УДК 681.3

И. А. Пилькевич
Житомирский филиал ЧВУЗа «Европейский университет»
ул. Якира, 20, 10014 Житомир, Украина
e-mail: office@eu.zt.ua

Алгоритм обработки данных регистрации с учетом априорных связей между ними

Решается задача получения совместных точных статистических оценок нескольких числовых параметров (данных регистрации) по экспериментальным данным при условии, что данные регистрации связаны априорно известными конечными уравнениями. Получаемые при этом условные оценки обладают более высокой точностью по сравнению с безусловными, получаемыми методами классического параметрического оценивания исключительно по данным регистрации. Задача ставится и решается в самом общем виде так, что методы и результаты ее решения могут быть использованы для совместной оценки совокупности параметров объекта регистрации любой физической природы, если априори установлена связь между данными регистрации в виде конечных уравнений.

Ключевые слова: *априорная связь, совместное оценивание, условная оценка данных регистрации.*

Введение

В настоящее время хорошо разработаны методы совместного статистического оценивания параметров распределений [1], когда в качестве априорных данных для вычисления оценок используется совместное распределение вероятностей выборочных данных (данных регистрации), которое зависит от оцениваемых параметров, и, может быть, совместное распределение оцениваемых параметров с матрицей-функцией потерь (стоимости). Однако на практике часто подвергаются одновременной регистрации величины с априори известной связью в виде физических законов, которые описываются конечными (алгебраическими или трансцендентными) уравнениями. Таковыми величинами в простейшем случае могут быть сила тока в участке цепи и напряжение на его концах, связанные априори законом Ома, давление газа, температура и занимаемый газом объем, связанные (в идеале) уравнением газового состояния, и т.д. Дополнительная априорная информация об измеряемых величинах, в данном случае в виде уравнений их связывающих, может служить источником повышения точности регистрации. Алгоритм условного оценивания двух параметров по результатам их регистрации уже разработан, а также проведена оценка его эффективности [2]. Задача данной работы — разработать механизм использования априорной информации при оценке векторного процесса и оценить его эффективность.

Оценка векторного процесса с использованием уравнения связи его компонент

Задача оценки векторного процесса с использованием уравнение связи оцениваемых компонент является обобщением задачи условной оценки некоторых параметров физического состояния объекта с использованием связывающих эти параметры законов, известных априорно [2]. Если оцениваемые величины (параметры) являются функциями времени и изменяются с его течением, то есть представляют собой процессы каждый в отдельности и векторный процесс в совокупности, то при совместном оценивании появляется возможность использовать помимо известной априорно статистической взаимосвязи между различными параметрами в виде их ковариации еще и статистическую связь измерений по времени в виде корреляционной функции. Это должно привести к повышению качества оценивания. Однако переход от оценивания вектора величин к оцениванию вектора процессов с учетом их предыстории означает усложнение процедуры оценивания, что является платой за повышение точности оценок.

Область практического использования алгоритма оценки векторного процесса с использованием уравнения связи не ограничивается случаем одного уравнения связи, а возникает всегда, когда производятся одновременные измерения серии физических величин, связанных известными физическими законами в виде уравнений (в общем случае) или специально установленными закономерностями. Поэтому рассматриваемая задача требует самостоятельного математического исследования.

Задачами, требующими исследования, являются:

— выбор способа метризации пространства векторного процесса и его обоснование;

— разработка алгоритма совместного оценивания компонентов векторного процесса;

— оценка эффективности алгоритма совместного оценивания.

Как и в задаче совместного оценивания величин (в отличие от рассматриваемой задачи совместного оценивания процессов) алгоритм совместной оценки должен строиться по принципу минимизации расстояния, что предполагает наличие метрики в пространстве параметров регистрации. Если в конечном пространстве параметров регистрации (например, величин α и β) метрика задавалась обратной корреляционной матрицей измерений, то в бесконечном пространстве процессов ввиду их непрерывности такой способ метризации невозможен, чем продиктована первая задача. Ее решение открывает возможности для непосредственного построения алгоритма совместного оценивания, то есть для решения второй задачи. Новый полученный алгоритм требует оценки его эффективности и рекомендаций по его практическому применению (третья задача).

Метризация пространства векторного процесса

В случае конечномерного пространства Эвклидова метрика задается метрической квадратичной формой. В [2] была показана целесообразность использования в качестве ее матрицы обратной корреляционной матрицы измерений. Если непрерывные процессы, являющиеся компонентами векторного процесса, заменить их отсчетами в дискретные моменты времени, то в принципе можно использовать для метризации пространства измерений ту же обратную корреляционную матрицу, так как дискретизация означает переход к конечномерному пространству измерений. Обратный переход от дискретной реализации к непрерывной означает уменьшение интервала дискретизации до нуля. Последнее означает возрастание корреляционных связей между соседними отсчетами до максимума, корреляционная матрица при неограниченном «учащении» отсчетов становится плохообусловленной, а в пределе — вырожденной, что делает невозможным ее обращение. Тем не менее, способ метризации с помощью корреляционных связей, благодаря его положительным свойствам (см. [2]), желательно сохранить. Решение задачи можно получить путем отказа от использования собственно корреляционной матрицы и определением скалярного произведения с помощью вспомогательного весового вектора, определяемого корреляционной матрицей φ скалярное произведение векторов $\vec{\xi}_1$ и $\vec{\xi}_2$ определяется формой

$$\left(\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2\right) = \vec{\xi}_1^{\,T} \varphi^{-1} \vec{\xi}_2 , \qquad (1)$$

то, введя весовой вектор

$$\vec{\eta}_1 = \vec{\xi}_1^{\,T} \varphi^{-1} = \varphi^{-1} \vec{\xi}_1 , \qquad (2)$$

скалярное произведение **(**1) запишется как произведение векторов

$$\left(\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2\right) = \vec{\eta}_1^{\,T} \vec{\xi}_2 . \qquad (3)$$

Весовой вектор $\vec{\eta}$ определяется формулой (2) для случая, когда обращение матрицы φ возможно и корректно. В более общем случае вектор $\vec{\eta}$ определяется (в частности, на основании (2)), как решение матричного уравнения весового вектора:

$$\varphi \vec{\eta} = \vec{\xi} . \qquad (4)$$

Уравнение (4) в отличие от (2) имеет смысл при произвольной матрице φ. Это дает возможность перейти к непрерывному аналогу (4). Предельный переход к непрерывной реализации векторного процесса $\vec{\xi}(t)$ приводит к интегрально-матричному уравнению весового вектора [3]:

$$\int \varphi(t,\tau)\vec{\eta}(\tau)d\tau = \vec{\xi}(t). \qquad (5)$$

Здесь и далее пределы интегрирования понимаются бесконечными и не проставляются.

Непрерывный аналог (5) выражается весовым интегралом

$$\vec{з}^{T}\vec{\xi} \xrightarrow{\Delta t \to 0} \int \vec{з}^{\mathrm{T}}(t)\vec{\xi}(t)dt\,, \qquad (6)$$

где Δt — интервал дискретизации измерений.

Выражения (5) и (6) дают возможность сформулировать понятие расстояния в пространстве векторного процесса $\vec{\xi}(t)$. Квадрат расстояния между двумя процессами $\vec{\xi}_1(t)$ и $\vec{\xi}_2(t)$ равен значению интеграла

$$c^2(\vec{\xi}_1,\vec{\xi}_2) = \int \left[\vec{з}_1(t) - \vec{з}_2(t)\right]^{\mathrm{T}} \cdot \left[\vec{\xi}_1(t) - \vec{\xi}_2(t)\right]dt\,, \qquad (7)$$

весовые вектор-функции $\vec{\eta}_1$ и $\vec{\eta}_2$ в котором являются решением интегральных уравнений

$$\int \varphi(t,\tau)\vec{з}_1(\tau)d\tau = \vec{\xi}_1(t), \qquad (8а)$$

$$\int \varphi(t,\tau)\vec{з}_2(\tau)d\tau = \vec{\xi}_2(t), \qquad (8б)$$

$$\varphi(t_1,t_2) = \langle (\vec{\xi}(t_1) - \langle \vec{\xi}(t_1) \rangle)(\vec{\xi}(t_2) - \langle \vec{\xi}(t_2) \rangle)^{\mathrm{T}} \rangle \qquad (9)$$

— корреляционная матрица ошибок измерений.

Для того, чтобы величину ρ, введенную с помощью (7) и (8), можно было обосновано использовать в качестве метрического расстояния необходимо, чтобы, во-первых, функционал (7), заданный в пространстве интегрируемых вектор-функций, был неотрицателен, и, во-вторых, чтобы он подчинялся трем метрическим аксиомам [4]:

1) *аксиома невырожденности* $\rho(\vec{\xi}_1,\vec{\xi}_2) = 0$ тогда и только тогда, когда $\vec{\xi}_1 \equiv \vec{\xi}_2$;

2) *аксиома симметрии* $\rho(\vec{\xi}_1,\vec{\xi}_2) = \rho(\vec{\xi}_2,\vec{\xi}_1)$;

3) *аксиома треугольника* $\rho(\vec{X},\vec{Z}) \le \rho(\vec{X},\vec{Y}) + \rho(\vec{Y},\vec{Z})$.

Неотрицательность функционала

Обозначим в (7) $\vec{з}_1 - \vec{з}_2 = \vec{з}$, $\vec{\xi}_1 - \vec{\xi}_2 = \vec{\xi}$. Тогда функционал (7) принимает вид весового интеграла (6):

$$\rho = \int \vec{з}^{\mathrm{T}}\vec{\xi}dt\,. \qquad (10)$$

Транспонируем в (8) правую и левую части и домножим справа на $\vec{\xi}(t)$. Проинтегрировав по t, получаем:

$$\iint \vec{\eta}^{\mathrm{T}}(\tau)\varphi(t,\tau)\vec{\xi}(t)dtd\tau = \int \vec{\xi}^{\mathrm{T}}(t)\vec{\xi}(t)dt\,. \qquad (11)$$

Правая часть неотрицательна как интеграл от суммы квадратов компонентов вектора $\vec{\xi}$. Это значит, что для любой корреляционной матрицы

$$\iint \vec{\eta}^{\mathrm{T}}(\tau)\varphi(t,\tau)\vec{\xi}(t)dtd\tau \geq 0\,. \qquad (12)$$

Положим

$$\varphi(t,\tau) = I \cdot \delta(t-\tau)\,, \qquad (13)$$

где I — единичная матрица; $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака.

С такой матрицей φ (12) преобразуется в интеграл (10), что и доказывает неотрицательность ρ на всем пространстве вектор-функций $\vec{\xi}(t)$.

Аксиома невырожденности

Из (7) очевидно, что при $\vec{o}_1 \equiv \vec{o}_2$ $\rho = 0$. С другой стороны, если $\vec{o}_1 \neq \vec{o}_2$, а $\rho = 0$, то должно быть $\vec{з}_1 \equiv \vec{з}_2$, а это возможно лишь при равенстве векторов $\vec{o}_1$ и $\vec{o}_2$ на основании (8). Поэтому их неравенство влечет за собой отличие от нуля функционала расстояния ρ.

Аксиома симметрии

$$c\left(\vec{o}_2,\vec{o}_1\right) = \int\left(\vec{з}_2 - \vec{з}_1\right)^{\Phi}\left(\vec{o}_2 - \vec{o}_1\right)dt = \int\left(\vec{з}_1 - \vec{з}_2\right)^{\Phi}\left(\vec{o}_1 - \vec{o}_2\right)dt = c\left(\vec{o}_1,\vec{o}_2\right).$$

Аксиома треугольника

Она состоит в требовании выполнения неравенства

$$\sqrt{\int\left(\vec{з}_x - \vec{з}_z\right)^{\Phi}\left(\vec{x} - \vec{z}\right)dt} \leq \sqrt{\int\left(\vec{з}_x - \vec{з}_y\right)^{\Phi}\left(\vec{x} - \vec{y}\right)dt} + \sqrt{\int\left(\vec{з}_y - \vec{з}_z\right)^{\Phi}\left(\vec{y} - \vec{z}\right)dt} \qquad (14)$$

для $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ из пространства интегрируемых вектор-функций.

Обозначим

$$\begin{aligned} &\vec{з}_x - \vec{з}_y = \vec{з}_1, \\ &\vec{з}_y - \vec{з}_z = \vec{з}_2, \\ &\vec{з}_x - \vec{з}_z = \vec{з}_1 + \vec{з}_2, \end{aligned} \qquad (15)$$

$$\begin{aligned} &\vec{x}-\vec{y}=\vec{o}_1, \\ &\vec{y}-\vec{z}=\vec{o}_2, \\ &\vec{x}-\vec{z}=\vec{o}_1+\vec{o}_2. \end{aligned} \tag{16}$$

Возведем (14) в квадрат. С учетом (15) и (16), получим:

$$\int\left(\vec{\text{з}}_1+\vec{\text{з}}_2\right)^{\Phi}\left(\vec{o}_1+\vec{o}_2\right)dt \le \int\vec{\text{з}}_1{}^{\Phi}\vec{o}_1dt+\int\vec{\text{з}}_2{}^{\Phi}\vec{o}_2dt+2\sqrt{\int\vec{\text{з}}_1{}^{\Phi}\vec{o}_1dt}\cdot\sqrt{\int\vec{\text{з}}_2{}^{\Phi}\vec{o}_2dt}. \tag{17}$$

Интеграл в левой части (17) разбивается на сумму

$$\int\vec{\text{з}}_1{}^{\Phi}\vec{o}_1dt+\int\vec{\text{з}}_2{}^{\Phi}\vec{o}_2dt+\int\left(\vec{\text{з}}_1{}^{\Phi}\vec{o}_2+\vec{\text{з}}_2{}^{\Phi}\vec{o}_1\right)dt\,. \tag{18}$$

Первые два слагаемых в (18) и в правой части (17) сокращаются, а третье слагаемое в (18) преобразуется

$$\int\left(\vec{\text{з}}_1{}^{\Phi}\vec{o}_2+\vec{\text{з}}_2{}^{\Phi}\vec{o}_1\right)dt=2\int\vec{\text{з}}_1{}^{\Phi}\vec{o}_2dt=2\int\vec{\text{з}}_2{}^{\Phi}\vec{o}_1dt\,. \tag{19}$$

Для получения (19) достаточно уравнения (8) транспонировать, (8а) домножить справа на $\vec{\xi}_2$, (8б) на $\vec{\xi}_1$, проинтегрировать по t. Правые части с очевидностью равны:

$$\int\vec{\xi}_1{}^{\mathrm{T}}\vec{\xi}_2dt=\int\vec{\xi}_2{}^{\mathrm{T}}\vec{\xi}_1dt\,. \tag{20}$$

Уравниваем левые части:

$$\iint\vec{\eta}_1{}^{\mathrm{T}}\varphi\vec{\xi}_2dtd\tau=\iint\vec{\eta}_2{}^{\mathrm{T}}\varphi\vec{\xi}_1dtd\tau\,, \tag{21}$$

что имеет место для $\forall\varphi(t,\tau)$. Полагаем в (21) φ, определенной в соответствии с (13). Получим:

$$\int\vec{\text{з}}_1{}^{\Phi}\vec{\xi}_2dt=\int\vec{\text{з}}_2{}^{\Phi}\vec{\xi}_1dt\,,$$

откуда и следует (19).

С учетом (18) и (19) (17) преобразуется к виду:

$$\int\vec{\text{з}}_1{}^{\Phi}\vec{o}_2dt\le\sqrt{\int\vec{\text{з}}_1{}^{\Phi}\vec{o}_1dt}\cdot\sqrt{\int\vec{\text{з}}_2{}^{\Phi}\vec{o}_2dt}\,. \tag{22}$$

Возводим (22) в квадрат и получаем неравенство

$$\left(\int \vec{з}_1^{\,Ф}\vec{о}_2 dt\right)^2 \le \int \vec{з}_1^{\,Ф}\vec{о}_1 dt \cdot \int \vec{з}_2^{\,Ф}\vec{о}_2 dt\,, \qquad (23)$$

которое представляет собой векторное обобщение интегральной формы неравенства Коши-Буняковского [4], что и доказывает справедливость исходного неравенства (14).

Таким образом, введенный с помощью (7), (8) функционал расстояния ρ удовлетворяет необходимым требованиям и может быть использован для метризации пространства процессов, описываемых вектор-функциями времени.

Алгоритм условного оценивания компонентов векторного процесса

Пусть имеется безусловная оценка значений векторного процесса $\hat{\vec{\xi}}(t)$ за время наблюдения (регистрации). Предположим, что известна корреляционная матрица ошибок измерений $\varphi(t_1,t_2)$. Известно также конечное уравнение, которому в любой момент времени должны удовлетворять компоненты процесса $\vec{\xi}(t)$:

$$\Phi[\xi_1(t),\xi_2(t),...,\xi_m(t)] = 0\,. \qquad (24)$$

Задача состоит в получении условной совместной оценки процесса $\vec{\xi}(t)$, удовлетворяющей уравнению связи (24) и обладающей наименьшим среднеквадратическим отклонением от истинного процесса среди всех оценок, удовлетворяющих (24).

Введем квадрат отклонения с помощью метрического функционала (7).

Если первичная оценка $\hat{\vec{\xi}}(t)$ оптимальна в смысле минимума среднего квадрата отклонения от истинного значения, а истинное значение $\vec{\xi}(t)$ принадлежит гиперповерхности (24), то в качестве окончательной следует искать точку на поверхности (24), ближайшую в смысле принятой метрики к первичной оптимальной оценке $\hat{\vec{\xi}}(t)$. Таким образом, окончательная оценка $\vec{\xi}(t)$ должна минимизировать функционал $\rho^2[\vec{\xi}(t),\hat{\vec{\xi}}(t)]$ при условии ее принадлежности гиперповерхности (24). Поиск такой оценки представляет собой вариационную задачу об исследовании функционала ρ^2 на условный экстремум при наличии голономных связей. Методика ее решения методом неопределенных множителей Лагранжа общеизвестна [5]. Она состоит в формировании вспомогательного функционала

$$\rho^{*2}(\vec{\xi},\hat{\vec{\xi}}) = \int [(\vec{з} - \hat{\vec{з}})^{\mathrm{T}}(\vec{\xi} - \hat{\vec{\xi}}) - \lambda\Phi(\vec{\xi})]\, dt \qquad (25)$$

и исследовании его на безусловный экстремум (λ — неопределенный множитель).

Вектор-функция $\vec{\xi}(t)$, на которой функционал (25) достигает безусловный экстремум, обязана удовлетворять системе уравнений Эйлера [5]

$$\frac{\partial F}{\partial \vec{\xi}} - \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial F}{\partial \left(d\vec{\xi} \big/ dt \right)} = 0, \tag{26}$$

где F — подинтегральная функция в (25).

Ввиду независимости F от производной $d\vec{\xi} \big/ dt$ дифференциальные уравнения (26) вырождаются в конечные:

$$\frac{\partial F}{\partial \vec{\xi}} = \vec{з} - \vec{€} - \lambda \frac{d\Phi\left(\vec{\xi}\right)}{\partial \vec{\xi}} = 0 \tag{27}$$

или

$$\lambda \frac{\partial \Phi\left(\vec{\xi}\right)}{\partial \vec{\xi}} = \vec{з} - \vec{€}. \tag{28}$$

Чтобы исключить весовые вектор-функции $\vec{з}(t)$ и $\vec{€}(t)$ домножим (28) слева на корреляционную матрицу φ и проинтегрируем. Получим

$$\lambda \int \varphi(t,\tau) \cdot \frac{\partial \Phi\left[\vec{\xi}(t)\right]}{\partial \vec{\xi}} d\tau = \int \varphi(t\tau)\left(\vec{з} - \vec{€}\right) d\tau. \tag{29}$$

На основании (8) меняем правую часть (29) на разность $\vec{\xi} - \vec{€}$, после чего приходим к системе интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода относительно искомой оценки процесса $\vec{\xi}(t)$:

$$\vec{\xi}(t) = \vec{€}(t) + \lambda \int \varphi(t,\tau) \cdot \frac{\partial \Phi\left(\vec{\xi}\right)}{\partial \vec{\xi}} d\tau. \tag{30}$$

Дополняя систему (30) уравнением связи (24), получаем полную систему уравнений, однозначно определяющую вектор-функцию $\vec{\xi}(t)$.

Система (30) совместно с (24) представляет собой общий алгоритм оценивания векторного процесса с учетом априорно известной связи его компонентов.

Для практики особый интерес представляет частный случай, когда уравнение связи (24) описывает гиперплоскость. В этом случае функция $\Phi\left(\vec{\xi}\right)$ представляет собой линейную форму от $\vec{\xi}$ со смещением на некоторое слагаемое *C:*

$$\Phi(\vec{\xi}) = \vec{\alpha}^{\mathrm{T}} \vec{\xi} - C = \sum_i \alpha_i \xi_i - C\,. \tag{31}$$

Так связаны между собой, например, давление и абсолютная температура в уравнении состояния идеального газа. Так связаны между собой напряжение на концах участка цепи и сила тока в нем, сила, приложенная к телу, с сообщаемым ему ускорением и его массой и т.д. Более того, в случае нелинейной связи компонентов вектора $\vec{\xi}$ (24) при ограниченном средним квадратом ошибки оценивания $\hat{\xi}$ множество возможных точек $\vec{\xi}$, изображающих окончательные оценки по алгоритму (30), (24), будет занимать на гиперповерхности (24) ограниченную область, которую можно в первом приближении заменить касательной гиперплоскостью. В этом случае уравнение (24) линеаризуется и приводится к виду

$$\left[\frac{\partial \Phi(\vec{\xi})}{\partial \vec{\xi}}\bigg|_{\vec{\xi}=\hat{\vec{\xi}}}\right]^{\Phi} \cdot (\vec{\xi} - \hat{\vec{\xi}}) = 0 . \tag{32}$$

Сравнивая (31) и (32), находим:

$$\vec{\alpha} = \frac{\partial \Phi(\vec{\xi})}{\partial \vec{\xi}}\bigg|_{\vec{\xi}=\hat{\vec{\xi}}}, \quad C = \vec{\alpha}^{\Phi} \hat{\vec{\xi}} . \tag{33}$$

Конкретизация уравнения связи (24) до уравнения гиперплоскости с помощью (31), (32) позволяет получить явное решение системы (30) в простом виде. Подстановка (31) в (30) дает совместно с (24) систему:

$$\vec{\xi}(t) = \hat{\vec{\xi}}(t) + \lambda \cdot F(t) \cdot \vec{\alpha} , \tag{34}$$

$$\vec{\alpha}^{\mathrm{T}} \vec{\xi}(t) = C(t) , \tag{35}$$

где

$$F(t) = \int \varphi(t, \tau) d\tau . \tag{36}$$

Исключаем из системы (34), (35) неопределенный множитель λ и получаем окончательно:

$$\vec{\xi}(t) = \hat{\vec{\xi}}(t) + \frac{F(t)\vec{\alpha}}{\vec{\alpha}^{\Phi} F(t) \vec{\alpha}} \left[c(t) - \vec{\alpha}^{\Phi} \hat{\vec{\xi}}(t) \right] . \tag{37}$$

Алгоритм (37) состоит в «уточнении» первичной оценки $\hat{\vec{\xi}}$ на взвешенную невязку $C - \vec{\alpha}^{\Phi} \hat{\vec{\xi}}$, которая характеризирует удаление оценки $\hat{\vec{\xi}}$ от гиперплоскости (35), заведомо содержащей истинное значение $\vec{\xi}$.

Пусть несмещенная первичная оценка $\vec{\hat{\xi}}(t)$ представляет собой «зашумленный» белым шумом детерминированный процесс $\vec{\xi}(t)$. Это значит, что корреляционная матрица ошибок имеет вид:

$$\varphi(t-\tau) = \varphi_0 \cdot \delta(t-\tau)\,. \tag{38}$$

Если к тому же корреляция между компонентами $\vec{\xi}(t)$ отсутствует, то

$$\varphi_0 = \begin{pmatrix} \frac{N_1}{2} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \frac{N_2}{2} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{N_m}{2} \end{pmatrix}, \tag{39}$$

где $\frac{N_i}{2}$ — половинчатый спектр мощности шума.

Уравнения оценки (37) в координатной форме при подстановке в него (38), (39) принимает вид:

$$\xi_i(t) = \hat{\xi}_i(t) + \frac{\frac{N_i}{2}\cdot\alpha_i}{\sum\limits_i \frac{N_i}{2}\cdot\alpha^2{}_i}[C(t) - \sum_i \alpha_i \hat{\xi}_i(t)]\,. \tag{40}$$

Если совместной оценке подвергаются величины α и β, связанные уравнением

$$\alpha - K\cdot\beta = 0\,, \tag{41}$$

то $\alpha_1 = \text{Й}\alpha_2 = -K, C(t) \equiv 0$, и (40) после несложных преобразований принимает вид:

$$\beta = \frac{K\cdot\frac{H_\beta}{2}\hat{\alpha} + \frac{H_\alpha}{2}\hat{\beta}}{\frac{H_\alpha}{2} + K^2\cdot\frac{H_\beta}{2}}\,. \tag{42}$$

В случае линейного уравнения связи (24) согласно алгоритма (37) значение оценки на текущий момент времени $\vec{\xi}(t)$ определяется значением первичной оценки $\vec{\hat{\xi}}(t)$ тоже на этот же момент времени t и не зависит от предыстории оценивания. А если к тому же ошибки отсчетов $\vec{\xi}$€ в любые сколь угодно близкие моменты времени статистически не связаны (см. (38)), то мы переходим фактически от оценки случайных процессов к совокупной оценке случайных величии.

Таким образом, алгоритм оценки векторного случайного процесса (37) с учетом связи его компонентов (24) является наиболее общим и универсальным. Алгоритм совместной оценки параметров [2] включается в алгоритм (37) как частный случай.

Оценка эффективности алгоритма условного оценивания

Показателем эффективности алгоритма оценивания является точность получаемых оценок. Для несмещенных оценок (полагаем, что с такими только имеем дело) точность характеризуется дисперсией. Для вектора оценок рассматривают определитель ковариационной матрицы, представляющей собой обобщенную дисперсию [6].

Анализ эффективности алгоритма оценивания (30) в самом общем случае аналитически сложен и возможен, по-видимому, только численными методами путем статистического моделирования на ЭВМ. Процедура оценивания среднего квадрата ошибки состоит в генерировании по заданной корреляционной матрице φ вектора первичных оценок $\vec{\xi}$€, расчете путем решения системы (30) окончательной оценки $\vec{\xi}$, вычислении квадрата невязки оценки $\vec{\xi}$ с истинным значением, повторении этой процедуры множество раз и расчете среднего значения квадрата невязки.

Для аналитического исследования эффективности алгоритма ограничимся частным случаем линейной связи (24) в виде уравнения (35) с независимыми и равноточными измерениями по координатам векторного процесса $\vec{\xi}(t)$.

По определению, ковариационная матрица оценок равна

$$R(t_1,t_2) = <\left(\vec{\xi}(t_1) - <\vec{\xi}(t_1)>\right)\left(\vec{\xi}(t_2) - <\vec{\xi}(t_2)>\right)^{\mathrm{T}}>, \tag{43}$$

где «< >» — знак усреднения.

Путем подстановки (37) в (43), получаем:

$$R(t_1,t_2) = \left(\text{Й} - \frac{F(t_1)\vec{\alpha}\vec{\alpha}^{\Phi}}{\vec{\alpha}^{\Phi}F(t_1)\vec{\alpha}}\right)\cdot\varphi(t_1,t_2)\cdot\left(\mathrm{I} - \frac{F(t_2)\vec{\alpha}\vec{\alpha}^{\Phi}}{\vec{\alpha}^{\Phi}F(t_2)\vec{\alpha}}\right)^{\Phi}. \tag{44}$$

Корреляционная функция (44) является обобщенной характеристикой точности окончательной оценки вектора $\vec{\xi}$. Характеризовать точность вектора $\vec{\xi}$ по обобщенной дисперсии, вычисляемой как определитель матрицы (44) при $t_1 = t_2$ при линейной связи компонентов $\vec{\xi}(t)$ (см. (35)), бессмысленно, поскольку определитель $|R|$ всегда будет равен нулю. Это означает, что при заведомо линейной связи компонентов $\vec{\xi}(t)$ (35) матрица R (44) всегда вырождена. Действительно запишем матрицу (44) так:

$$R=<\begin{pmatrix} \xi_1^2 & \xi_1\xi_2 & \xi_1\xi_3 & \cdots & \xi_1\xi_m \\ \xi_2\xi_1 & \xi_2^2 & \xi_2\xi_3 & \cdots & \xi_2\xi_m \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi_m\xi_1 & \xi_m\xi_2 & \xi_m\xi_3 & \cdots & \xi_m^2 \end{pmatrix}> \tag{45}$$

и выразим, например, ξ_1 в первом столбце с помощью (35) через остальные компоненты:

$$\xi_1=\sum_{j=2}^{m}\beta_j\xi_j\ , \tag{46}$$

где константа «C» отсутствует, так как в (45) подразумевается центрирование по среднему $\beta_j={}^{\alpha_j}\!/_{\alpha_1}$. Получим

$$R=<\begin{pmatrix} \sum\limits_{j=2}^{m}\beta_j\xi_1\xi_j & \xi_1\xi_2 & \cdots & \xi_1\xi_m \\ \sum\limits_{j=2}^{m}\beta_j\xi_2\xi_j & \xi_2^2 & \cdots & \xi_2\xi_m \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum\limits_{j=2}^{m}\beta_j\xi_m\xi_j & \xi_m\xi_2 & \cdots & \xi_m^2 \end{pmatrix}>. \tag{47}$$

Видим, что в (47) первый столбец представляет собой линейную комбинацию остальных столбцов, откуда и следует вырожденность матрицы R [7].

Для такого случайного вектора $\vec{\xi}$ корреляционный эллипсоид вырождается в гиперповерхность (теряя одно измерение) и его объем, естественно, равен нулю. В таком случае точность оценок следует характеризовать диагональными элементами корреляционной матрицы R, представляющими собой дисперсию каждой из компонент окончательной оценки $\vec{\xi}$ в отдельности. Ввиду сложности выражения (44) для его расчета рекомендуется использовать численные методы. Однако для простейшего случая некоррелированных во времени и между собой двух компонентов вектора $\vec{\xi}$ ($m=2$) и равноточных измерениях по каждой из компонентов можно получить количественную оценку выигрыша в точности оценивания за счет использования априорной информации в виде уравнения связи компонентов (35). Для описанного случая

$$\varphi(t_1,t_2)=\varphi_0 I\delta(t_2-t_1)\,, \tag{48}$$

где $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\frac{N_1}{2} \cdot \alpha_1^2 = \frac{N_2}{2} \cdot \alpha_2^2$ — это означает равноточность.

Тогда

$$R = \varphi_0 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \\ -\frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha_1}{\alpha_2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^2 \delta(t_2 - t_1) = \varphi_0 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \\ -\frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha_1}{\alpha_2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \delta(t_2 - t_1). \quad (49)$$

Диагональные элементы в R/φ_0 равны $1/2$, что говорит об ожидаемом выигрыше в точности оценивания по дисперсии в 2 раза. Этот результат, в частности, согласуется с полученным ранее в [2] для совместного оценивания двух числовых параметров α и β.

Оценим выигрыш в точности по дисперсии при совокупном оценивании компонентов векторного процесса $\vec{\xi}(t)$. Предположение о равноточности и некоррелированности компонентов между собой и во времени полагаем действующим. Опуская в (44) функцию корреляции (48) и отождествляя моменты времени t_1 и t_2, имеем матрицу

$$G = ZZ^{\Phi} = \left(I - \frac{F\vec{\alpha}\vec{\alpha}^{\Phi}}{\vec{\alpha}^{\Phi}F\vec{\alpha}} \right) \cdot \left(I - \frac{F\vec{\alpha}\vec{\alpha}^{\Phi}}{\vec{\alpha}^{\Phi}F\vec{\alpha}} \right). \quad (50)$$

Матрица Z симметрична, поэтому знак транспонирования в (50) писать необязательно.

Вычисления элементов матрицы G дают:

$$G_{ij} = \sum_k Z_{ik} Z_{kj} = \sum_k \left(\delta_{ik} - \frac{F_{ii}\alpha_i\alpha_k}{\sum\limits_{i,j=1}^{m} F_{ij}\alpha_i\alpha_j} \right) \cdot \left(\delta_{kj} - \frac{F_{kk}\alpha_k\alpha_j}{\sum\limits_{i,j=1}^{m} F_{ij}\alpha_i\alpha_j} \right). \quad (51)$$

Нас интересуют только диагональные элементы матрицы G, поскольку именно они представляют собой коэффициенты уменьшения дисперсий ошибок оценивания соответствующих компонентов вектора $\vec{\xi}$. Отождествляя индексы i и j, из (51), получаем:

$$G_{ii} = 1 - \frac{F_{ii}\alpha_i^2}{\sum\limits_{K=1}^{m} F_{KK}\alpha_K^2}. \quad (52)$$

Теперь в (52) используем условие равноточности измерений

$$F_{ii}\alpha_i^2 = F_{KK}\alpha_K^2,\ \forall i, K \in \{1,2,.....,m\},$$

необходимое постольку, поскольку в общем анализе нет оснований различать оцениваемые компоненты по точности.

Формула (64) принимает вид:

$$G_{ii} = 1 - \frac{1}{m} = \frac{m-1}{m}. \tag{53}$$

Видим, что с увеличением числа совместно оцениваемых компонентов выигрыш в точности по дисперсии снижается от коэффициента $\frac{Й}{G} = 2$ (при $m = 2$) до $\frac{Й}{G} = Й$(при $m \to \infty$), когда выигрыша нет вообще. Физически это объясняется тем, что единственное уравнение связи компонентов (35) снижает размерность области локализации вектора $\vec{\xi}$ только на единицу. Если размерность $\vec{\xi}$ равна двум, то «свобода» вектора ограничивается в два раза. При достаточно большой размерности m снижение размерности области локализации $\vec{\xi}$ на единицу «ощущается» слабо и тем меньше, чем больше m. При бесконечном m уравнение связи практически ничего не уточняет относительно истинных значений составляющих оцениваемого вектора $\vec{\xi}$, и точности первичной и вторичной (с учетом уравнения связи) оценок не отличаются.

Выводы и практические рекомендации

1. Уравнения связи оцениваемых параметров, отражая физическую природу объекта, несут в себе информацию о возможных значениях этих параметров и, тем самым, ограничивает области их возможной локализации. Эту информацию можно использовать при совместной экспериментальной оценке параметров регистрации (характеристик) изучаемого объекта с целью повышения точности оценивания.

2. Способ учета априорной информации об оцениваемых параметрах в виде их связывающих уравнений состоит в том, что после получения первичных оценок в результате натурных измерений в качестве окончательных принимается такая совокупность параметров, которая, во-первых, удовлетворяет уравнениям связи и, во-вторых, наиболее близка к набору оценок, полученных в результате первичного оценивания. Понятие «близости» целесообразно определять введением квадратичной метрики в пространстве параметров путем задания квадрата нормы вектора в виде квадратичной формы с матрицей, равной обратной корреляционной матрице вектора оцениваемых параметров. При такой метризации пространства параметров их комплексная оценка будет обладать свойством наименьшего

среднего квадрата отклонения от истинного значения, а в случае нормальности ошибок будут являться оценкой максимального правдоподобия.

3. Использование уравнения связи при совместном независимом и равноточном условном оценивании m параметров позволяет уменьшить средний квадрат ошибки (дисперсию — для несмещенных оценок) в $\frac{m}{m-1}$ раз, то есть максимум в 2 раза, что достигается при оценивании двух параметров. Чем большее число параметров подлежит совместной оценке, тем меньше информации в себе несет уравнение связи и тем меньший выигрыш по среднему квадрату ошибки обеспечивает. В связи с этим в целях повышения точности оценивания «усложнять» процедуры получения вектора экспериментальных оценок путем использования разработанного алгоритма условного оценивания рекомендуется тогда, когда количество одновременно оцениваемых параметров невелико (например, α и β), либо следует искать дополнительные независимые уравнения связи, чтобы для большего числа оцениваемых величин и число связывающих уравнений было больше с тем, чтобы ожидать тот же эффект повышения точности, что и с малым набором измеряемых величин при малом числе уравнений связи.

4. Разработанный метод условного оценивания параметров по экспериментальным данным с учетом их связи в виде конечных уравнений универсален в том смысле, что не привязан к физическим свойствам конкретного объекта или явления, о параметрах которого идет речь. Поэтому описанный алгоритм условного оценивания может быть рекомендован к практическому использованию в любых областях естествознания, где возникает подобные задачи.

1. *Левин Б.Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. Т. 2. — М.: Сов. радио, 1975. — 392 с.

2. *Пількевич І.А.* Методика сумісного оцінювання декількох параметрів за результатами вимірів з урахуванням апріорних зв'язків між ними // Проблеми створення, випробування, застосування та експлуатації складних інформаційних систем: Зб. наук. пр. – Житомир: ЖВІРЕ, 2004. — Вип. 8. — С. 184–195.

3. *Ширман Я.Д., Манжос В.Н.* Теория и техника обработки радиолокационной информации на фоне помех. — М.: Радио и связь, 1981. — 416 с.

4. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1976. — 542 с.

5. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. — М.: Наука, 1969. — 424 с.

6. *Левин Б.Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. Т. 1. — М.: Сов. радио, 1974. — 552 с.

7. *Ефимов Н.В. Розендорн Э.Р.* Линейная алгебра и многомерная геометрия. — М.: Наука, 1974. — 544 с.