

УДК 534; 621.382

А. Ю. Липинский, А. Н. Рудякова, В. В. Данилов
Донецкий национальный университет, кафедра радиофизики
ул. Университетская, 24, 83055 Донецк, Украина
e-mail: krf@dongu.donetsk.ua

Моделирование слабого акустооптического взаимодействия методом конечных элементов во временной области

Проектирование акустооптических цифровых процессоров требует использования численных методов расчета, позволяющих учесть конечную апертуру ячейки. В работе выполнено моделирование слабого акустооптического взаимодействия с применением векторного метода конечных элементов во временной области.

Ключевые слова: слабое акустооптическое взаимодействие, метод конечных элементов, временная область.

Введение

К вопросам теории и техники акустооптических процессоров (АОП) в настоящее время проявляется повышенный интерес [1, 2].

АОП корреляционного типа присуща высокая производительность в определенном типе функциональных операций — сверточном перемножении массивов данных. Такие высокоскоростные методы обработки дискретной информации как скалярное умножение вектора на вектор, вектора на матрицу, матрицы на матрицу, тройного произведения матриц, решения систем линейных алгебраических уравнений представляют собой базовый набор операций для решения задач адаптивной фильтрации радиосигналов, формирование диаграммы направленности антенн с синтезированной апертурой, решение систем уравнений в частных производных и др. [3].

Акустооптические процессоры, реализующие вышеперечисленные операции являются аналоговыми, то есть их точность ограничена 8-ю–10-ю двоичными разрядами и недостаточна при решении многих задач. Поэтому особый интерес представляет использование большого быстродействия АОП для векторно-матричной обработки дискретной, в том числе цифровой, информации.

В ряде работ [4–6] предложены и экспериментально исследованы макеты акустооптических цифровых процессоров (АОЦП), реализующих при помощи ди-

© А. Ю. Липинский, А. Н. Рудякова, В. В. Данилов

скретной свертки операции линейной алгебры. Такие устройства функционируют на основе акустооптического взаимодействия при дискретном распределении акустической мощности. Современные акустооптические модуляторы (АОМ) позволяют обеспечить запись более 10^3 состояний за $t_0 = 10$ мкс [1]. Производительность такого одномерного акустооптического коррелятора может составлять 10^{11} аналоговых умножений и сложений (операций) в секунду, в многоканальных же корреляторах с таким же АОМ возможны скорости, превышающие 10^{15} операций в секунду. Тем не менее, точный расчет современных АОЦП затруднен в связи с тем, что аналитические методы не учитывают конечную апертуру ячейки АОМ [7, 8].

Успешное проектирование акустооптических цифровых процессоров возможно с привлечением численных методов расчета, позволяющих учесть конечность размеров области взаимодействия. К наиболее гибким из современных численных методов решения дифференциальных уравнений в частных производных относится метод конечных элементов [9].

Целью работы является моделирование векторным методом конечных элементов слабого акустооптического взаимодействия во временной области.

Физическая модель слабого акустооптического взаимодействия

Дифракцию света на звуке можно описать, если в уравнениях состояния среды учесть нелинейные перекрестные члены, отвечающие электромагнитному полю и упругим деформациям [10]. Электромагнитная и акустическая волны должны при этом удовлетворять соответственно уравнениям Максвелла и механическому уравнению движения. Единственный перекрестный член, отвечающий за взаимодействие, появляется в уравнении состояния для индукции, которое будет выглядеть следующим образом [10]:

$$D_i = (\varepsilon_{ij} + f_{ijkl} u_{kl}) E_j + e_{ijk} u_{jk}, \quad (1)$$

где ε_{ij} — тензор диэлектрической проницаемости; f_{ijkl} — тензор электрострикции; e_{jkl} — пьезомодули. Член $f_{ijkl} u_{kl}$ можно рассматривать как изменение диэлектрической проницаемости, вызванное звуковой волной.

Ограничимся рассмотрением изотропного твердого тела. При этом пьезоэффект отсутствует, и из уравнений Максвелла и соотношения (1) можно получить волновое уравнение для электрического поля [10]:

$$\Delta E = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\varepsilon E).$$

Дальнейшее упрощение состоит в том, что электромагнитная волна считается слабой, а акустическая — достаточно интенсивной. При этом изменение интенсивности звука, обусловленное взаимодействием со светом за счет механизма электрострикции пренебрежимо мало и можно пользоваться приближением заданного звукового поля [10].

В предположении, что интенсивность звука такова, что нелинейные эффекты при распространении звуковой волны практически не проявляются, диэлектрическую проницаемость среды можно представить в виде [7]:

$$\varepsilon = n^2 + 2n\Delta n \sin(Kz - \Omega t + \Phi),$$

где n — показатель преломления невозмущенной среды; Δn — амплитуда изменения показателя преломления; K , Ω и Φ — соответственно волновое число, частота и начальная фаза акустической волны.

Рассмотрим, как изменяются интенсивности первого и нулевого порядков дифракции при росте амплитуды изменения показателя преломления Δn для заданной длины области взаимодействия $L = 10$ мм (рис. 1). Результаты расчета для случая Брэгговской дифракции ($Q = 31,56$, $\theta = \theta_B$) приведены на рис. 2.

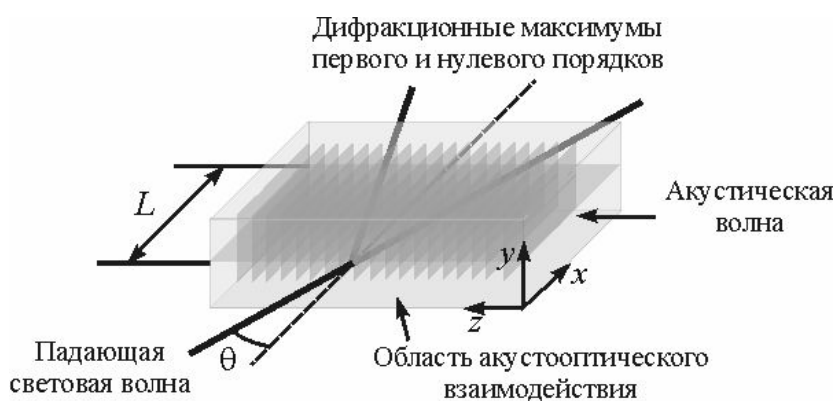


Рис. 1. Дифракция света на акустической волне

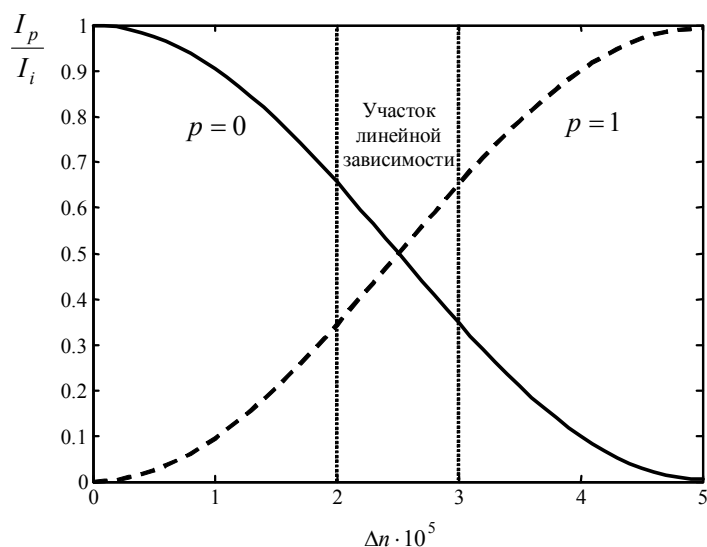


Рис. 2. Отношения интенсивностей нулевого и первого дифракционных порядков к интенсивности падающей волны для длины области взаимодействия $L = 10$ мм в зависимости от изменения показателя преломления среды Δn , вызванного акустической волной [2]

Как для первого, так и для нулевого порядков можно выделить участок линейной зависимости нормированной интенсивности от амплитуды изменения показателя преломления, приведенный на рис. 3.

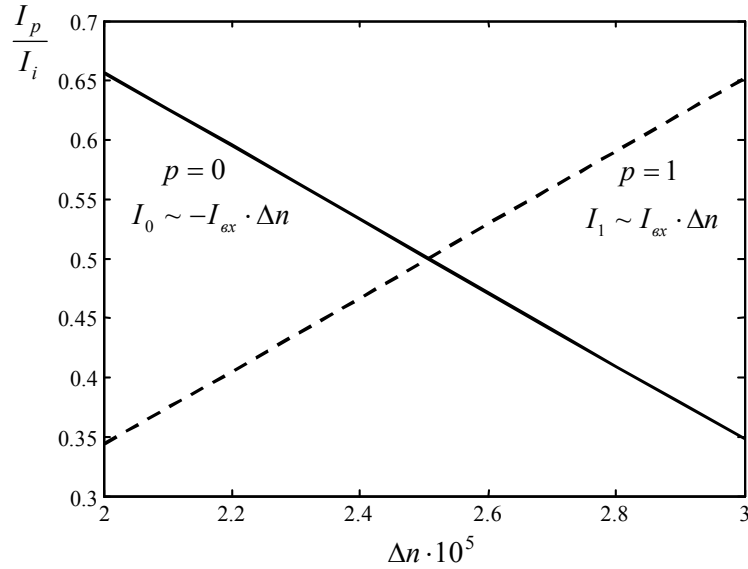


Рис. 3. Участок линейной зависимости нормированных интенсивностей первого и нулевого дифракционных порядков от амплитуды изменения показателя преломления Δn [2].

Поскольку для диапазона амплитуд Δn , соответствующего участку линейной зависимости (см. рис. 3), с точностью до некоторой постоянной интенсивности, выполняется:

$$\frac{I_1}{I_{ex}} \sim \Delta n, \quad I_1 \sim I_{ex} \cdot \Delta n,$$

$$\frac{I_0}{I_{ex}} \sim -\Delta n, \quad I_0 \sim -I_{ex} \cdot \Delta n,$$

подобный режим акустооптического взаимодействия может быть использован для выполнения операции умножения. При этом один операнд задается интенсивностью падающей световой волны; другой операнд — амплитудой акустической волны, определяющей амплитуду изменения показателя преломления Δn ; результат операции пропорционален интенсивности первого дифракционного порядка с коэффициентом, зависящим от свойств материала среды. В случае использования нулевого порядка дифракции результат будет отличаться знаком.

Моделирование слабого акустооптического взаимодействия методом конечных элементов

Распространение световой волны в среде с параметрами ε , μ описывается уравнениями Максвелла:

$$\varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{H}, \quad (2)$$

$$\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}. \quad (3)$$

Область слабого акустооптического взаимодействия разбита на тетраэдры, которые выбраны в качестве конечных элементов. Значения полей \mathbf{E} и \mathbf{H} в произвольной внутренней точке тетраэдра выражаются через так называемые степени свободы e_i и h_i (значения соответствующих полей на ребрах) и базисные функции \mathbf{W}_i [11]:

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^{N_E} e_i \mathbf{W}_i, \quad (4)$$

$$\mathbf{H} = \sum_{i=1}^{N_E} h_i \mathbf{W}_i. \quad (5)$$

Систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно e_i и h_i можно получить, используя метод Галеркина. Домножим уравнения (2) и (3) на базисные функции \mathbf{W}_i и проинтегрируем по объему элемента [12]:

$$\int_V \mathbf{W}_i \cdot \left(\varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \nabla \times \mathbf{H} \right) dx dy dz = 0, \quad (6)$$

$$\int_V \mathbf{W}_i \cdot \left(\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} \right) dx dy dz = 0. \quad (7)$$

Уравнения (6) и (7) можно записать как:

$$\int_V \left(\varepsilon \frac{\partial (\mathbf{W}_i \cdot \mathbf{E})}{\partial t} - \mathbf{W}_i \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) \right) dx dy dz = 0,$$

$$\int_V \left(\mu \frac{\partial (\mathbf{W}_i \cdot \mathbf{H})}{\partial t} + \mathbf{W}_i \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) \right) dx dy dz = 0.$$

Меняя порядок интегрирования и дифференцирования, а, также используя (4) и (5), можно получить:

$$\mathbf{C}^e \frac{d\mathbf{e}^e}{dt} = \mathbf{K}^e \mathbf{h}^e, \quad (8)$$

$$\mathbf{G}^e \frac{d\mathbf{h}^e}{dt} = -\mathbf{K}^e \mathbf{e}^e, \quad (9)$$

где $\mathbf{e}^e = \{e_1, \dots, e_{N_E}\}^T$, $\mathbf{h}^e = \{h_1, \dots, h_{N_E}\}^T$, \mathbf{C}^e , \mathbf{G}^e , \mathbf{K}^e — матрицы, элементы которых вычисляются как:

$$C_{ij}^e = \int_V \varepsilon (\mathbf{W}_i \cdot \mathbf{W}_j) dx dy dz,$$

$$G_{ij}^e = \int_V \mu (\mathbf{W}_i \cdot \mathbf{W}_j) dx dy dz,$$

$$K_{ij}^e = \int_V \mathbf{W}_i \cdot (\nabla \times \mathbf{W}_j) dx dy dz.$$

Функции формы \mathbf{W}_i можно выразить через барицентрические координаты тетраэдра следующим образом:

$$\mathbf{W}_k = l_{ij} (L_i \nabla L_j - L_j \nabla L_i).$$

Успешное решение задач моделирования методом конечных элементов в значительной мере зависит от выбора способа разбиения, формы и размеров элементов. Одним из хорошо зарекомендовавших себя подходов к этой проблеме является использование метода тесселяции Делонэ [13]. Пример разбиения области моделирования слабого акустооптического взаимодействия на 62636 элементов приведен на рис. 4.

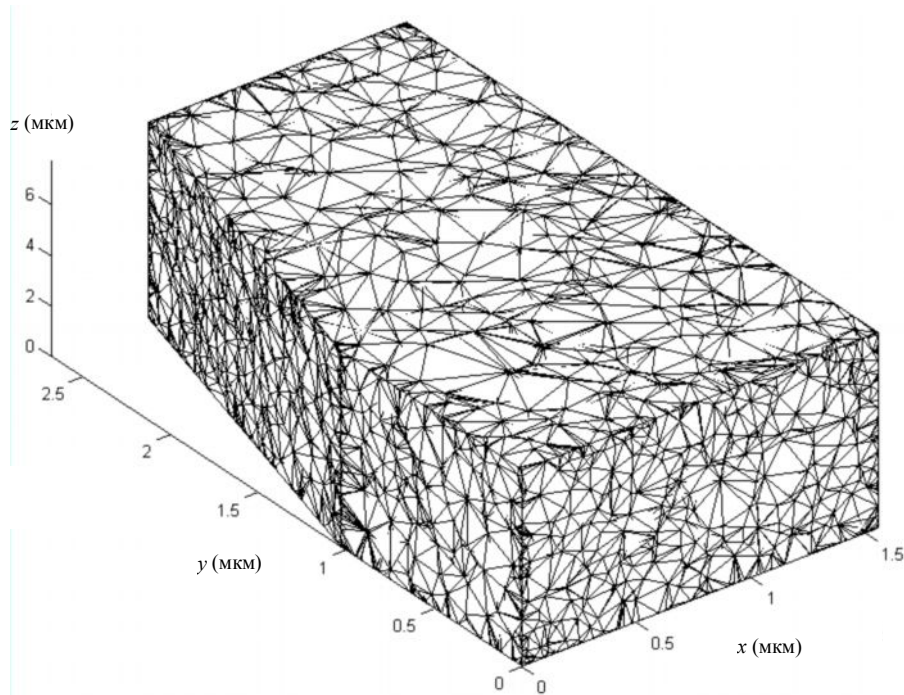


Рис. 4. Пример разбиения области моделирования слабого акустооптического взаимодействия на 62636 элементов

Физические свойства материала каждого из элементов учитываются при вычислении матриц C и G с использованием соответствующих базисных функций. Симметричность, разреженность и положительная определенность этих матриц [14] делает возможным применение метода сопряженных градиентов с предобуславливателем (неполная факторизация Холесского) [12] на этапе численного решения дифференциальных уравнений (8), (9). Иллюстрация разреженности матриц C и G представлена на рис. 5. По осям абсцисс и ординат отложены номера столбцов и строк матриц, соответственно. Ненулевые значения элементов матриц обозначены точками.

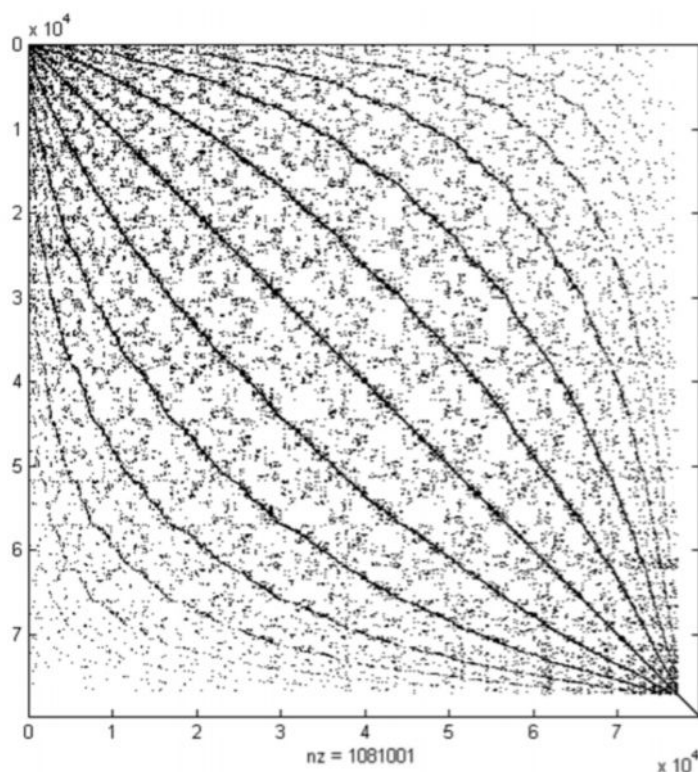


Рис. 5. Иллюстрация разреженности матриц C и G

Будем считать, что световая волна в области акустооптического взаимодействия имеет гауссов профиль распределения интенсивности в плоскостях, перпендикулярных направлению распространения.

Для волны, распространяющейся в однородной среде, компоненты поля можно записать как [15]:

$$\begin{aligned}
 E(x, y, z) &= E_0 \frac{\omega_0}{\omega(x)} \exp\left\{-i[kx - \eta(x)] - i \frac{kr^2}{2q(x)}\right\} = \\
 &= E_0 \frac{\omega_0}{\omega(x)} \exp\left\{-i[kx - \eta(x)] - r^2 \left(\frac{1}{\omega^2(x)} + \frac{ik}{2R(x)}\right)\right\},
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

где

$$\omega^2(x) = \omega_0^2 \left[1 + \left(\frac{\lambda x}{\pi \omega_0^2 n} \right)^2 \right] = \omega_0^2 \left(1 + \frac{x^2}{x_0^2} \right), \quad (11)$$

$$R = x \left[1 + \left(\frac{\pi \omega_0^2 n}{\lambda x} \right)^2 \right] = z \left(1 + \frac{x_0^2}{x^2} \right), \quad (12)$$

$$\frac{1}{q(x)} = \frac{1}{x + i(\pi \omega_0^2 n / \lambda)} = \frac{1}{R(x)} - i \frac{\lambda}{\pi \omega^2(x) n}, \quad (13)$$

$$\eta(x) = \operatorname{arctg} \left(\frac{\lambda x}{\pi \omega_0^2 n} \right) = \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{x_0} \right), \quad (14)$$

и

$$x_0 = \frac{\pi \omega_0^2 n}{\lambda}.$$

Выражение (10) определяет фундаментальный гауссов пучок. Параметр $\omega(x)$ задает радиус пучка, равный расстоянию r , на котором амплитуда поля убывает в e раз по сравнению со значением на оси. Параметр R представляет собой радиус кривизны волновых фронтов в сечении x .

В плоскости $x = 0$, из (10)–(14) можно получить:

$$\omega^2(x) = \omega_0^2,$$

$$R = 0,$$

$$\eta(x) = 0,$$

$$\frac{1}{q(x)} = \frac{1}{i \left(\frac{\pi \omega_0^2 n}{\lambda} \right)},$$

$$E(x, y, z) = E_0 \exp \left\{ -i \frac{kr^2}{2i \left(\frac{\pi \omega_0^2 n}{\lambda} \right)} \right\} = E_0 \exp \left\{ -\frac{r^2}{\omega_0^2} \right\}. \quad (15)$$

Выражение (15) задает граничное условие для напряженностей электрического и магнитного полей в плоскости ввода световой волны в область акустооптического взаимодействия.

В качестве граничного условия для боковых поверхностей оптимально использовать импедансное граничное условие (Absorbing Boundary Condition — ABC), одной из разновидностей которого является идеально согласующий слой (Perfectly Matching Layer — PML). Математическое описание такого слоя (PML) существенно усложняет задачу моделирования акустооптического взаимодействия в области конечных размеров, кроме того, требует дополнительных вычислительных мощностей, что не всегда является приемлемым. Если же при моделировании ограничиться участком распространения световой волны, на котором она не достигает боковых поверхностей вследствие расходимости, то допустимо использование граничного условия Дирихле.

Большинство наиболее часто используемых методов численного интегрирования (Эйлера, Рунге-Кутты, Адамса-Башфорта) являются по существу диссипативными. Это может привести к некорректным результатам для систем, которые необходимо моделировать для достаточно больших временных интервалов [16].

Для электродинамических задач, в которых нет физического рассеяния энергии из-за проводимости, или поглощающих граничных условий, общая электромагнитная энергия должна оставаться постоянной. Использование же диссипативных методов приводит к экспоненциальному затуханию численных значений полной энергии.

С учетом вышесказанного, для решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (8), (9) выбран условно устойчивый недиссипативный метод второго порядка «leap-frog» [12]. При этом первые производные интенсивностей электрического и магнитного полей заменялись конечно-разностными аппроксимациями следующим образом:

$$\frac{de}{dt} \approx \frac{e_n - e_{n-1}}{\Delta t}, \quad (16)$$

$$\frac{dh}{dt} \approx \frac{h_{n+\frac{1}{2}} - h_{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t}, \quad (17)$$

где Δt — шаг по времени; n — номер шага. Как видно из (16) и (17), значения поля E вычисляются для полных временных шагов, а поля H — для половинных.

Результаты моделирования

На рис. 6 приведены результаты моделирования распределения модуля напряженности электрического поля в области с размерами $6\lambda_0 \times 6\lambda_0 \times 3\lambda_0$ ($\lambda_0 = 1550$ нм) для среза, параллельного плоскости xu , на уровне $z = 3\lambda_0$, в отсутствии акустического поля.

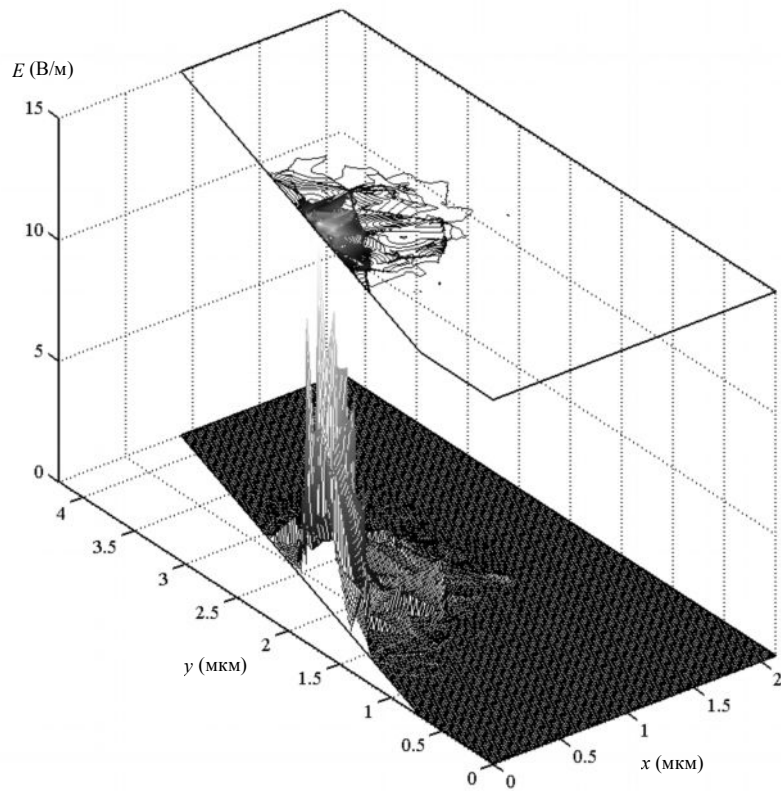


Рис. 6. Модуль вектора E ($\Delta n = 0$, $t = 0,5\lambda$, 12989 тетраэдров)

На рис. 7 изображено распределение значений показателя преломления. Изменение значений в направлении y моделирует присутствие акустической волны длиной $\Lambda = \lambda_0$, распространяющейся в области взаимодействия.

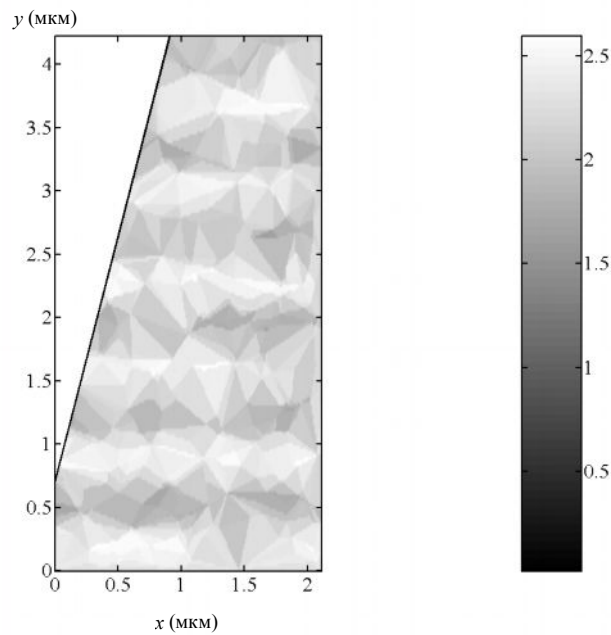


Рис. 7. Распределение показателя преломления ($n = 2,2$, $\Delta n = 0,5$, 12989 тетраэдров)

Распределение модуля напряженности электрического поля, представленное на рис. 8, получено в результате моделирования акустооптического взаимодействия при тех же размерах области (рис. 6) и длине световой волны.

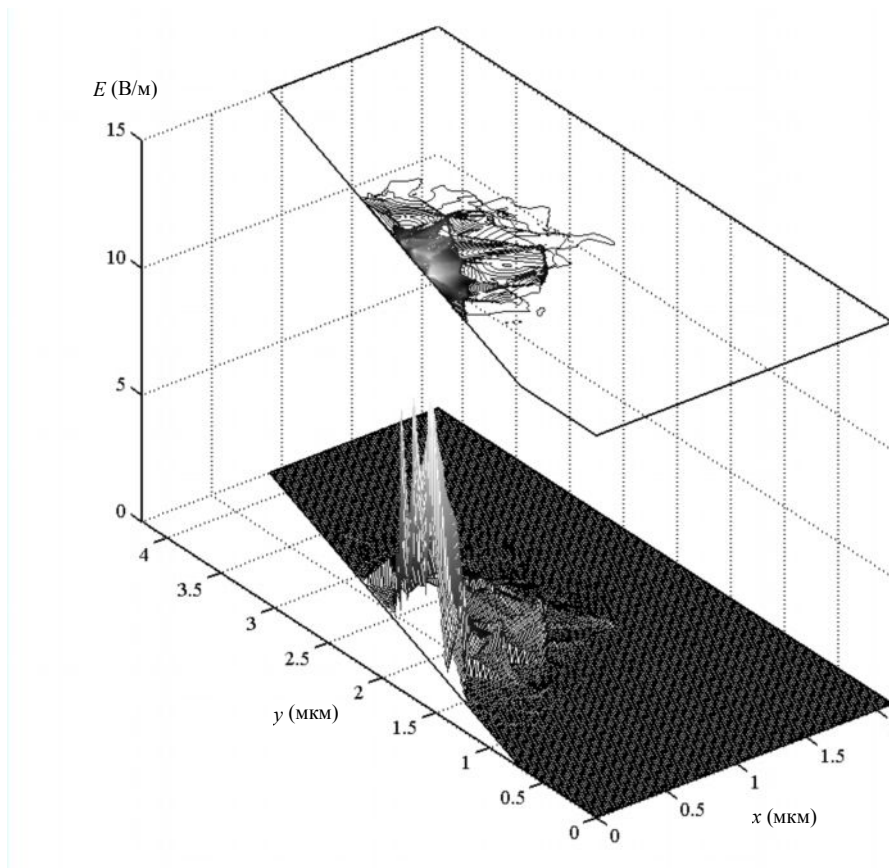


Рис. 8. Модуль вектора E ($\Delta n = 0,5$, $t = 0,5\lambda$, 12989 тетраэдров)

Сравнение рис. 6 и 8 показывает, что в результате акустооптического взаимодействия произошло изменение распределения модуля напряженности электрического поля. Для более точной оценки были рассчитаны значения модуля вектора Умова-Пойтинга на линии пересечения плоскости среза с плоскостью, перпендикулярной направлению распространения световой волны. Как видно из сравнения рис. 9 и 10, происходит перераспределение энергии электромагнитного поля, обусловленное акустооптическим взаимодействием.

Выводы

В работе выполнено моделирование слабого акустооптического взаимодействия с применением векторного метода конечных элементов во временной области. Такой подход позволяет, при соответствующих вычислительных ресурсах, произвести расчет АОЦП, работающих с импульсными оптическими сигналами при дискретном распределении акустической мощности.

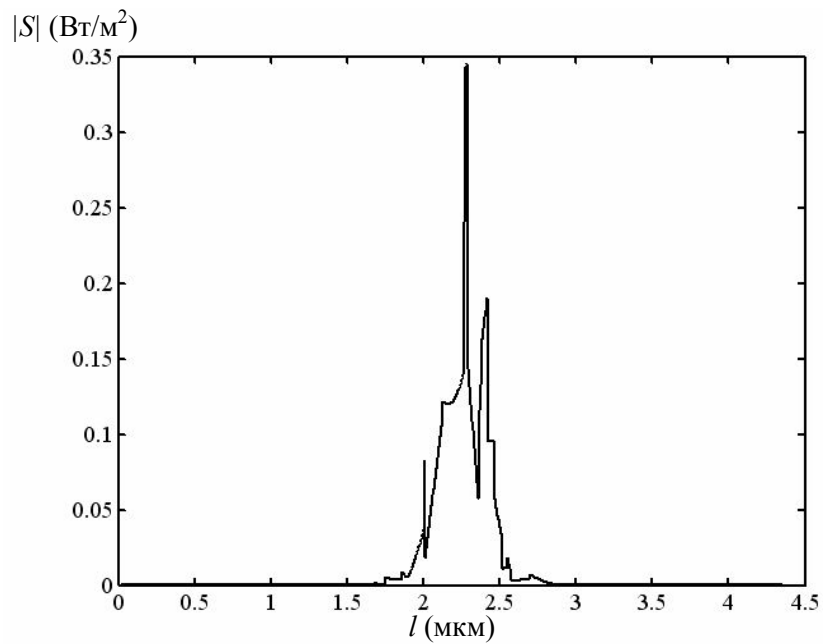


Рис. 9. Модуль вектора Умова-Пойтинга ($\Delta l = 0$, $t = 0,5\lambda$, 12989 тетраэдров)

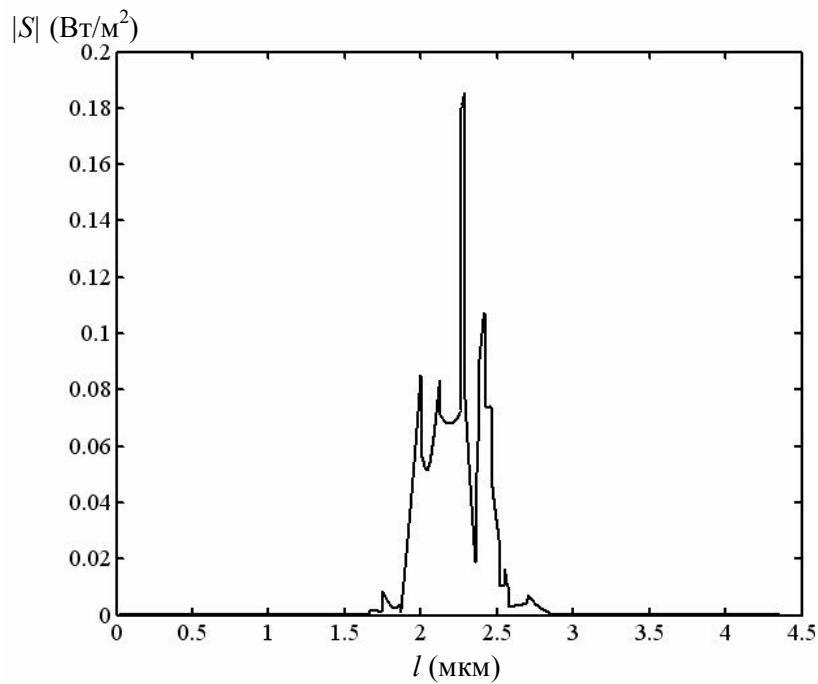


Рис. 10. Модуль вектора Умова-Пойтинга ($\Delta l = 0,5$, $t = 0,5\lambda$, 12989 тетраэдров)

1. Есепкина Н.А., Илясов Ю.П., Лавров А.П., Молодяков С.А., Орешко В.В. Применение акустооптического процессора для наблюдения радиоизлучения пульсаров // Письма в ЖТФ. — 2003. — Т. 29. — Вып. 21. — С. 32–39.

2. *Липинский А.Ю., Рудякова А.Н., Данилов В.В.* Физическая модель акустооптического процессора цифровой обработки сигналов // *Технология и конструирование в электронной аппаратуре*. — 2006. — № 1(61). — С. 9–12.
3. *Гуляев Ю.В., Проклов В.В., Соколовский С.В., Сотников В.Н.* Акустооптические устройства обработки аналоговой и цифровой информации // *Радиотехника и электроника*. — 1987. — Вып. 1. — С. 169–181.
4. *Раковский В.Ю., Щербаков А.С.* Акустооптический цифровой процессор-умножитель // *Журнал технической физики*. — 1989. — Т. 59. — Вып. 9. — С. 178–180.
5. *Goutin P., Logette P., Rouvaen J.M., Bridoux E.* Design and Applications of an Hybrid Acousto-optic Processor // *Proc. Ultrasonics Symposium*. — 1990. — Vol. 2. — P. 637–640.
6. *Logette P., Goutin P., Rouvaen J.M., Bridoux E.* Programmable Hybrid Acousto-Optic Processor for Transversal and Recursive Filtering // *Proc. Ultrasonics Symposium*. — 1991. — Vol. 1. — P. 569–572.
7. *Балакиши В.И., Парыгин В.Н., Чирков Л.Е.* Физические основы акустооптики. — М.: Радио и связь, 1985. — 280 с.
8. *Функциональные устройства обработки сигналов / С.А. Баруздин, Ю.В. Егоров, Б.А. Калинин и др.* — М.: Радио и связь, 1997. — 286 с.
9. *Липинский А.Ю., Рудякова А.Н., Данилов В.В.* Анализ профилей мод интегрального анизотропного оптического волновода методом конечных элементов // *Реєстрація, зберігання і обробка даних*. — 2005. — Т. 7, № 4. — С. 29–43.
10. *Красильников В.А., Крылов В.В.* Введение в физическую акустику. — М.: Наука, 1984. — 403 с.
11. *Webb J.P.* Hierarchal Vector Basis Functions of Arbitrary Order for Triangular and Tetrahedral Finite Elements // *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*. — 1999, Aug. — Vol. 47, N 8. — P. 1244–1253.
12. *Rodrigue G., White D.* A Vector Finite Element Time-Domain Method for Solving Maxwell's Equations on Unstructured Hexahedral Grids // *SIAM J. Sci. Comput.* — Vol. 23, N 3. — P. 683–706.
13. *Ribeiro Filho M., Pinho J.T., Silva J.P., Nobrega K.Z., Hernandez-Figueroa H.E.* A FEM Mesh Generator for Large Size Aspect Ratio Problems with Applications in Optoelectronics // *Proc. of the 2003 SBMO/IEEE MTT-S International Microwave and Optoelectronics Conference*. — 2003. — Vol. 2. — P. 589–593.
14. *Rieben R.N., White D.A., Rodrigue G.H.* Improved Conditioning of Finite Element Matrices Using New High-Order Interpolatory Bases // *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*. — 2004. — Vol. 52, N 10. — P. 2675–2683.
15. *Яриу А., Юх П.* Оптические волны в кристаллах. — М.: Мир, 1987. — 616 с.
16. *Rieben R., White D., Rodrigue G.* High-Order Symplectic Integration Methods for Finite Element Solutions to Time Dependent Maxwell Equations // *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*. — 2004. — Vol. 52, N 8. — P. 2190–2195.

Поступила в редакцию 07.06.2006