ маємо ${}_\alpha{\dashv}\Psi\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За припущенням індукції $\Psi_\alpha(\delta_\alpha)=F$, звідки $\Phi_\alpha(\delta_\alpha)=F$.

HNΦ. Нехай ${}_\alpha{\vdash}S^{x,\bar{v}}(\Phi,s,\bar{t})\in\boldsymbol{H}_\alpha$ та $y\in\mu(\Phi)$. За визначенням $\mathbf{H}_M$ тоді ${}_\alpha{\vdash}S^{\bar{v}}(\Phi,\bar{t})\in\boldsymbol{H}_\alpha$ За припущенням індукції $(S^{\bar{v}}(\Phi,\bar{t}))_\alpha(\delta_\alpha)=T$, звідки отримуємо $(S^{x,\bar{v}}(\Phi,s,\bar{t}))_\alpha(\delta_\alpha)= T$.

Нехай ${}_\alpha{\dashv}S^{x,\bar{v}}(\Phi,s,\bar{t})\in\boldsymbol{H}_\alpha$ та $y\in\mu(\Phi)$. За визначенням $\mathbf{H}_M$ ${}_\alpha{\dashv}S^{\bar{v}}(\Phi,\bar{t})\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За припущенням індукції $(S^{\bar{v}}(\Phi,\bar{t}))_\alpha(\delta_\alpha)=F$, звідки отримуємо $(S^{x,\bar{v}}(\Phi,s,\bar{t}))_\alpha(\delta_\alpha)=F$.

HΦ. Нехай ${}_\alpha{\vdash}S^{\bar{x},\bar{v}}(\Phi,'\bar{x},\bar{t})\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За визначенням $\mathbf{H}_M$ маємо ${}_\alpha{\vdash}S^{\bar{v}}(\Phi,\bar{t})\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За припущенням індукції $(S^{\bar{v}}(\Phi,\bar{t}))_\alpha(\delta_\alpha)=T$, тому $(S^{\bar{x},\bar{v}}(\Phi,'\bar{x},\bar{t}))_\alpha(\delta_\alpha)=T$.

Нехай ${}_\alpha{\dashv}S^{\bar{x},\bar{v}}(\Phi,'\bar{x},\bar{t})\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За визначенням $\mathbf{H}_M$ маємо ${}_\alpha{\dashv}S^{\bar{v}}(\Phi,\bar{t})\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За припущенням індукції $(S^{\bar{v}}(\Phi,\bar{t}))_\alpha(\delta_\alpha)=F$, тому $(S^{\bar{x},\bar{v}}(\Phi,'\bar{x},\bar{t}))_\alpha(\delta_\alpha)=F$.

H¬. Нехай ${}_\alpha{\vdash}\neg\Phi\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За визначенням $\mathbf{H}_M$ маємо ${}_\alpha{\dashv}\Phi\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За припущенням індукції $\Phi_\alpha(\delta_\alpha)=F$, звідки $(\neg\Phi)_\alpha(\delta_\alpha)=T$.

Нехай ${}_\alpha{\dashv}\neg\Phi\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За визначенням $\mathbf{H}_M$ маємо ${}_\alpha{\vdash}\Phi\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За припущенням індукції $\Phi_\alpha(\delta_\alpha)=T$, звідки $(\neg\Phi)_\alpha(\delta_\alpha)=F$.

H∨. Нехай ${}_\alpha{\vdash}\Phi\vee\Psi\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За визначенням $\mathbf{H}_M$ маємо ${}_\alpha{\vdash}\Phi\in\boldsymbol{H}$ або ${}_\alpha{\vdash}\Psi\in\boldsymbol{H}$. За припущенням індукції $\Phi_\alpha(\delta_\alpha)=T$ або $\Psi_\alpha(\delta_\alpha)=T$, звідки $(\Phi\vee\Psi)_\alpha(\delta_\alpha)=T$.

Нехай ${}_\alpha{\dashv}\Phi\vee\Psi\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За визначенням $\mathbf{H}_M$ маємо ${}_\alpha{\dashv}\Phi\in\boldsymbol{H}_\alpha$ та ${}_\alpha{\dashv}\Psi\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За припущенням індукції $\Phi_\alpha(\delta_\alpha)=F$ та $\Psi_\alpha(\delta_\alpha)=F$, звідки $(\Phi\vee\Psi)_\alpha(\delta_\alpha)=F$.

HSΦ. Позначимо Ξ та Ψ формули

$S^{\bar{u},\bar{x}}(S^{\bar{x},\bar{v}}(\Phi,\bar{r},\bar{s}),\bar{t},\bar{w})$ та

$$S^{\bar{u},\bar{x},\bar{v}}(\Phi,\bar{t},S^{\bar{u},\bar{x}}(r_1,\bar{t},\bar{w}),\ldots,$$
$$S^{\bar{u},\bar{x}}(r_k,\bar{t},\bar{w}),S^{\bar{u},\bar{x}}(s_1,\bar{t},\bar{w}),\ldots,S^{\bar{u},\bar{x}}(s_m,\bar{t},\bar{w})).$$

Нехай ${}_\alpha{\vdash}\Xi\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За визначенням $\mathbf{H}_M$ маємо ${}_\alpha{\vdash}\Psi\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За припущенням індукції тоді $\Psi_\alpha(\delta_\alpha)=T$, звідки $\Xi_\alpha(\delta_\alpha)=T$.

Нехай ${}_\alpha{\dashv}\Xi\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За визначенням $\mathbf{H}_M$ маємо ${}_\alpha{\dashv}\Psi\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За припущенням індукції тоді $\Psi_\alpha(\delta_\alpha)=F$, звідки $\Xi_\alpha(\delta_\alpha)=F$.

HS¬. Нехай ${}_\alpha{\vdash}S^{\bar{x}}(\neg\Phi,\bar{t})\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За визначенням $\mathbf{H}_M$ тоді ${}_\alpha{\vdash}\neg S^{\bar{x}}(\Phi,\bar{t})\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За припущенням індукції $(\neg S^{\bar{x}}(\Phi,\bar{t}))_\alpha(\delta_\alpha)=T$, звідки $(S^{\bar{x}}(\neg\Phi,\bar{t}))_\alpha(\delta_\alpha)=T$.

Нехай ${}_\alpha{\dashv}S^{\bar{x}}(\neg\Phi,\bar{t})\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За визначенням $\mathbf{H}_M$ тоді ${}_\alpha{\dashv}\neg S^{\bar{x}}(\Phi,\bar{t})\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За припущенням індукції $(\neg S^{\bar{x}}(\Phi,\bar{t}))_\alpha(\delta_\alpha)=F$, звідки $(S^{\bar{x}}(\neg\Phi,\bar{t}))_\alpha(\delta_\alpha)=F$.

HS∨. Нехай ${}_\alpha{\vdash}S^{\bar{x}}(\Phi\vee\Psi,\bar{t})\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За визначенням $\mathbf{H}_M$ ${}_\alpha{\vdash}S^{\bar{x}}(\Phi,\bar{t})\vee S^{\bar{x}}(\Psi,\bar{t})\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За припущенням індукції отримуємо $(S^{\bar{x}}(\Phi,\bar{t})\vee S^{\bar{x}}(\Psi,\bar{t}))_\alpha(\delta_\alpha)=T$, звідки $(S^{\bar{x}}(\Phi\vee\Psi,\bar{t}))_\alpha(\delta_\alpha)=T$.

Нехай ${}_{\alpha\dashv}S^{\bar{x}}(\Phi\vee\Psi,\bar{t}\,)\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За визначенням $\mathbf{H}_M$ ${}_{\alpha\dashv}S^{\bar{x}}(\Phi,\bar{t}\,)\vee S^{\bar{x}}(\Psi,\bar{t}\,)\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За припущенням індукції отримуємо $(S^{\bar{x}}(\Phi,\bar{t}\,)\vee S^{\bar{x}}(\Psi,\bar{t}\,))_\alpha(\delta_\alpha)=F$, звідки $(S^{\bar{x}}(\Phi\vee\Psi,\bar{t}\,))_\alpha(\delta_\alpha)=F$.

HSE. Нехай ${}_{\alpha\vdash}S^{\bar{v}}(r=s,\bar{t}\,)\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За визначенням $\mathbf{H}_M$ ${}_{\alpha\vdash}S^{\bar{v}}(r,\bar{t}\,)=S^{\bar{v}}(s,\bar{t}\,)\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За припущенням індукції отримуємо $(S^{\bar{v}}(r,\bar{t}\,)=S^{\bar{v}}(s,\bar{t}\,))_\alpha(\delta_\alpha)=T$, звідки маємо $(S^{\bar{v}}(r=s,\bar{t}\,))_\alpha(\delta_\alpha)=T$.

Нехай ${}_{\alpha\dashv}S^{\bar{v}}(r=s,\bar{t}\,)\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За визначенням $\mathbf{H}_M$ маємо ${}_{\alpha\dashv}S^{\bar{v}}(r,\bar{t}\,)=S^{\bar{v}}(s,\bar{t}\,)\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За припущенням індукції отримуємо $(S^{\bar{v}}(r,\bar{t}\,)=S^{\bar{v}}(s,\bar{t}\,))_\alpha(\delta_\alpha)=F$, звідки маємо $(S^{\bar{v}}(r=s,\bar{t}\,))_\alpha(\delta_\alpha)=F$.

HS∃. Нехай ${}_{\alpha\vdash}S^{\bar{v}}(\exists x\Phi,\bar{t}\,)\in\boldsymbol{H}_\alpha$, причому $x\notin\{\bar{v}\}$ та $x\in\mu(\bar{t}\,)$. За визначенням $\mathbf{H}_M$ маємо ${}_{\alpha\vdash}\exists xS^{\bar{v}}(\Phi,\bar{t}\,)\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За припущенням індукції $(\exists xS^{\bar{v}}(\Phi,\bar{t}\,))_\alpha(\delta_\alpha)=T$, звідки $(S^{\bar{v}}(\exists x\Phi,\bar{t}\,))_\alpha(\delta_\alpha)=T$.

Нехай ${}_{\alpha\dashv}S^{\bar{v}}(\exists x\Phi,\bar{t}\,)\in\boldsymbol{H}_\alpha$, причому $x\notin\{\bar{v}\}$ та $x\in\mu(\bar{t}\,)$. За визначенням $\mathbf{H}_M$ маємо ${}_{\alpha\dashv}\exists xS^{\bar{v}}(\Phi,\bar{t}\,)\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За припущенням індукції $(\exists xS^{\bar{v}}(\Phi,\bar{t}\,))_\alpha(\delta_\alpha)=F$, звідки $(S^{\bar{v}}(\exists x\Phi,\bar{t}\,))_\alpha(\delta_\alpha)=F$.

HS∃∃. Нехай ${}_{\alpha\vdash}S^{\bar{v}}(\exists x\Phi,\bar{t}\,)\in\boldsymbol{H}_\alpha$, причому $x\in\{\bar{v}\}$ або $x\notin\mu(\bar{t}\,)$. За визначенням $\mathbf{H}_M$ маємо ${}_{\alpha\vdash}\exists yS^{\bar{v},x}(\Phi,\bar{t},'y)\in\boldsymbol{H}_\alpha$ для деякого тотально неістотного $y\in W_\alpha$ такого: $y\notin ndn(S^{\bar{v}}(\exists x\Phi,\bar{t}\,))$. За припущенням індукції $(\exists yS^{\bar{v},x}(\Phi,\bar{t},'y))_\alpha(\delta_\alpha)=T$, звідки $(S^{\bar{v}}(\exists x\Phi,\bar{t}\,))_\alpha(\delta_\alpha)=T$.

Нехай ${}_{\alpha\dashv}S^{\bar{v}}(\exists x\Phi,\bar{t}\,)\in\boldsymbol{H}_\alpha$, причому $x\in\{\bar{v}\}$ або $x\notin\mu(\bar{t}\,)$. За визначенням $\mathbf{H}_M$ маємо ${}_{\alpha\dashv}\exists yS^{\bar{v},x}(\Phi,\bar{t},'y)\in\boldsymbol{H}_\alpha$ для деякого тотально неістотного $y\in W_\alpha$ такого: $y\notin ndn(S^{\bar{v}}(\exists x\Phi,\bar{t}\,))$. За припущенням індукції $(\exists yS^{\bar{v},x}(\Phi,\bar{t},'y))_\alpha(\delta_\alpha)=F$, звідки $(S^{\bar{v}}(\exists x\Phi,\bar{t}\,))_\alpha(\delta_\alpha)=F$.

HS□. Нехай ${}_{\alpha\vdash}S^{\bar{v}}(\Box\Phi,\bar{t}\,)\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За визначенням $\mathbf{H}_M$ ${}_{\alpha\vdash}\Box S^{\bar{v}}(\Phi,\bar{t}\,)\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За припущенням індукції $(\Box S^{\bar{v}}(\Phi,\bar{t}\,))_\alpha(\delta_\alpha)=T$, звідки $(S^{\bar{v}}(\Box\Phi,\bar{t}\,))_\alpha(\delta_\alpha)=T$.

Нехай ${}_{\alpha\dashv}S^{\bar{v}}(\Box\Phi,\bar{t}\,)\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За визначенням $\mathbf{H}_M$ ${}_{\alpha\dashv}\Box S^{\bar{v}}(\Phi,\bar{t}\,)\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За припущенням індукції $(\Box S^{\bar{v}}(\Phi,\bar{t}\,))_\alpha(\delta_\alpha)=F$, звідки $(S^{\bar{v}}(\Box\Phi,\bar{t}\,))_\alpha(\delta_\alpha)=F$.

H∃. Нехай ${}_{\alpha\vdash}\exists x\Phi\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За визначенням $\mathbf{H}_M$ тоді існує $t\in Tr_\alpha$ таке, що ${}_{\alpha\vdash}S^{x}(\Phi,t)\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За припущенням індукції $(S^{x}(\Phi,t))_\alpha(\delta_\alpha)=T$, тому $\Phi_\alpha(\delta_\alpha\nabla x\mapsto t_\alpha(\delta_\alpha))=T$. Для $a=t_\alpha(\delta_\alpha)$ тоді маємо $\Phi_\alpha(\delta_\alpha\nabla x\mapsto a)=T$, звідки $(\exists x\Phi)_\alpha(\delta_\alpha)=T$.

Нехай ${}_{\alpha\dashv}\exists x\Phi\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За визначенням $\mathbf{H}_M$ для всіх $t\in Tr_\alpha$ тоді ${}_{\alpha\dashv}S^{x}(\Phi,t)\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За припущенням індукції $(S^{x}(\Phi,t))_\alpha(\delta_\alpha)=F$ для всіх $t\in Tr_\alpha$. Звідси $\Phi_\alpha(\delta_\alpha\nabla x\mapsto t_\alpha(\delta_\alpha))=F$ для всіх $t\in Tr_\alpha$. Однак кожне $a_i\in A_\alpha$ – це $(t_i)_\alpha(\delta_\alpha)$ для відповідного $t_i\in Tr_\alpha$. Отже, $\Phi_\alpha(\delta_\alpha\nabla x\mapsto b)=F$ для всіх $b\in A_\alpha$, звідки дістаємо $(\exists x\Phi)_\alpha(\delta_\alpha)=F$.

Із побудови $\mathbf{H}_M$ випливає: якщо предикат (предикати), який є значенням простішої формули (права частина відповідних пунктів визначення $\boldsymbol{H}_\alpha$), еквітонний та тотальний на $A_\alpha^{W_\alpha}$, то предикат, який є значенням формули, утвореної відповідною композицією (ліва частина пунктів визначення $\boldsymbol{H}_\alpha$), теж еквітонний та тотальний на $A_\alpha^{W_\alpha}$. Це гарантує еквітонність усіх предикатів Φ_α, якщо такими є базові предикати на станах.

Доведення для пп. HERf – HEPr визначення модельної множини стану випливає із AxRf та властивостей ESm, ETr, EPr відношення $\models$.

H□. Нехай ${}_{\alpha\dashv}\Box\Phi\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За визначенням $\mathbf{H}_M$ маємо ${}_{\beta\dashv}\Phi\in\boldsymbol{H}_\beta$ для деякого стану β такого, що $\alpha\rhd\beta$. За припущенням індукції $\Phi_\beta(\delta_\beta)=F$, причому Φ_β еквітонний та тотальний на $A_\beta^{W_\beta}$. При побудові секвенційного дерева стан β вводиться застосуванням форми ${}_{\dashv}\Box$ до формули $\Box\Phi$ в стані α, на цей момент “поточні” значення $W_{0\alpha}$, $W_{0\beta}$ та $A_{0\alpha}$, $A_{0\beta}$ множин W_α, W_β та A_α, A_β рівні: $W_{0\alpha}=W_{0\beta}$ та $A_{0\alpha}=A_{0\beta}$; в подальшому ці значення можуть тільки розширюватися. Звідси $\delta_{0\alpha}=\delta_{0\beta}$. Але $\delta_{0\beta}\subseteq\delta_\beta$, $\delta_{0\alpha}\subseteq\delta_\alpha$, тому прийняте на $\delta_{0\alpha}=\delta_{0\beta}$ значення предиката Φ_β не зміниться на δ_α та на δ_β. Отже, якщо $\Phi_\beta(\delta_\beta)=F$, то $\Phi_\beta(\delta_\beta)=F$. Звідси $(\Box\Phi)_\alpha(\delta_\alpha)=F$, причому $(\Box\Phi)_\alpha$ еквітонний та тотальний на $A_\alpha^{W_\alpha}$.

Нехай ${}_{\alpha\vdash}\Box\Phi\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За визначенням $\mathbf{H}_{\boldsymbol{M}}$ маємо ${}_{\beta\vdash}\Phi\in\boldsymbol{H}_\beta$ для всіх станів β таких, що $\alpha\rhd\beta$. За припущенням індукції $\Phi_\beta(\delta_\beta)=T$ для всіх β таких, що $\alpha\rhd\beta$, причому такі Φ_β еквітонні та тотальні на $A_\beta^{W_\beta}$. Аналогічно попередньому випадку переконуємось, що тоді $\Phi_\beta(\delta_\alpha)=T$ для всіх β таких, що $\alpha\rhd\beta$. Отже, $(\Box\Phi)_\alpha(\delta_\alpha)=T$, причому $(\Box\Phi)_\alpha$ еквітонний та тотальний на $A_\alpha^{W_\alpha}$.

Для випадку темпоральних КНМЛ замість останніх двох випадків маємо:

Н$\Box_\uparrow$. Нехай ${}_{\alpha\vdash}\Box_\uparrow\Phi\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За визначенням $\mathbf{H}_{\boldsymbol{M}}$ маємо ${}_{\beta\vdash}\Phi\in\boldsymbol{H}_\beta$ для всіх станів β таких, що $\alpha\rhd\beta$. За припущенням індукції $\Phi_\beta(\delta_\beta)=T$ для всіх станів β таких, що $\alpha\rhd\beta$, причому такі Φ_β еквітонні та тотальні на $A_\beta^{W_\beta}$. Звідси аналогічно випадку загальних ТМЛ отримуємо $(\Box_\uparrow\Phi)_\alpha(\delta_\alpha)=T$, причому $(\Box_\uparrow\Phi)_\alpha$ еквітонний та тотальний на $A_\alpha^{W_\alpha}$.

Нехай ${}_{\alpha\dashv}\Box_\uparrow\Phi\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За визначенням $\mathbf{H}_{\boldsymbol{M}}$ маємо ${}_{\beta\dashv}\Phi\in\boldsymbol{H}_\beta$ для деякого β такого, що $\alpha\rhd\beta$, причому Φ_β еквітонний та тотальний на $A_\beta^{W_\beta}$. За припущенням індукції $\Phi_\beta(\delta_\beta)=F$. Звідси аналогічно отримуємо $(\Box_\uparrow\Phi)_\alpha(\delta_\alpha)=F$, причому $(\Box_\uparrow\Phi)_\alpha$ еквітонний та тотальний на $A_\alpha^{W_\alpha}$.

Н$\Box_\downarrow$. Нехай ${}_{\alpha\vdash}\Box_\downarrow\Phi\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За визначенням $\mathbf{H}_{\boldsymbol{M}}$ маємо ${}_{\beta\vdash}\Phi\in\boldsymbol{H}_\beta$ для всіх станів β таких, що $\beta\rhd\alpha$, причому такі Φ_β еквітонні та тотальні на $A_\beta^{W_\beta}$. За припущенням індукції $\Phi_\beta(\delta_\beta)=T$ для всіх станів β таких, що $\beta\rhd\alpha$. Звідси $(\Box_\downarrow\Phi)_\alpha(\delta_\alpha)=T$, причому $(\Box_\downarrow\Phi)_\alpha$ еквітонний та тотальний на $A_\alpha^{W_\alpha}$.

Нехай ${}_{\alpha\dashv}\Box_\downarrow\Phi\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За визначенням $\mathbf{H}_{\boldsymbol{M}}$ маємо ${}_{\beta\dashv}\Phi\in\boldsymbol{H}_\beta$ для деякого β такого, що $\beta\rhd\alpha$, причому Φ_β еквітонний та тотальний на $A_\beta^{W_\beta}$. За припущенням індукції $\Phi_\beta(\delta_\beta)=F$. Звідси $(\Box_\downarrow\Phi)_\alpha(\delta_\alpha)=F$, причому $(\Box_\downarrow\Phi)_\alpha$ еквітонний та тотальний на $A_\alpha^{W_\alpha}$.

На основі теорем 3 і 4 отримуємо теорему повноти секвенційних числень загальних ТМЛ та темпоральних КНМЛ функціонально-еквації́ного рівня.

Теорема 5. Нехай $\Gamma\models\Delta$. Тоді секвенція ${}_{\vdash}\Gamma{}_{\dashv}\Delta$ вивідна.

Припустимо супротивне: $\Gamma\models\Delta$ та ${}_{\vdash}\Gamma{}_{\dashv}\Delta$ невивідна. Якщо $\Sigma={}_{\vdash}\Gamma{}_{\dashv}\Delta$ невивідна, то в секвенційному дереві для Σ існує незамкнений шлях. Згідно теореми 3 маємо, що $\mathbf{H}_{\boldsymbol{M}}=(\{\boldsymbol{H}_\alpha\mid\alpha\in\boldsymbol{S}\},M)$ – система модельних множин (тут $\boldsymbol{H}_\alpha$ – множина всіх специфікованих ${}_{\alpha\vdash}$ чи ${}_{\alpha\dashv}$ формул секвенцій цього шляху, де $\alpha\in\boldsymbol{S}$, M – схема моделі світу). Згідно теореми 4 існують $\boldsymbol{M}=(\boldsymbol{S},\boldsymbol{R},A,\boldsymbol{I})$ та $\delta\in{}^{V}\!A$ такі: з умови ${}_{\alpha\vdash}\Phi\in\boldsymbol{H}_\alpha$ випливає $\Phi_\alpha(\delta_\alpha)=T$ та з умови ${}_{\alpha\dashv}\Phi\in\boldsymbol{H}_\alpha$ випливає $\Phi_\alpha(\delta_\alpha)=F$. Зокрема, це справджується для формул секвенції ${}_{\vdash}\Gamma{}_{\dashv}\Delta$, тому для всіх $\Phi^\alpha\in\Gamma$ маємо $\Phi_\alpha(\delta_\alpha)=T$ та для всіх $\Psi^\beta\in\Delta$ маємо $\Psi_\beta(\delta_\beta)=F$. Це заперечує $\Gamma\models_{\boldsymbol{M}}\Delta$, тому невірно, що $\Gamma\models\Delta$. Отже, припущення про невивідність ${}_{\vdash}\Gamma{}_{\dashv}\Delta$ невірне, що й доводить теорему 5.

Висновки

На основі властивостей відношення логічного наслідку для множин специфікованих станами формул збудовано числення секвенційного типу для загальних транзиційних та темпоральних композиційно-номінативних модальних логік функціонально-еквації́ного рівня. Досліджено властивості побудованих числень. Для цих числень доведено теореми коректності та повноти.

1. *Нікітченко М.С., Шкільняк С.С.* Композиційно-номінативні модальні логіки // Проблемы программирования. – 2002. – № 1–2. – С. 27–33.

2. *Фейс Р.* Модальная логика. – М.: Наука, 1974. – 520 с.
3. *Семантика* модальных и интенсиональных логик. – М.: Прогресс, 1981. – 494 с.
4. *Нікітченко М.С., Шкільняк С.С.* Математична логіка та теорія алгоритмів. – К.: ВПЦ «Київський університет», 2008. – 528 с.
5. *Шкільняк О.С.* Композиційно-номінативні модальні та темпоральні логіки: семантичні властивості, секвенційні числення // Наукові записки НаУКМА. Том 86. Серія: Комп'ютерні науки. – 2008. – С. 25–34.
6. *Шкільняк О.С.* Секвенційні числення композиційно-номінативних модальних і темпоральних логік // Наукові записки НаУКМА. Том 99. Серія: Комп'ютерні науки. – 2009. – С. 37–44.
7. *Шкільняк О.С.* Семантичні властивості композиційно-номінативних модальних логік // Проблеми програмування. – 2009. – № 4. – С. 11–24.
8. *Шкільняк О.С.* Композиційно-номінативні модальні логіки функціонально-еквацій-ного рівня // Проблеми програмування. – 2010. – № 2–3 – С. 42–47.

Отримано 14.10.2010

Про автора:

Шкільняк Оксана Степанівна,
асистент кафедри інформаційних систем.

***Місце роботи автора*:**

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
01601, Київ,
вул. Володимирська, 60.
Тел.: (044) 259 0511, (044) 522 0640 (д)
e-mail: me.oksana@gmail.com