УДК 004.942

М. В. Синьков, Ю. Е. Бояринова,
Я. А. Калиновский, Т. В. Синькова
Институт проблем регистрации информации НАН Украины
ул. Н. Шпака, 2, 03113 Киев, Украина

Биплексные числовые системы и функции в них

Рассмотрены алгоритмы проведения арифметических и алгебраических операций, построение таких нелинейностей как экспонента, тригонометрические и гиперболические функции, а также обратные к ним функции в биплексных числовых системах.

Ключевые слова: *гиперкомплексная числовая система, биплексная числовая система, квазикомплексная числовая система, квазидвойная числовая система, квазидуальная числовая система.*

Биплексные числовые системы — это гиперкомплексные числовые системы второго порядка с единичным элементом в базисе. К биплексным числовым системам приводит обобщение закона умножения базисных элементов «классических» систем второй размерности с единичным элементом в базисе $\{e_1, e_2\}$. Если для них таблица умножения имеет вид

	e_1	e_2
e_1	e_1	e_2
e_2	e_2	$\pm e_1 \bigcup 0$

то для биплексных чисел соответственно

	e_1	e_2
e_1	e_1	e_2
e_2	e_2	$pe_1 + qe_2$

Здесь p и q — вещественные числа.

В работе [6] показано, что все множество биплексных систем состоит из трех классов систем, изоморфных внутри класса друг другу. При этом представителями классов являются «классические» системы:

— система комплексных чисел $\boldsymbol{C}$;

— система двойных чисел $\boldsymbol{W}$;

— система дуальных чисел $\boldsymbol{D}$.

Критерием принадлежности к тому или иному классу изоморфизма является значение выражения

$$p+\frac{q^2}{4}. \tag{1}$$

Если (1) отрицательно, то данная биплексная система принадлежит классу изоморфизма, представитель которой — система комплексных чисел $\boldsymbol{C}$. Будем называть такую биплексную систему кратко квазикомплексной. Введем обозначение:

$$k^2=-(p+\frac{q^2}{4})>0.$$

Если (1) положительно, то данная биплексная система принадлежит классу изоморфизма, представитель которой — система двойных чисел $\boldsymbol{W}$. Будем называть такую биплексную систему кратко квазидвойной. Введем обозначение:

$$k^2=p+\frac{q^2}{4}>0$$

И, наконец, если (1) равно нулю, то $k^2=0$, и такая система называется квазидуальной. Она изоморфна системе дуальных чисел $\boldsymbol{D}$.

Изоморфизм между квазисистемами с базисом $\{E_1,E_2\}$ и «классическими» системами с базисом $\{e_1,e_2\}$ устанавливается следующими соотношениями:

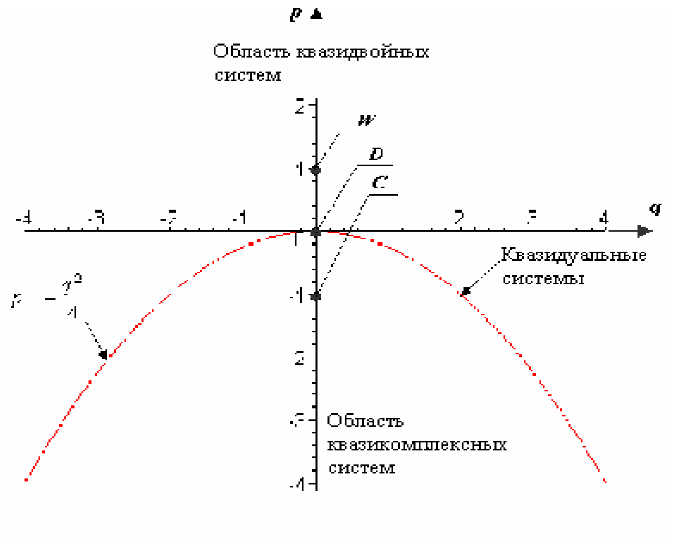
— для квазикомплексных и квазидвойных систем:

$$\begin{aligned} e_1&=E_1, & E_1&=e_1,\\ e_2&=-\frac{q}{2k}E_1+\frac{1}{k}E_2, & E_2&=\frac{q}{2}e_1+ke_2; \end{aligned}$$

— для квазидуальных систем:

$$\begin{aligned} e_1&=E_1, & E_1&=e_1,\\ e_2&=-\frac{q}{2}E_1+E_2, & E_2&=\frac{q}{2}e_1+e_2. \end{aligned}$$

Разбиение всех биплексных систем на классы изоморфизмов наглядно представляется на евклидовой плоскости [1] в системе координат, оси которых соответствуют параметрам закона композиции p и q, как это показано на рисунке.



Области классов изоморфизмов биплексных систем.

Рассмотрим матричное представление биплексных чисел. Так как элемент базиса E_1 — единичный элемент системы биплексных чисел, то его представлением будет единичная матрица:

$$E_1 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix},$$

а матричное представление второго элемента базиса E_2 найдется из решения матричного уравнения

$$E_2 \cdot E_2 = pE_1 + qE_2,$$

откуда:

$$E_2 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{p+q-1}{q-1} \\ q-1 & q-1 \end{vmatrix}.$$

Таким образом, в матричном представлении биплексное число выглядит так:

$$A = a_1E_1 + a_2E_2 \Rightarrow \begin{vmatrix} a_1 + a_2 & \dfrac{p+q-1}{q-1}a_2 \\ (q-1)a_2 & a_1 + (q-1)a_2 \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим алгоритмы проведения арифметических и алгебраических операций в бикомплексных числовых системах [2]. Если сложение и вычитание в них ничем не отличается от тех же операций в комплексных, двойных и дуальных системах, то умножение выглядит иначе. В частности:

$$(a_1E_1 + a_2E_2)\cdot(b_1E_1 + b_2E_2) = (a_1b_1 + pa_2b_2)E_1 + (a_1b_2 + a_2b_1 + qa_2b_2)E_2 .$$

Вопрос о сопряженном числе рассматривается в работе [3]. Сопряженное число $\overline{A}$ определяется по формуле:

$$\overline{a} = (a_1 + a_2q)E_1 - a_2E_2 .$$

Используя это выражение, можно определить и норму биплексного числа:

$$N(A) = A\overline{A} = a_1^2 + qa_1a_2 - pa_2^2 .$$

Рассмотрим вопрос о существовании делителей нуля, которое обусловлено возможностью обращения в нуль нормы биплексного числа:

$$N(A) = 0 ,$$

откуда следует соотношение между компонентами биплексного числа:

$$a_1 = \left(-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + p}\right)a_2 .$$

Для квазикомплексных систем:

$$\frac{q^2}{4} + p < 0 ,$$

то есть a_1 будет комплексным числом. Но оно должно быть действительным числом, а это означает, что в квазикомплексных системах (и в том числе в системе комплексных чисел) делителей нуля не существует.

Для квазидуальных систем:

$$\frac{q^2}{4} + p = 0 ,$$

что дает:

$$a_1 = -\frac{q}{2}a_2 .$$

Поэтому делители нуля в системе квазидуальных чисел имеют такой вид:

$$D_0 = \alpha(-\frac{q}{2}e_1 + e_2), \quad \alpha \in \boldsymbol{R} \setminus 0 .$$

Для квазидвойных систем соответственно:

$$\frac{q^2}{4} + p > 0 ,$$

$$D_0 = \alpha((-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + p})e_1 + e_2), \ \alpha \in \ \boldsymbol{R} \setminus 0 .$$

Алгоритм деления биплексных чисел состоит из проверки того, является ли делитель операции делителем нуля, и определения частного по обычному правилу деления:

$$\frac{A}{B} = \frac{A \cdot \overline{B}}{N(B)} .$$

Рассмотренные алгоритмы выполнения операций позволяют строить представления таких нелинейных функций, как степенные и дробно-рациональные. Что касается построения иррациональных функций, то оно также возможно, но, в общем случае не в исходной биплексной системе, а в гиперкомплексной системе, полученной удвоением исходной биплексной системы с помощью системы комплексных чисел.

В биплексных числовых системах возможны построения и таких трансцендентных нелинейностей как экспонента, тригонометрические и гиперболические функции. Наиболее универсальным методом построения таких представлений является разработанный авторами метод ассоциированной системы дифференциальных уравнений [4]. В табл. 1 приводятся результаты, полученные авторами при использовании этого метода.

Аргументом приведенных в табл. 1 функций является биплексное число $M = m_1E_1 + m_2E_2$, а его обозначения следующие:

$$\varphi = m_1 + m_2\frac{q}{2}; \quad \phi = m_1 + (\frac{q}{2} + k)m_2; \quad \eta = m_1 - (k - \frac{q}{2})m_2 .$$

В системах биплексных чисел возможны также построения представлений обратных функций [5].

Зная значения для прямых функций от гиперкомплексной переменной $F(X)$, строится изображение обратных функций, используя соотношение $F^{-1}(F(X)) = X$.

Таблица 1

Класс	Функция	Представления функций
Квазикомплексные	exp	$e^{m_1+\frac{q}{2}m_2}((\cos km_2 - \frac{q}{2k}\sin km_2)E_1 + \frac{1}{k}\sin km_2 \cdot E_2)$
	sin	$(\sin\varphi\cosh km_2 - \frac{q}{2k}\cos\varphi\sin km_2)E_1 + \cos\varphi\sinh km_2 \cdot E_2$
	cos	$(\cos\varphi\cosh km_2 - \frac{q}{2k}\sin\varphi\sin km_2)E_1 + \sin\varphi\sinh km_2 \cdot E_2$
	sinh	$(sh\varphi\cos km_2 - \frac{q}{2k}ch\varphi\sin km_2)E_1 + \frac{1}{k}ch\varphi\sin km_2 E_2$
	cosh	$(ch\varphi\cos km_2 - \frac{q}{2k}sh\varphi\sin km_2)E_1 + \frac{1}{k}sh\varphi\sin km_2 E_2$
Казидуальные	exp	$e^{m_1+\frac{q}{2}m_2}((1-\frac{q}{2}m_2)E_1 + m_2 E_2)$
	sin	$(\sin\varphi - m_2\frac{q}{2}\cos\varphi)E_1 + m_2\frac{q}{2}\cos\varphi E_2$
	cos	$(\cos\varphi + m_2\frac{q}{2}\sin\varphi)E_1 - m_2\frac{q}{2}\sin\varphi E_2$
	sinh	$(sh\varphi - m_2\frac{q}{2}ch\varphi)E_1 + m_2 ch\varphi E_2$
	cosh	$(ch\varphi - m_2\frac{q}{2}sh\varphi)E_1 + m_2 sh\varphi E_2$
Квазидвойные	exp	$e^{(m_1+\frac{q}{2}m_2)t}((ch(m_2k) - \frac{q}{2k}sh(m_2k))\cdot E_1 + \frac{1}{k}\cdot sh(m_2k)\cdot E_2)$
	sin	$\frac{1}{2}((1-\frac{q}{2k})\sin\phi + \sin\eta)E_1 + \frac{1}{2k}(\sin\phi - \sin\eta)E_2$
	cos	$\frac{1}{2}((1-\frac{q}{2k})\cos\phi + \cos\eta)E_1 + \frac{1}{2k}(\cos\phi - \cos\eta)E_2$
	sinh	$\frac{1}{2k}((k-\frac{q}{2})sh\phi + (k+\frac{q}{2})sh\eta)E_1 + \frac{1}{2k}(sh\phi + (k-\frac{q}{2})sh\eta)E_2$
	cosh	$\frac{1}{2k}((k-\frac{q}{2})ch\phi + (k+\frac{q}{2})ch\eta)E_1 + \frac{1}{2k}((k-\frac{q}{2})ch\phi + (k-\frac{q}{2})ch\eta)E_2$

Так как экспонента, гиперболические и тригонометрические функции представляют собой гиперкомплексные функции, то обратные функции также являются гиперкомплексными, то есть имеют вид:

$$\sum_{j=1}^{n} f_j(x_1,..,x_n)\cdot e_j = \sum_{j=1}^{n} y_j \cdot e_j .$$

Если это уравнение представить в виде системы уравнений

$$f_j(x_1,..,x_n) = y_j,\ j = 1,..,n,$$

то ее можно решить относительно переменных $x_1,..,x_n$:

$$x_j = g_j(y_1,...,y_n);\ j = 1,...,n.$$

Если эти решения подставить в выражение

$$F^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} f_j(x_1,..,x_n)\cdot e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot e_j,$$

то получим изображение обратной функции:

$$F^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} y_j \cdot e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} g_j(y_1,..., y_n)\cdot e_j.$$

Таким образом, были определены обратные функции для квазидуальной числовой системы, которые сведены в табл. 2.

Таблица 2

Класс	Функция	Представления функций
Казидуальные	Ln	$\left(\dfrac{\frac{q}{2}x_2 - \ln(x_1+\frac{q}{2}x_2) - \frac{q}{2}x_2\ln(x_1+\frac{q}{2}x_2)}{x_1+\frac{q}{2}x_2}\right)E_1 + \dfrac{x_2}{x_1+\frac{q}{2}x_2}E_2$
	Arcsin	$\dfrac{-x_2 + \mathrm{arctg}(\frac{x_1+x_2}{\sqrt{1-(x_1+x_2)^2}}\cdot\sqrt{1-(x_1+x_2)^2}}{\sqrt{1-(x_1+x_2)^2}}E_1 + \dfrac{2x_2}{q\sqrt{1-(x_1+x_2)^2}}E_2$
	Arccos	$\dfrac{x_2 + \mathrm{arctg}(\frac{\sqrt{1-(x_1+x_2)^2}}{x_1+x_2}\cdot\sqrt{1-(x_1+x_2)^2}}{\sqrt{1-(x_1+x_2)^2}}E_1 + \dfrac{2x_2}{q\sqrt{1-(x_1+x_2)^2}}E_2$
	Arcsinh	$\dfrac{2\ln\alpha + (2\ln\alpha\cdot x_1 - x_2q + \ln\alpha\cdot x_2q)\alpha}{2x_1\alpha + x_2q\alpha + 2}E_1 + \dfrac{2x_2\alpha}{2x_1\alpha + x_2q\alpha + 2}E_2$
	Arccosh	$\dfrac{-2\ln\beta + (-x_2q + 2\ln\beta\cdot x_1 + \ln\beta\cdot qx_2)\beta}{2x_1\beta + x_2q\beta - 2}E_1 + \dfrac{2x_2\beta}{2x_1\beta + x_2q\beta - 2}E_2$

Здесь $\alpha = x_1 + \frac{1}{2}x_2 q + \frac{1}{2}\sqrt{(2x_1 + x_2 q)^2 - 4}$, $\beta = x_1 + \frac{1}{2}x_2 q + \frac{1}{2}\sqrt{(2x_1 + x_2 q)^2 + 4}$.

Полученные в работе результаты позволяют производить обработку данных в биплексных числовых системах, которые находят достаточно важные применения как в техничских, так и научных областях, например, анализ и синтез плоских механизмов, специальная теория относительности и др. [7, 8].

Работа выполнена при поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований Украины.

1. *Синьков М.В., Калиновский Я.А* О связи систем дифференциальных уравнений с гиперкомплексными числовыми системами: Сб. Проблемы регистрации информации. — К.: Наук. думка, 1991. — С. 100–103.

2. *Синьков М.В., Калиновский Я.А., Синькова Т.В.* Некоторые линейные и нелинейные операции обобщенных комплексных чисел // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2002. — Т. 4, № 3. — С. 55–61.

3. *Синьков М.В., Калиновский Я.А., Постникова Т.Г., Синькова Т.В.* Построение сопряженностей в гиперкомплексных числовых системах. Ч. 1. Online: http://www.hypercomplex.ru/sinkov.zip. — 2002.

4. *Калиновский Я.А., Роенко Н.В., Синьков М.В.* Методы построения нелинейностей в расширениях комплексных чисел // Кибернетика и системный анализ. — 1996. — № 4. — С. 178–181.

5. *Синьков М.В., Каліновський Я.О., Боярінова Ю.Є.* Розробка та дослідження алгоритмів побудови зображення обернених функцій від гіперкомплексного змінного // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2005. — Т. 7, № 1. — С. 32–42.

6. *Кантор И.Л., Солодовников А.С.* Гиперкомплексные числа. — М.: Наука, 1973. — 144 с.

7. *Bardhan D., Osler T.J.* An Easy Introduction to Biplex Numbers Mathematics and Computer Education. — 2002. — **36**. — P. 278–286.

8. *Sobczyk G.* The Hyperbolic Number Plane // The College Mathematics Journal. — 1995. — **26**(4). — P. 268–280 p.

Поступила в редакцию 02.12.2005