УДК 519.68; 620.179.15; 681.3

М. В. Синьков, Я. А. Калиновский
Институт проблем регистрации информации НАН Украины
ул. Н. Шпака, 2, 03113 Киев, Украина

Определение оператора поворота вектора в квадриплексном пространстве

Рассмотрен один метод определения оператора поворота вектора в квадриплексном пространстве до совмещения с направлением, заданным другим вектором. Метод базируется на изоморфизме квадриплексных и бикомплексных чисел.

Ключевые слова: *квадриплексное пространство, бикомплексное пространство, изоморфизм, поворот.*

Постановка проблемы

В статье продолжены исследования, начатые в работе [1], которые связаны со свойствами изоморфизма квадриплексных и бикомплексных чисел. Исследуется метод построения оператора поворота вектора в квадриплексном пространстве, то есть построения такого квадриплексного вектора, который, будучи умноженным на данный квадриплексный вектор, переведет его в заданное направление без изменения нормы, а именно путем чистого поворота.

Анализ последних достижений и публикаций

Исследованиям свойств и применений квадриплексных и бикомплексных чисел и пространств посвящены многочисленные работы.

В трудах [2, 3] квадриплексные числа рассматриваются как продукт коммутативного удвоения системы комплексных чисел с помощью процедуры Грассмана-Клиффорда. Изучаются арифметические и алгебраические свойства квадриплексных чисел, а также их непозиционные представления.

Для квадриплексных чисел построены представления таких нелинейных функций, как экспонента, логарифм, тригонометрических и гиперболических функций, обратных функций [4, 5]. В работах [6, 7] рассмотрены некоторые геометрические интерпретации квадриплексных пространств, предназначенные для конкретных физических задач.

Квадриплексные числа нашли эффективное применение и в такой важной области, как криптография [8, 9].

В работах [9–18] квадриплексные числа применяются для синтеза цифровых фильтров, обладающих повышенным быстродействием. Использование квадриплексных чисел позволяет снизить порядок фильтра при сохранении частотных характеристик.

Весьма перспективным представляется использование свойств изоморфизма систем квадриплексных и бикомплексных чисел. В работе [19] показано, как с помощью перехода от квадриплексных чисел к бикомплексным можно существенно повысить производительность вычислений.

Цель статьи

Целью статьи является разработка метода решения следующей задачи. Пусть в квадриплексном пространстве заданы векторы *A* и *C*. Требуется найти такой квадриплексный вектор *D*, что направления векторов *D**A* и *C* будут совпадать, а нормы векторов *D**A* и *A* будут равными:

$$\|D * A\| = \|A\|. \tag{1}$$

Это означает, что вектор *A* просто поворачивается до совмещения с направлением вектора *C*. Таким образом, вектор *D* должен быть нормированным.

Результаты исследований

В дальнейшем квадриплексное пространство будем обозначать через *K*, а бикомплексное через *B*. Пусть в квадриплексном пространстве с базисом $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ заданы векторы $A, C \in K$:

$$A_K = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4, \tag{2}$$

$$C_K = c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3 + c_4 e_4. \tag{3}$$

Индекс *K* в (2) и (3) означает, что вектора заданы в квадриплексном пространстве.

Перейдем в бикомплексное пространство *B* с базисом $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$. Как показано в [1], векторы *A* и *C* примут вид:

$$A_B = (a_1 - a_4)E_1 + (-a_2 - a_3)E_2 + (a_1 + a_4)E_3 + (a_2 - a_3)E_4 \in B, \tag{4}$$

$$C_B = (c_1 - c_4)E_1 + (-c_2 - c_3)E_2 + (c_1 + c_4)E_3 + (c_2 - c_3)E_4 \in B. \tag{5}$$

Представим A_B и C_B в экспоненциальной форме, как это показано в [1]:

$$A_B = \rho_{1A} e^{\varphi_1 E_2} + \rho_{2A} e^{\varphi_2 E_4}, \tag{6}$$

где

$$e^{\varphi_1 E_2} = \cos\varphi_1 E_1 + \sin\varphi_1 E_2, \tag{7}$$

$$e^{\varphi_2 E_4} = \cos\varphi_2 E_3 + \sin\varphi_2 E_4, \tag{8}$$

$$\rho_{1,2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{4} a_i^2 \pm 2\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix}}, \tag{9}$$

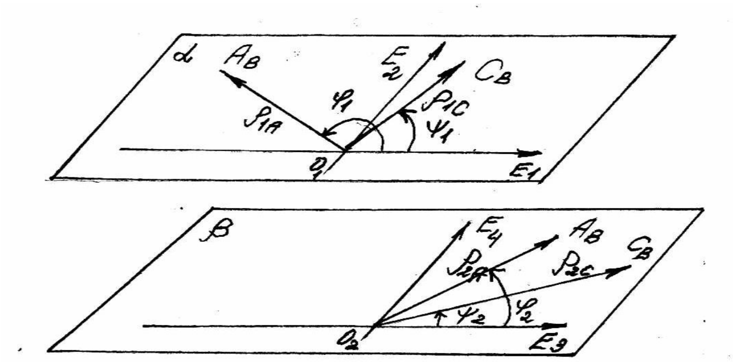
$$\varphi_{1,2} = \operatorname{arctg}\frac{a_2 \pm a_3}{a_4 \mp a_1}. \tag{10}$$

Аналогично представим вектор C_B:

$$C_B = \rho_{1C} e^{\psi_1 E_2} + \rho_{2C} e^{\psi_2 E_4}, \tag{11}$$

где все компоненты определяются по формулам (7)–(10).

Рассмотрим геометрическую интерпретацию бикомплексного пространства и векторов A_B и C_B. Как известно, бикомплексное пространство представляет собой совокупность двух независимых комплексных плоскостей α и β, на которых установлены независимые системы координат (см. рис.).



Геометрическая интерпретация бикомплексного пространства

Здесь каждый бикомплексный вектор изображается парой комплексных векторов с модулями ρ_1 и ρ_2 с соответствующими индексами и аргументами φ_1 и φ_2 (соответственно ψ_1 и ψ_2).

Для того, чтобы совместить бикомплексный вектор A_B с направлением бикомплексного вектора C_B, необходимо его комплексные компоненты повернуть на углы $\varphi_1 - \psi_1$ и $\varphi_2 - \psi_2$ соответственно. Если бы такая задача была только для комплексной плоскости, то необходимо было бы исходный вектор умножить на оператор поворота $e^{j(\psi_1-\varphi_1)}$.

В бикомплексном же пространстве такой оператор примет вид:

$$D_B = e^{E_2(\psi_1-\varphi_1)} + e^{E_4(\psi_2-\varphi_2)} . \qquad (12)$$

Тогда:

$$\begin{aligned} D_B * A_B = D_B * A_B = (\rho_{1A}e^{\varphi_1 E_2} + \rho_{2A}e^{\varphi_2 E_4}) * (e^{E_2(\psi_1-\varphi_1)} + e^{E_4(\psi_2-\varphi_2)}) = \\ = \rho_{1A}e^{\varphi_1 E_2} + \rho_{2A}e^{\varphi_2 E_4}. \end{aligned} \qquad (13)$$

Значит вектор A_B примет направление вектора C_B, а его норма не изменится, так как $\|D_B\| = 1$.

Поэтому:

$$\|D_B * A_B\| = \|D_B * A_B\| = 1 * \|A_B\| = \|A_B\|. \qquad (14)$$

С помощью выражений (6) и (7) представим оператор D_B покомпонентно:

$$D_B = E_1\cos(\psi_1-\varphi_1) + E_2\sin(\psi_1-\varphi_1) + E_3\cos(\psi_2-\varphi_2) + E_4\sin(\psi_2-\varphi_2). \qquad (15)$$

Теперь делаем обратный переход из бикомплексного пространства в квадриплексное путем преобразования базиса $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ в базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ по формулам, приведенным в [1]:

$$\begin{aligned} D_K = \frac{1}{2}[(\cos\Delta_1 + \cos\Delta_2)e_1 + (-\sin\Delta_1 + \sin\Delta_2)e_2 + \\ + (-\sin\Delta_1 - \sin\Delta_2)e_3 + (-\cos\Delta_1 + \cos\Delta_2)e_4]. \end{aligned} \qquad (16)$$

Здесь для краткости введены следующие обозначения:

$$\Delta_i = \psi_i - \varphi_i,\ i = 1,2. \qquad (17)$$

Нас интересует выражение оператора D_K через компоненты квадриплексных векторов A_K и C_K. Для его вывода необходимо подставить в (16) выражения (10) и (17) и произвести необходимые преобразования. Так как эти преобразования весьма громоздки, то они проводились с помощью системы аналитических вычислений Maple7 [20].

```
> restart;
>assume(a[1],real):assume(a[2],real):assume(a[3],real):assume(a[4],real:
```

```
>assume(b[],real):assume(b[2],real):assume(b[3],real):assume(b[4],real):
> phi[1]:=-arctan((a[2]+a[3])/(a[1]-a[4]));
> psi[1]:=-arctan((b[2]+b[3])/(b[1]-b[4]));
```

$$\psi_1 := -\arctan\left(\frac{b{\sim}_2 + b{\sim}_3}{b{\sim}_1 - b{\sim}_4}\right)$$

```
>phi[2]:=arctan((a[2]-a[3])/(a[1]+a[4]));
```

$$\phi_2 := \arctan\left(\frac{a{\sim}_2 - a{\sim}_3}{a{\sim}_1 + a{\sim}_4}\right)$$

```
>psi[2]:=arctan((b[2]-b[3])/(b[1]+b[4]));
```

$$\psi_2 := \arctan\left(\frac{b{\sim}_2 - b{\sim}_3}{b{\sim}_1 + b{\sim}_4}\right)$$

```
>Delta[1]:=psi[1]-phi[1];
```

$$\Delta_1 := -\arctan\left(\frac{b{\sim}_2 + b{\sim}_3}{b{\sim}_1 - b{\sim}_4}\right) + \arctan\left(\frac{a{\sim}_2 + a{\sim}_3}{a{\sim}_1 - a{\sim}_4}\right)$$

```
>Delta[2]:=psi[2]-phi[2];
```

$$\Delta_2 := \arctan\left(\frac{b{\sim}_2 - b{\sim}_3}{b{\sim}_1 + b{\sim}_4}\right) - \arctan\left(\frac{a{\sim}_2 - a{\sim}_3}{a{\sim}_1 + a{\sim}_4}\right)$$

```
>Dk[1]:=simplify(expand(cos(Delta[1])+cos(Delta[2])),sqrt,symbolic);
```

$$\begin{aligned}
&D_{K1} = ((a_1c_1 - a_1c_4 - a_4c_1 + a_4c_4 + a_2c_2 + a_3c_2 + a_2c_3 + a_3c_3)*\\
&*\sqrt{(a_1+a_4)^2 + (a_2-a_3)^2)((c_1+c_4)^2 + (c_2-c_3)^2} +\\
&+(a_1c_1 + a_1c_4 + a_4c_1 + a_4c_4 + a_2c_2 - a_3c_2 - a_2c_3 + a_3c_3)*\\
&*(\sqrt{a_1-a_4)^2 + (a_2+a_3)^2)((c_1-c_4)^2 + (c_2+c_3)^2})/\\
&/(\sqrt{(a_1+a_4)^2 + (a_2-a_3)^2)((c_1+c_4)^2 + (c_2-c_3)^2}*\\
&*\sqrt{a_1-a_4)^2 + (a_2+a_3)^2)((c_1-c_4)^2 + (c_2+c_3)^2}).
\end{aligned}$$

Как видно из этого фрагмента, под радикалами — модули бикомплексных векторов A_B и C_B в соответствии с (9). Такие же выражения будут и в формулах для трех остальных компонент оператора D_K. Произведя преобразования и введя обозначения:

$$\begin{aligned}
(a_1 \mp a_4)(b_1 \mp b_4) + (a_2 \pm a_3)(b_2 \pm b_3) = S_{1,2},\\
(a_1 \mp a_4)(b_1 - b_4) - (a_2 \pm a_3)(b_2 \mp b_3) = S_{3,4},
\end{aligned} \tag{18}$$

получим компактные выражения для компонентов оператора поворота:

$$D_K : D_{K1,4} = \frac{S_1}{\rho_{1A}\rho_{1C}} \pm \frac{S_2}{\rho_{2A}\rho_{2C}}, \tag{19}$$

$$D_{K2,3} = \frac{S_3}{\rho_{1A}\rho_{1C}} \pm \frac{S_4}{\rho_{2A}\rho_{2C}}. \tag{20}$$

Полное выражение для оператора поворота:

$$D_K = \sum_{i=1}^{4} D_{Ki} e_i. \tag{21}$$

Используя проведенные вычисления, можно получить условия перпендикулярности векторов A_K и C_K. В бикомплексном пространстве условие перпендикулярности этих векторов имеет вид:

$$\begin{aligned} \psi_1 - \varphi_1 &= \frac{\pi}{2}, \\ \psi_2 - \varphi_2 &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \tag{22}$$

Dзяв тангенсы от обеих частей уравнений системы (22) и выполнив необходимые преобразования (также с помощью системы Maple7), получим необходимые и достаточные условия перпендикулярности квадриплексных векторов A_K и C_K:

$$\begin{aligned} (a_1 - a_2 - a_3 - a_4)(c_1 - c_4) + (a_1 + a_2 + a_3 - a_4)(c_2 + c_3) = 0, \\ (a_1 + a_2 - a_3 + a_4)(c_1 + c_4) - (a_1 - a_2 + a_3 + a_4)(c_2 - c_3) = 0. \end{aligned} \tag{23}$$

Выводы

В работе показана возможность определения оператора поворота вектора в квадриплексном пространстве, что позволяет решать задачи моделирования движения в этом пространстве. Задача решается с помощью изоморфного перехода из квадриплексного в бикомплексное пространство, где существуют прямые аналогии объектов эвклидового пространства. Такой подход позволяет эффективно решать целый ряд задач, как, например, повышение эффективности вычислений, моделирование геометрических объектов и их движений, обработка сигналов и др.

1. *Калиновский Я.А.* Исследование свойств изоморфизма квадриплексных и бикомплексных числовых систем // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2003.— Т. 5, №1. — С. 69–73.

2. *Синьков М.В., Губарени Н.М.* Непозиционные представления в многомерных числовых системах. — К.: Наук. думка., 1979. — 138 с.

3. *Davenport C.* Commutative Hypercomplex Mathematics. On line: http://home.usit.net/~cmdaven/hyprcplx.htm. 2000.

4. *Синьков М.В., Калиновский Я.А., Чапор А.А., Синькова Т.В.* О повышении производительности вычислений в некоторых классах гиперкомплексных числовых систем // Электрон. моделирование. — 2000. — Т. 22, № 6. — С. 13–18.

5. *Синьков М.В., Калиновский Я.А, Роенко Н.В.* Методы построения нелинейностей в расширениях комплексных чисел // Кибернетика и систем. анализ. — 1996. — № 4. — С. 178–181.

6. *Елисеев В.И.* Введение в методы теории функций пространственного комплексного переменного. — М., 2002. — 458 с. On line: http://www.maths.ru

7. *Silviu Olariu.* Complex Numbers in *n* Dimensions. On line: http://arXiv.org/pdf/math.CV/0011044.2000.

8. *Stay M.* Hypercomplex Numbers and RSA. On line: http://www.xaim.com/staym/hypercomplex-rsa.2002.

9. *Синьков М. В., Калиновский Я. А., Синькова Т. В., Бояринова Ю.Е.* Новые применения гиперкомплексных квадриплексных чисел. Ч. 1 // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2003. — Т. 5, № 2. — С. 34–39 .

10. *Синьков М.В., Калиновский Я.А., Синькова Т.В.* Повышение эффективности цифровых фильтров с помощью гиперкомплексного представления информации: Сб. научн. тр. 8-й Междунар. науч. конф. «Теория и техника передачи, приема и обработки информации» ИИИСТ-2002. — Харьков, 2002. — С. 503–504.

11. *Синьков М. В., Калиновский Я. А., Синькова Т. В., Бояринова Ю.Е.* Новые применения гиперкомплексных квадриплексных чисел. Ч. 2 // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2003. — Т. 5, № 3. — С. 4–7.

12. *Toyoshima H., Higuchi S.* Design of Hypercomplex All-Pass Filters to Realize Complex Transfer Functions // Proc. Second International Conf. Information, Communications and Signal Processing. — 1999, Dec. — **2B3.4**. — P. 1–5.

13. P*etrovsky A., Parfieniuc M., Omieljanovich M.* Computationally Efficient Hypercomplex Filter Based on Matrix-by-Vector Multiplier // IEEE Poland Section the Scientific Workshop Signal Processing-2001. — Poznan. — 2001. — P. 7–12.

14. *Toyoshima H.* Computationally Efficient Implementation of Hypercomplex Digital Filters // Proc. International Conf. Acoustics, Speech, and Signal Processing. — 1998, May. — Vol. 3. — P. 1761–1764.

15. *Toyoshima H.* Computationally Efficient Bicomplex Multipliers for Digital Signal Processing // IEICE Trans. Inf. & Syst. — 1998, Feb. — **E81-D**, N 2 — P. 236–238.

16. *Toyoshima H.* Complex IIR Digital Filters Composed of Hypercomplex All-Pass Filters // Proc. 1995 IEEE Singapore Int. Conf. Signal Processing, Circuits & Systems. — 1995, July. — P. 178–183.

17. *Toyoshima H.* Realization of Complex Transfer Functions Using Hypercomplex Digital Filters // Proc. International Symp. Information Theory and Its Applications. — 1994, Nov. — P. 293–298

18. *Mizukami K., Toyoshima H. and Takahashi S.* A Residue Number System for The Hypercomplex Arithmetic // Proc. Joint Technical Conference on Circuits/Systems, Computers and Communications. — 1992. — P. 163–167.

19. *Синьков М.В., Калиновский Я.А., Чапор А.А., Синькова Т.В.* О повышении производительности вычислений в некоторых классах гиперкомплексных числовых систем // Электрон. моделирование. — 2000. — Т.22, № 6. — С. 13–18.

20. *Прохоров Г., Колбеев В., Желнов К., Леденев М.* // Математический пакет MapleV Release4: Руководство пользователя. On line: http://www.exponenta.ru/soft/maple/kaluga/1.asp.2003

Поступила в редакцию 08.12.2004