УДК 001.891.57; 004.415.2

М. В. Синьков, Ю. Є. Боярінова, Я. О. Каліновський,
Т. Г. Постнікова, Т. В. Синькова
Інститут проблем реєстрації інформації НАН України
вул. М. Шпака, 2, 03113 Київ, Україна

Алгоритмічно-програмний інструментарій аналітичних обчислень над гіперкомплексними числами в системі комп'ютерної математики MAPLE

Розглянуто розширення пакета процедур Maple для виконання символьних та чисельних операцій у гіперкомплексних числових системах. Визначено місце цього пакета в структурі системи комп'ютерної математики Maple. Представлено перелік процедур для виконання службових, алгебраїчних та нелінійних операцій над гіперкомплексними числами.

Ключові слова: *гіперкомплексна числова система, аналітичні обчислення, комп'ютерна математика, математичний пакет Maple, базис гіперкомплексної числової системи.*

Основою алгоритмічно-програмного інструментарію аналітичних обчислень при представлені даних у вигляді гіперкомплексних чисел у системі комп'ютерної математики MAPLE є теорія гіперкомплексних числових систем (ГЧС). Вона базується на роботах видатних вчених: раннього періоду — Гамільтона, Люша, пізнішого періоду — Кантора, Солодовнікова, Акушського, Юдицького та ін. [1–7].

При математичному моделюванні різних об'єктів та процесів у багатьох випадках досить ефективним є представлення даних у гіперкомплексній формі. Теорія та практика навігації й орієнтації [8, 9], криптографія [10–12], цифрова фільтрація [13–16], електротехніка [17, 18] — далеко не повний перелік використання гіперкомплексного представлення даних у прикладних науках. Також досить плідно це представлення використовується й у фундаментальних науках.

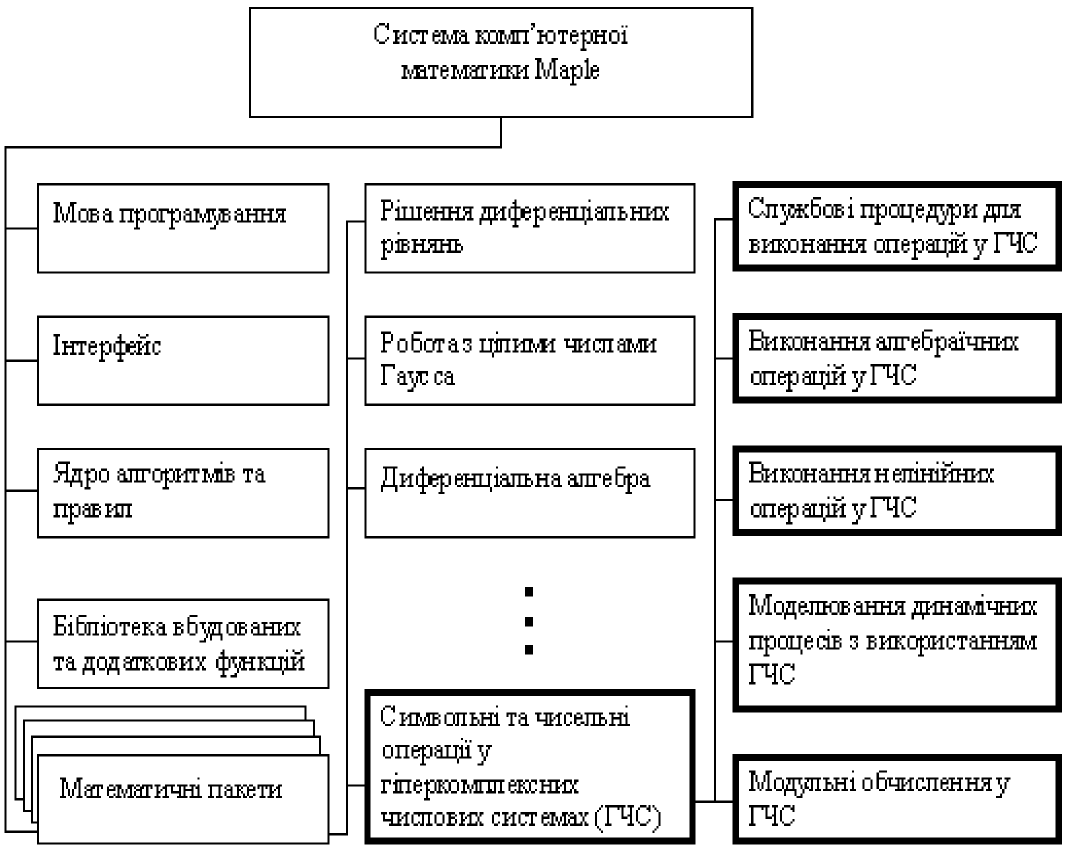
Дослідження складних математичних моделей пов'язано з великою кількістю громіздких аналітичних перетворень математичних виразів і потребує використання засобів комп'ютерної алгебри у вигляді інтегрованої системи символьної математики. Програмне забезпечення для застосування в аналітичних обчисленнях повинно являти собою повну систему, що включає в себе метод представлення нечислових даних спеціальної структури, мову, яка дозволяє маніпулювати з

© М. В. Синьков, Ю. Є. Боярінова, Я. О. Каліновський, Т. Г. Постнікова, Т. В. Синькова

ними, бібліотеку ефективних функцій для виконання необхідних базисних операцій.

Широкі можливості в цьому плані надає використання системи комп'ютерної математики Maple [19, 20]. Основою для роботи із символьними перетвореннями в Maple є ядро системи. Воно містить сотні базових функцій і алгоритмів символьних перетворень. Існує також основна бібліотека операторів, команд і функцій. Крім того, в Maple включені математичні пакети підпрограм для розв'язку задач лінійної та тензорної алгебри, Евклідової та аналітичної геометрії, теорії чисел, теорії вірогідності і математичної статистики, комбінаторики, теорії груп, інтегральних перетворень, чисельної апроксимації й лінійної оптимізації (симплекс метод) та багато інших задач.

Для побудови моделей з використанням гіперкомплексного представлення даних авторами статті розроблений пакет процедур для виконання символьних та чисельних операцій у гіперкомплексних числових системах. Місце цього пакета в структурі системи комп'ютерної математики Maple зображено на рисунку.



Пакет процедур для виконання символьних та чисельних операцій
у гіперкомплексних числових системах

Пакет процедур для виконання символьних та чисельних операцій у гіперкомплексних числових системах включає в себе:

— службові процедури для виконання символьних та чисельних операцій у гіперкомплексних числових системах;

— процедури для виконання алгебраїчних операцій у гіперкомплексних числових системах;

— процедури для виконання нелінійних операцій у гіперкомплексних числових системах;

— процедури моделювання динамічних процесів із застосуванням гіперкомплексних числових систем;

— процедури модульних обчислень у гіперкомплексних числових системах.

Треба також відмітити, що гіперкомплексне представлення даних при побудові чи дослідженні математичних моделей систем також може викликати деякі труднощі у зв'язку з багатомірністю гіперкомплексних чисел. Використання Maple дозволяє ефективно оперувати з багатомірними структурами даних, якими є гіперкомплексні числа. Система дозволяє робити зі списками такі операції як витяг елемента зі списку, підрахунок кількості елементів у списку, приналежність до списку, перетворення в інші структури, об'єднання списків, проведення деяких групових операцій.

Надалі будемо вважати, що гіперкомплексні числа задаються у вигляді :

$$A = a_1 E_1 + a_2 E_2 + ... + a_n E_n, \tag{1}$$

де E_i — елементи базису заданої гіперкомплексної числової системи; n — вимірність гіперкомплексної числової системи. Форму гіперкомплексного числа (1) будемо називати загальною. Для проведення операцій в аналітичному вигляді гіперкомплексні числа доцільно представляти у вигляді позиційних списків — списку коефіцієнтів і списку елементів базису заданої гіперкомплексної числової системи:

$$[a_1, a_2, ..., a_n], \tag{2}$$

$$[E_1, E_2, ..., E_n]. \tag{3}$$

Довжина цих списків n дорівнює розмірності гіперкомплексної системи, що використовується у дослідженні. Оскільки список елементів базису постійний, то в подальшому він не використовується.

У ряді випадків необхідно виконувати операцію відновлення загальної форми гіперкомплексного числа. Це можливо зробити простим підсумовуванням добутків відповідних елементів обох списків (2) та (3).

Для виконаннях цих та інших службових операцій у рамках даного пакета розроблений широкий вибір службових процедур:

— процедура представлення гіперкомплексного числа у вигляді позиційних списків елементів базису (3) заданої гіперкомплексної числової системи та її коефіцієнтів (2);

— процедура представлення гіперкомплексного числа у вигляді позиційного списку коефіцієнтів (2);

— процедура відтворення загальної форми (1) гіперкомплексного числа;

— процедура визначення розмірності гіперкомплексної числової системи (n) по таблиці множення гіперкомплексної числової системи, що була обрана дослідником;

— процедура вибору гіперкомплексної числової системи 2-, 3-, 4-го порядків; крім того досліднику надається можливість переглянути таблиці множення для гіперкомплексних числових систем 2-, 3-, 4-го порядків із переліку тих, що пропонує даний пакет процедур;

— процедура пошуку структурних констант ГЧС згідно з таблицею множення; добуток базисних елементів у загальному вигляді виражається через структурні константи гіперкомплексної числової системи:

$$E_i E_j = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{i\,j}^{k} E_k \,, \tag{4}$$

де $\gamma_{i\,j}$ — структурні константи даної гіперкомплексної числової системи;

— інформаційна процедура про ГЧС, яка дозволяє користувачеві отримати докладну інформацію про гіперкомплексні системи, що пропонує даний пакет: вид таблиці множення, одиничний елемент, дільники нуля;

— процедура обчислення гіперкомплексного одночлена, що складається з добутків базисних одиниць гіперкомплексної системи, яка дозволяє вираз виду $d \cdot E_1 \cdot E_2 ... E_n$, де d — дійсне число, перетворювати у гіперкомплексне число $d \cdot E_i$, де E_i — i-а базисна одиниця гіперкомплексної системи; порядок множення базисних одиниць відповідає закону множення обраної гіперкомплексної системи;

— процедури перевірки виконання властивостей комутативності, асоціативності та альтернативності заданої гіперкомплексної числової системи.

Алгебраїчні та нелінійні операції над гіперкомплексними числами відрізняються від операцій над дійсними числами. Тому в рамках розробленого пакета для виконання алгебраїчних та нелінійних операцій у гіперкомплексних числових системах були розроблені процедури, що надають можливість ефективно й зручно досліджувати складні математичні моделі, дані яких представлені у гіперкомплексній формі;

— процедури додавання та віднімання; якщо A, B — гіперкомплексні числа

$$A = \sum_{i=1}^{n} a_i E_i \,, \quad B = \sum_{i=1}^{n} b_i E_i \,, \tag{5}$$

тоді

$$A \pm B = \sum_{i=1}^{n} (a_i \pm b_i) E_i \,, \tag{6}$$

де n — вимірність гіперкомплексної системи;

— процедура множення, що здійснюється за правилом перемноження двох багаточленів з урахуванням закону композиції:

$$A \cdot B = \sum_{i=1}^{n} a_i E_i \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i E_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i b_j E_{i\,j} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \gamma_{i\,j}^{k} a_i b_j E_k \; ; \tag{7}$$

— процедура ділення гіперкомплексних чисел виконується множенням діленого на число, зворотне дільнику:

$$C = \frac{A}{B} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i E_i}{\sum_{j=1}^{n} b_j E_j} = \frac{A \cdot \overline{B}}{B \cdot \overline{B}} = A \cdot \overline{B} \, . \tag{8}$$

Ділення на дільники нуля та на число нуль неможливо;

— процедура знаходження норми гіперкомплексного числа; норма гіперкомплексного числа n-го порядку $A = \sum_{i=1}^{n} a_i E_i$ є дійсним числом і знаходиться за формулою:

$$N(A) = \left\| \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ij}^{k} \cdot a_i \right\| , \tag{9}$$

де γ_{ij}^{k} — структурні константи таблиці множення заданої ГЧС;

— процедура пошуку одиничного елемента гіперкомплексної числової системи; одиничний елемент гіперкомплексної числової системи — це таке гіперкомплексне число X, при множенні на яке будь-якого гіперкомплексного числа A виконується рівняння:

$$X \cdot A = A; \tag{10}$$

— процедури аналізу наявності та виду дільників нуля в гіперкомплексних числових системах. Дільник нуля — це таке гіперкомплексне число, норма якого дорівнює нулю:

$$N(A) = \left\| \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ij}^{k} \cdot a_i \right\| = 0. \tag{11}$$

Процедури дозволяють виконувати такі дії: визначити загальний вид дільників нуля гіперкомплексної числової системи; отримати відповідь на питання, чи є дане число в рамках заданої ГЧС дільником нуля; проводити візуальний аналіз вигляду дільників нуля для гіперкомплексних систем другого та третього порядків;

— процедура знаходження гіперкомплексного числа спряженого даному. Число $\overline{A} = \sum_{i=1}^{n} \overline{a}_i E_i$ є спряженим даному гіперкомплексному числу $A = \sum_{i=1}^{n} a_i E_i$, якщо $A \cdot \overline{A} = E$, де E — одиничний елемент обраної ГЧС;

— процедура визначення ізоморфності двох ГЧС. Процедура застосовує метод, що базується на використанні загального вигляду лінійних перетворень над базисом гіперкомплексної системи і побудові на цій основі системи дійсних нелінійних алгебраїчних рівнянь, які дозволяють визначити коефіцієнти при основних мнимих одиницях базисів гіперкомплексних систем, що досліджуються. Підстановка конкретних значень коефіцієнтів для двох ГЧС, що аналізуються на ізоморфізм, у систему загального виду дозволяє одержати систему більш простого вигляду. Якщо остання система може бути розв'язана в дійсних числах, то дані ГЧС ізоморфні;

— процедура обчислення визначника матриці, елементами якої є гіперкомплексні числа:

$$C = \det \begin{vmatrix} a_i E_i + \ldots + a_j E_j & \cdots & a_l E_l + \ldots + a_m E_m \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_k E_k + \ldots + a_s E_s & \cdots & a_d E_d + \ldots + a_r E_r \end{vmatrix}, \qquad (12)$$

де $a_i, a_j, a_l, a_m, a_k, a_s, a_d, a_r$ — дійсні числа; $E_i, E_j, E_l, E_m, E_k, E_s, E_d, E_r$ — базисні одиниці гіперкомплексної системи;

— процедура обчислення степеневої функції A^n, де основа ступеня A — гіперкомплексне число, а показник степеня n — довільне дійсне число (від'ємне, додатне чи нульове).

Розроблений алгоритмічно-програмний інструментарій аналітичних обчислень над гіперкомплексними числами в системі комп'ютерної математики MAPLE дозволяє підвищити ефективність побудови математичних моделей різних об'єктів та процесів за допомогою гіперкомплексних числових систем. Цей інструментарій буде корисним спеціалістам, які використовують у своїй роботі апарат гіперкомплексних чисел.

1. *Синьков М.В.* О гиперкомплексных числовых системах и возможностях их применения в моделировании // Электрон. моделирование. — 1986. — Т.8, № 4. — С. 106–111.

2. *Синьков М.В., Губарени Н.М.* Непозиционное представление в многомерных числовых системах. — К.: Наук. думка, 1979. — 136 с.

3. *Hamilton W.R.* On Quaternions or on new system of emaginaries in Algebra — Phill. Mag., Jully, 1844. — 40 p.

4. *Люш В.В.* Теория универсальніх чисел и приложения ее к решению алгебраических уравнений // Труды II Всесоюзного математического съезда. — М.: Изд-во АН СССР, 1936. — Т. 2. — С. 49–56.

5. *Кантор И.Л., Солодовников А.С.* Гиперкомплексные числа. — М.: Наука, 1973. — 144 с.

6. *Акушский И., Юдицкий Д.* Машинная арифметика в остаточных классах. — М.: Сов. радио — 1968. — 440 с.

7. *Курочкин Ю.А.* Теория векторов трехмерных пространств постоянной кривизны и ее приложения в релятивистской кинематике: Препр. / АН БССР, Ин-т физики. — Минск: № 291. — 36 с.

8. *Будьонний М.Ф., Каліновський Я.О., Панов А.П., Петренко А.І., Постнікова Т.Г., Синьков М.В., Синькова Т.В.* Про автоматизоване проектування системи програмно-апаратних засобів на базі гіперкомплексних чисел для задач орієнтації твердого тіла. Ч. 1 // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2001. — Т. 3, № 4. — С. 73–83.

9. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. — М.: Наука,1973. — 319 с.

10. *Синьков М.В.,. Калиновский Я.А., Синькова Т.В., Бояринова Ю.Е.* Новые применения гиперкомплексных квадриплексных чисел. Ч. 1 // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2003. — Т. 5, № 2. — С. 34–39.

11. *Синьков М.В., Бояринова Ю.Е., Калиновский Я.А., Трубников П.В.* Развитие задачи разделения секрета // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2003. — Т. 5, № 4. —- С. 90–96.

12. *Бояринова Ю.Е., Трубников П.В.* Расширение задачи разделения секрета для случая использования двойных чисел // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2004. — Т. 6, № 1. — С. 47–52.

13. *Синьков М.В., Калиновский Я.А., Синькова Т.В., Трубников П.В., Бояринова Ю.Е.* Новые применения гиперкомплексных квадриплексных чисел. Ч. 2 // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2003. — Т. 5, № 3. — С. 4–7.

14. *Toyoshima H.*. Computationally Efficient Implementation of Hypercomplex Digital Filters // IEICE Trans. Fundamentals. — 2002, Aug. — N E85-A.8. — P. 1870–1876.

15. *Toyoshima H. and Higuchi S.* Design of Hypercomplex All-Pass Filters to Realize Complex Transfer Functions // Proc. Second Int. Conf. Information, Communucations and Signal Processing, — 1999, Dec. — N 2B3.4. — P. 1–5.

16. *H. Toyoshima.* Computationally Efficient Bicomplex Multipliers for Digital Signal Processing // IEICE Trans. Inf. & Syst. — 1998, Feb. — N E81-D.2. — P. 236–238.

17. *Веников В.А., Щербина Ю.В., Клипков С.И.* Анализ системных каскадных аварий с использованием гиперкомплексных обмощений // Известия Академии наук СССР. Энергетика и транспорт. — 1988. — № 1. — С. 10–14.

18. *Waser A.*. Quaternions in Electrodynamics. On-line: http://www.aw-verlag.ch-2000.

19. *Аладьев В, Шишаков М.* Автоматизированное рабочее место. Математический пакет Maple V. — М.: Лаборатория Базовых Знаний. — 2000. — 572 с.

20. *Дьяконов В.П.* Maple 9 в математике, физике и образовании. — М.: Солон, 2004. — 688 с.

Надійшла до редакції 01.06.2005