

УДК 532.593

## ДВУМЕРНЫЕ МОДЕЛИ ПЛАНОВОЙ ТРАНСФОРМАЦИИ ВОЛН В ЖИДКОСТИ ПЕРЕМЕННОЙ ГЛУБИНЫ

В. В. ЯКОВЛЕВ

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

Получено 21.06.2000

На основе галеркинской процедуры исключения "неволновой" координаты разработана методика построения квазитрехмерных моделей трансформации волн в жидкости конечной переменной глубины. С ее помощью исходная трехмерная линейная задача сведена к решению системы  $N$  двумерных в плане дифференциальных уравнений в частных производных. В частном случае  $N = 1$  получены уравнения трансформации волн для малых и достаточно больших уклонов дна, выведенные ранее Беркгофом и автором методом осреднения по глубине. Показано, что введение весовой функции в процедуру Галеркина позволяет значительно улучшить степень приближения упрощенной модели к физически обоснованным результатам.

На основі процедури Галеркіна по виключенню "нехвильової" координати розроблена методика побудови квазітрехвимірних моделей трансформації хвиль в рідині обмеженої змінної глибини. З її допомогою загальна трьохвимірна лінійна задача зведена до розв'язку системи  $N$  двовимірних в плані диференціальних рівнянь в частинних похідних. В окремому випадку  $N = 1$  отримано рівняння трансформації хвиль для малих та досить великих нахилів дна, які були раніше отримані Беркгофом та автором методом осереднення по глибині. Показано, що введення вагової функції в процедуру Галеркіна надає змогу значно покращити ступінь наближення спрощеної моделі до фізично обґрунтованих результатів.

On the basis of the Galerkin procedure of the non-wave coordinate elimination the technique of the construction of quasi-three-dimensional models of wave transformation for the fluid of the finite variable depth is developed. Using the technique the initial three-dimensional linear problem is reduced to the solving of the system of  $N$  two-dimensional in plan partial equations. Specifically for  $N = 1$  the wave transformation equations for small and rather large bottom gradients were obtained; previously they were deduced by Berkhoff and the author using the depth-averaging method. It is shown that the introduction of the weight function into the Galerkin procedure permits to improve reasonably the range of approximation of the simplified model to the physically valid results.

### ВВЕДЕНИЕ

При распространении поверхностных волн над донной поверхностью со сложным рельефом или при наличии на этой поверхности локальных неоднородностей типа выступов, впадин, каналов или валов сложного поперечного сечения имеет место существенное переформирование структуры волнового поля. Численное решение этого класса задач в общей трехмерной линейной постановке требует очень больших вычислительных затрат и не всегда может быть доведено до конкретных результатов в силу неизбежной погрешности, связанной с большим объемом вычислений.

В связи с этим наметились три подхода к приближенному решению этих задач.

Первый – основанный на асимптотическом разложении решения задачи по степеням малого параметра, характеризующего отношение размеров неоднородности к длине набегающей волны [1–3], – так называемая длинноволновая асимптотика.

Второй основан на методе параболической аппроксимации, фактически сводящий исходную задачу трансформации волн на неоднородностях рельефа донной поверхности при медленном изменении глубины к рефракционной задаче [4–6], т.е. ко-

ротковолновая асимптотика.

Третий подход основан на сведении исходной трехмерной задачи трансформации волн в жидкости конечной глубины к некоторому двумерному уравнению, при котором не накладываются ограничения на характерный размер неоднородности. В рамках этого подхода в работе [7] с помощью осреднения по глубине исходной трехмерной задачи было получено уравнение, описывающее трансформацию волн в жидкости конечной переменной глубины для достаточно малых уклонов дна. В дальнейшем это уравнение было обобщено на нестационарный случай [8] и учтены дополнительные члены, описывающие влияние уклона дна [9].

В работе [10] также методом осреднения по глубине уравнение Беркгофа было обобщено на случай достаточно больших уклонов дна и установлены пределы его применимости. Позднее было показано, что выведенное уравнение достаточно хорошо описывает переформирование структуры волнового поля при наличии донных неоднородностей, характерные размеры которых сопоставимы с длиной набегающих на них волн, а уклоны дна близки к единице [11].

В настоящей работе оба полученных ранее в работах [7,10] уравнения выводятся с помощью более

общей галеркинской процедуры исключения "неволновой" координаты, суть которой достаточно полно изложена в [12]. Кратко она состоит в следующем.

Пусть неизвестная функция  $u(x, y, z)$  удовлетворяет в некоторой области  $\Omega$  линейному неоднородному уравнению

$$Lu - f = 0 \quad (1)$$

и некоторым однородным краевым условиями. Выберем бесконечную последовательность координатных функций  $Z_i(x, y, z)$ , зависящих, в общем случае, не только от "неволновой" координаты и достаточное число раз (в соответствии с постановкой задачи) непрерывно дифференцируемых в замкнутой области  $\bar{\Omega} = \Omega + S$ .

Рассмотрим функцию

$$u_N(x, y, z) = \sum_{i=0}^N \psi_i(x, y) Z_i(x, y, z). \quad (2)$$

По методу Галеркина коэффициенты  $\psi_i$  определяются из требования, чтобы левая часть уравнения (1) стала после подстановки в нее  $u_N$  вместо  $u$  ортогональной к функциям  $Z_0, \dots, Z_N$  [13].

Тем самым мы получим линейную систему уравнений для конечного числа функций  $\psi_i$ :

$$\begin{aligned} \langle Z_j, \sum_{i=0}^N L[\psi_i(x, y) Z_i(x, y, z)] \rangle &= \\ &= \langle Z_j, f \rangle, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\langle \varphi, \psi \rangle$  означает скалярное произведение функций.

Как отмечается в [12], выбор  $N$  в рамках галеркинской процедуры не может быть произведен. Однако при удачном подборе координатных функций  $Z_i$  и весовой функции  $\rho$  следует ожидать, что уже при малых значениях  $N$  полученные уравнения будут достаточно хорошо описывать переформирование структуры волнового поля.

## 1. СЛУЧАЙ МАЛЫХ УКЛОНОВ ДНА

Рассмотрим теперь применение галеркинской процедуры для исключения "неволновой" координаты в линейной задаче трансформации гармонических поверхностных волн в жидкости конечной переменной глубины  $H(x, y)$ .

Исходные уравнения данной задачи имеют вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \quad (4)$$

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\omega^2}{g} \varphi \right)_{z=0} = 0, \quad (5)$$

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \vec{\nabla} \varphi \cdot \vec{\nabla} H \right)_{z=-H(x, y)} = 0. \quad (6)$$

Введем безразмерные переменные

$$(x^*, y^*, z^*, H^*) = (x, y, z, H) / \lambda_0,$$

$$\varphi^* = \varphi \omega / \lambda_0 g, \quad \lambda_0 = g / \omega^2.$$

Предположим сначала, что градиенты глубины являются малыми [7], т.е.

$$\vec{\nabla} H = \varepsilon \vec{\nabla}^* H^*, \quad \varepsilon = \gamma / \beta, \quad \beta = H_0 / \lambda_0,$$

где  $H_0$  – средняя глубина жидкости;  $\gamma$  – средний уклон дна на расстоянии  $H_0$ ;  $\lambda_0$  – характерная длина на волны на глубокой воде.

При таком обезразмеривании система уравнений (4)–(6) записывается следующим образом (звездочки в дальнейшем опускаем):

$$\Delta \varphi = 0, \quad (7)$$

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \varphi \right)_{z=0} = 0, \quad (8)$$

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \varepsilon \vec{\nabla} \varphi \cdot \vec{\nabla} H \right)_{z=-H(x, y)} = 0. \quad (9)$$

В [13] показано, что для уравнения Лапласа условия типа (8)–(9) являются естественными, и мы можем применить процедуру Галеркина, не подчиняя, в принципе, координатные функции никаким краевым условиям.

В качестве координатных функций выберем функции

$$Z_n = \frac{\text{chk}(z + H)}{\text{chk}H} z^{2n}, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad (10)$$

достаточное число раз непрерывно дифференцируемые и удовлетворяющие граничному условию на свободной поверхности жидкости. В выражении (10)  $k$  – действительный положительный корень безразмерного дисперсионного уравнения  $k \text{th}kH = 1$ .

Введем скалярное произведение

$$\langle f, g \rangle = \int_{-H(x, y)}^0 \rho f g dz, \quad (11)$$

где  $\rho = \rho(x, y, z)$  – некоторая весовая функция.

Пусть  $\rho \equiv 1$ , тогда из уравнения (3) с учетом (7) и (11) получим

$$\int_{-H(x,y)}^0 Z_j \sum_{i=0}^N \left[ Z_i \nabla^2 \psi_i + \psi_i \nabla^2 Z_i + 2\vec{\nabla} \psi_i \cdot \vec{\nabla} Z_i + \psi_i \frac{\partial^2 Z_i}{\partial z^2} \right] dz = 0. \quad (12)$$

В выражении (12) и далее оператор  $\vec{\nabla}$  действует только в горизонтальной плоскости  $(x, y)$ . Граничные условия (8)–(9) с учетом (10) представляются следующим образом:

$$\sum_{i=0}^N \varphi_i \left( \frac{\partial Z_i}{\partial z} - Z_i \right)_{z=0} = 0, \quad (13)$$

$$\sum_{i=0}^N \left\{ \psi_i \frac{\partial Z_i}{\partial z} + \varepsilon \left[ \psi_i (\vec{\nabla} Z_i \cdot \vec{\nabla} H) + Z_i (\vec{\nabla} \psi_i \cdot \vec{\nabla} H) \right] \right\}_{z=-H(x,y)} = 0, \quad (14)$$

где

$$\vec{\nabla} Z_i = \varepsilon \frac{\partial Z_i}{\partial H} \vec{\nabla} H; \quad \nabla^2 Z_i = \varepsilon^2 \left[ \frac{\partial^2 Z_i}{\partial H^2} (\vec{\nabla} H \cdot \vec{\nabla} H) + \frac{\partial Z_i}{\partial H} \nabla^2 H \right]. \quad (15)$$

Уравнение (12) с учетом (15) представим следующим образом:

$$\sum_{i=0}^N \left\{ \int_{-H(x,y)}^0 \left[ Z_j Z_i \nabla^2 \psi_i + 2\varepsilon Z_j \frac{\partial Z_i}{\partial H} (\vec{\nabla} \psi_i \cdot \vec{\nabla} H) + \psi_i Z_j \varepsilon^2 \left( \frac{\partial^2 Z_i}{\partial H^2} (\vec{\nabla} H \cdot \vec{\nabla} H) + \frac{\partial Z_i}{\partial H} \nabla^2 H \right) \right] dz + \int_{-H(x,y)}^0 \psi_i Z_j \frac{\partial^2 Z_i}{\partial z^2} dz \right\}. \quad (16)$$

Второй интеграл в выражении (16) с помощью формулы Грина запишем в виде

$$\begin{aligned} & \psi_i \int_{-H(x,y)}^0 Z_j \frac{\partial^2 Z_i}{\partial z^2} dz = \\ & = -\psi_i \int_{-H(x,y)}^0 \frac{\partial Z_j}{\partial z} \frac{\partial Z_i}{\partial z} dz + \psi_i Z_j \frac{\partial Z_i}{\partial z} \Big|_{-H(x,y)}. \end{aligned} \quad (17)$$

Подставив выражение (17) в уравнение (16) с учетом (13)–(15), получим

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^N \left\{ \int_{-H(x,y)}^0 \left[ Z_j Z_i \nabla^2 \psi_i + 2\varepsilon Z_j \frac{\partial Z_i}{\partial H} (\vec{\nabla} \psi_i \cdot \vec{\nabla} H) + \varepsilon^2 \psi_i Z_j \left( \frac{\partial^2 Z_i}{\partial H^2} (\vec{\nabla} H \cdot \vec{\nabla} H) + \frac{\partial Z_i}{\partial H} \nabla^2 H \right) - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \psi_i \frac{\partial Z_i}{\partial z} \frac{\partial Z_j}{\partial z} \right] dz + \right. \\ & \quad \left. + \varepsilon Z_i Z_j (\vec{\nabla} \psi_i \cdot \vec{\nabla} H) \Big|_{z=-H(x,y)} + \psi_i Z_i Z_j \Big|_{z=0} + \right. \\ & \quad \left. + \varepsilon^2 \psi_i (\vec{\nabla} H \cdot \vec{\nabla} H) Z_j \frac{\partial Z_i}{\partial H} \Big|_{z=-H(x,y)} \right\} = 0. \quad (18) \end{aligned}$$

Оставив в (18) члены порядка  $\varepsilon$ , будем иметь

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^N \left\{ \nabla^2 \psi_i \int_{-H(x,y)}^0 Z_j Z_i dz + 2\varepsilon (\vec{\nabla} \psi_i \cdot \vec{\nabla} H) \times \right. \\ & \quad \times \int_{-H(x,y)}^0 Z_j \frac{\partial Z_i}{\partial H} dz - \psi_i \int_{-H(x,y)}^0 \frac{\partial Z_j}{\partial z} \frac{\partial Z_i}{\partial z} dz + \\ & \quad \left. + \psi_i Z_j \left( Z_i \Big|_{z=0} \right) + \varepsilon (\vec{\nabla} \psi_i \cdot \vec{\nabla} H) \times \right. \\ & \quad \left. \times \left( Z_i Z_j \Big|_{z=-H(x,y)} \right) \right\} = 0, \quad j = 0, \dots, N. \quad (19) \end{aligned}$$

Таким образом, получили систему уравнений  $N + 1$  порядка для определения функций  $\psi_i$ , которые не зависят от координаты  $z$ . В частном случае, при  $N = 0$ , из уравнения (19) следует:

$$\begin{aligned} & \nabla^2 \psi_0 \int_{-H(x,y)}^0 Z_0^2 dz + \varepsilon (\vec{\nabla} \psi_0 \cdot \vec{\nabla} H) \int_{-H(x,y)}^0 \frac{\partial Z_0^2}{\partial H} dz - \\ & \quad - \psi_0 \int_{-H(x,y)}^0 \left( \frac{\partial Z_0}{\partial z} \right)^2 dz + \psi_0 Z_0^2 \Big|_{z=0} + \\ & \quad + \varepsilon (\vec{\nabla} \psi_0 \cdot \vec{\nabla} H) Z_0^2 \Big|_{z=-H(x,y)} = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Учитывая, что

$$\int_{-H(x,y)}^0 \frac{\partial Z_0^2}{\partial H} dz = \frac{\partial}{\partial H} \left( \int_{-H(x,y)}^0 Z_0^2 dz \right) - Z_0^2 \Big|_{z=-H(x,y)},$$

запишем уравнение (20) в виде

$$\nabla^2 \psi_0 \left( \int_{-H(x,y)}^0 Z_0^2 dz \right) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial H} \left( \int_{-H(x,y)}^0 Z_0^2 dz \right) \times \\ \times \vec{\nabla} \psi_0 \cdot \vec{\nabla} H - \psi_0 \int_{-H(x,y)}^0 \left( \frac{\partial Z_0}{\partial z} \right)^2 dz + \psi_0 Z_0^2 \Big|_{z=0} = 0$$

или

$$\vec{\nabla} \cdot \left( \int_{-H(x,y)}^0 Z_0^2 dz \right) \vec{\nabla} \psi_0 - \psi_0 \int_{-H(x,y)}^0 \left( \frac{\partial Z_0}{\partial z} \right)^2 dz + \\ + \psi_0 Z_0^2 \Big|_{z=0} = 0.$$

Принимая во внимание, что

$$\int_{-H(x,y)}^0 Z_0^2 dz = \frac{1}{2k^2} \left( 1 + \frac{2kH}{\text{sh}2kH} \right), \\ \int_{-H(x,y)}^0 \left( \frac{\partial Z_0}{\partial z} \right)^2 dz = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{2kH}{\text{sh}2kH} \right), \\ Z_0^2 \Big|_{z=0} = 1,$$

окончательно получим

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{1}{2k^2} \left( 1 + \frac{2kH}{\text{sh}2kH} \right) \vec{\nabla} \psi_0 + \\ + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{2kH}{\text{sh}2kH} \right) \psi_0 = 0. \quad (21)$$

Вводя обозначения

$$n = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{2kH}{\text{sh}2kH} \right), \quad c_g = nc, \quad c = \omega/k$$

и переходя к размерным переменным, перепишем уравнение (21) в виде

$$\vec{\nabla} \cdot (c c_g \vec{\nabla} \psi_0) + \omega^2 \frac{c_g}{c} \psi_0 = 0. \quad (22)$$

Уравнение (22) с учетом представления (2) описывает трансформацию волн в жидкости конечной переменной глубины с малыми уклонами дна. Оно было получено Беркгофом [7] с помощью менее общей процедуры осреднения по глубине исходной трехмерной задачи трансформации волн в жидкости переменной глубины.

## 2. СЛУЧАЙ ДОСТАТОЧНО БОЛЬШИХ УКЛОНОВ ДНА

В случае, когда градиенты глубины не являются малыми ( $|\vec{\nabla} H| = O(1)$ ), в системе (7)–(9) граничное условие на дне записывается следующим образом:

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \vec{\nabla} \varphi \cdot \vec{\nabla} H \right)_{z=-H(x,y)} = 0.$$

Соответствующее уравнение (14) примет вид

$$\sum_{i=0}^N \left\{ \psi_i \frac{\partial Z_i}{\partial z} + \psi_i (\vec{\nabla} Z_i \cdot \vec{\nabla} H) + \right. \\ \left. + Z_i (\vec{\nabla} \psi_i \cdot \vec{\nabla} H) \right\}_{z=-H(x,y)} = 0.$$

В качестве весовой функции выберем функцию

$$\rho(x, y, z) = \frac{\text{ch}kH}{\text{ch}k(z+H)}. \quad (23)$$

Тогда из уравнения (3) с учетом (7), (10), (11) и (23) получим

$$\int_{-H(x,y)}^0 z^{2j} \sum_{i=0}^N \left[ Z_i \nabla^2 \psi_i + \psi_i \nabla^2 Z_i + \right. \\ \left. + 2 \vec{\nabla} \psi_i \cdot \vec{\nabla} Z_i + \psi_i \frac{\partial^2 Z_i}{\partial z^2} \right] dz = 0$$

или

$$\sum_{i=0}^N \left\{ \int_{-H(x,y)}^0 \left[ z^{2j} Z_i \nabla^2 \psi_i + 2z^{2j} \psi_i \nabla^2 Z_i + \right. \right. \\ \left. \left. + 2z^{2j} (\vec{\nabla} \psi_i \cdot \vec{\nabla} Z_i) - 2j \psi_i z^{2j-1} \frac{\partial Z_i}{\partial z} \right] dz + \right. \\ \left. + z^{2j} Z_i (\vec{\nabla} \psi_i \cdot \vec{\nabla} H) \Big|_{z=-H(x,y)} + \right. \\ \left. + \psi_i z^{2j} (\vec{\nabla} Z_i \cdot \vec{\nabla} H) \Big|_{z=-H(x,y)} + \right. \\ \left. + \psi_i z^{2j} Z_i \Big|_{z=0} \right\} = 0. \quad (24)$$

Используя формулы дифференцирования интеграла с переменными пределами

$$\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} \vec{\nabla} f(x, y, z) dz = \vec{\nabla} \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x, y, z) dz -$$

$$\begin{aligned}
 & -f(x, y, \beta) \vec{\nabla} \beta + f(x, y, \alpha) \vec{\nabla} \alpha, \\
 & \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} \nabla^2 f(x, y, z) dz = \nabla^2 \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x, y, z) dz - \\
 & -2 \vec{\nabla} f(x, y, \beta) \cdot \vec{\nabla} \beta + 2 \vec{\nabla} f(x, y, \alpha) \cdot \vec{\nabla} \alpha - \\
 & -f(x, y, \beta) \nabla^2 \beta + f(x, y, \alpha) \nabla^2 \alpha,
 \end{aligned}$$

из уравнения (24) получаем:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=0}^N \left\{ \left( \int_{-H(x,y)}^0 z^{2j} Z_i dz \right) \nabla^2 \psi_i + \right. \\
 & + 2 \vec{\nabla} \psi_i \cdot \vec{\nabla} \left( \int_{-H(x,y)}^0 z^{2j} Z_i dz \right) + \\
 & + \psi_i \left[ \nabla^2 \left( \int_{-H(x,y)}^0 z^{2j} Z_i dz \right) - \right. \\
 & \left. - 2j \left( \int_{-H(x,y)}^0 z^{2j-1} \frac{\partial Z_i}{\partial z} dz \right) - \right. \\
 & \left. - z^{2j} \vec{\nabla} Z_i \Big|_{z=-H(x,y)} \cdot \vec{\nabla} H - z^{2j} Z_i \Big|_{z=-H(x,y)} \nabla^2 H + \right. \\
 & \left. + z^{2j} Z_i \Big|_{z=0} \right] - z^{2j} Z_i \Big|_{z=-H(x,y)} (\vec{\nabla} \psi_i \cdot \vec{\nabla} H) \Big\} = \\
 & = 0, \quad j = 0, \dots, N. \tag{25}
 \end{aligned}$$

В частном случае, когда глубина жидкости является функцией только одной координаты  $H = H(x)$ , система уравнений (25) сводится к системе  $N + 1$  обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами относительно функций  $\chi_i(x)$  ( $\psi_i(x, y) = \chi_i(x) \kappa(y)$ ). В другом частном случае, при  $N = 0$ , из уравнения (25) следует:

$$\begin{aligned}
 & \left( \int_{-H(x,y)}^0 Z_0 dz \right) \nabla^2 \psi_0 + 2 \vec{\nabla} \psi_0 \cdot \vec{\nabla} \left( \int_{-H(x,y)}^0 Z_0 dz \right) + \\
 & + Z_0 \Big|_{z=-H(x,y)} (\vec{\nabla} \psi_0 \cdot \vec{\nabla} H) + \\
 & + \psi_0 \left[ \nabla^2 \int_{-H(x,y)}^0 Z_0 dz - \vec{\nabla} Z_0 \Big|_{z=-H(x,y)} \cdot \vec{\nabla} H - \right. \\
 & \left. - Z_0 \Big|_{z=-H(x,y)} \cdot \nabla^2 H + Z_0 \Big|_{z=0} \right] = 0.
 \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что

$$\int_{-H(x,y)}^0 Z_0 dz = \frac{1}{k} \text{th} k H = k^{-2},$$

$$\vec{\nabla} Z_0 \Big|_{z=-H(x,y)} = \vec{\nabla} (\text{ch} k H)^{-1},$$

$$Z_0 \Big|_{z=-H(x,y)} = (\text{ch} k H)^{-1}, \quad Z_0 \Big|_{z=0} = 1,$$

получаем уравнение

$$\begin{aligned}
 & k^{-2} \nabla^2 \psi_0 + 2 \vec{\nabla} \psi_0 \cdot \vec{\nabla} (k^{-2}) - \\
 & - (\text{ch} k H)^{-1} \vec{\nabla} \psi_0 \cdot \vec{\nabla} H + \\
 & + \psi_0 [1 + \nabla^2 (k^{-2}) - \vec{\nabla} \cdot (\text{ch} k H)^{-1} \vec{\nabla} H] - \\
 & - (\text{ch} k H)^{-1} \nabla^2 H = 0, \tag{26}
 \end{aligned}$$

выведенное в работе [10] с помощью осреднения по глубине исходной трехмерной задачи трансформации волн в жидкости конечной переменной глубины. С учетом представления (2) уравнение (26) описывает трансформацию волн в жидкости конечной переменной глубины при достаточно больших уклонах дна.

### 3. АНАЛИЗ ПРЕДЕЛОВ ПРИМЕНИМОСТИ МОДЕЛЕЙ

Рассмотрим пределы применимости построенных выше уравнений (22) и (26).

В предельном случае длинных волн при  $kH \ll 1$  функция  $Z$ , описывающая зависимость волнового поля от вертикальной координаты, стремится к единице, и уравнения (22) и (26) переходят в уравнения теории мелкой воды в жидкости переменной глубины. В другом предельном случае  $H = \text{const}$  оба эти уравнения описывают распространение волн в жидкости конечной постоянной глубины.

Уравнение (22) получено с точностью порядка  $O(\varepsilon^2)$ , где малый параметр  $\varepsilon$  характеризует изменение глубины на расстоянии порядка длины волны, т.е. оно справедливо для достаточно плавных неоднородностей.

При выводе уравнения (26) мы не налагали, вообще говоря, никаких условий на градиенты глубины. Однако это условие в виде соотношения  $|\vec{\nabla} H_1| \leq O(1)$  неявно следует из решения уравнения (26) в безразмерной форме и граничного условия (6). Однако численные эксперименты [7, 14] показывают, что модель достаточно хорошо

описывает преобразование структуры волнового поля и при достаточно больших уклонах дна при  $\gamma\delta \leq 0.3$  ( $\gamma = H_0/l$  – характерный уклон дна,  $\delta = l/\lambda_0$  – отношение характерной величины области переменной глубины к длине набегающей волны). Из этого условия следует, что чем больше уклон дна, тем для меньших размеров области переменной глубины справедливо уравнение (26) и наоборот, чем меньше уклон дна, тем большим может быть параметр  $\delta$ .

Наиболее интересно сравнить применимость этих моделей в случае конечной переменной глубины. С этой целью была рассмотрена модельная задача трансформации поверхностных волн на подводном вале, профиль которого описывается функцией  $H(x) = H_m + (H_1 - H_m)(x/a)^2$ . В декартовой системе координат подводный вал занимает область  $\Omega_2 = \{-a \leq x \leq b, |y| < \infty, -H(x) \leq z \leq 0\}$ . Предполагается, что в области  $\Omega_1 = \{b < x < \infty, |y| < \infty, H_1 \leq z \leq 0\}$  на вал под углом  $\theta_1$  набегают гармонические волны с потенциалом скоростей

$$\varphi_i = A \frac{\text{ch}k(z+H)}{\text{ch}kH} e^{-i(\alpha_1 x + \sigma_1 y + \omega t)}, \quad (27)$$

где  $\alpha_1 = k_1 \cos \theta_3, \sigma_1 = k_1 \sin \theta_1$ . Решения для отраженных в области  $\Omega_1$  и прошедших в область  $\Omega_3 = \{-\infty < x < -a, |y| < \infty, H_3 \leq z < 0\}$  волн записываются в виде аналитических выражений, аналогичных (27). В области переменной глубины решение строится численно с помощью метода сплайн-коллокаций [10].

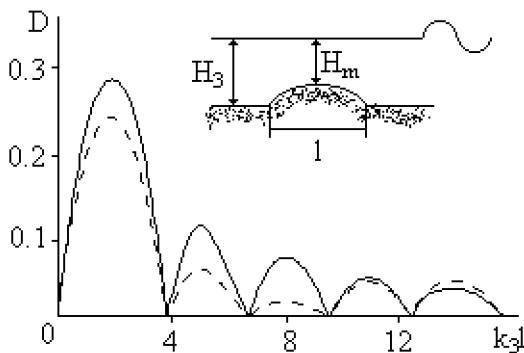


Рис. 1.

На рис. 1 представлено сравнение коэффициентов отражения для случаев, когда трансформация волн в жидкости переменной глубины описывается уравнениями (22) – штриховые линии и (26)

– сплошные линии при  $a = b = 0.5, H_1 = H_3 = 1, H_m = 0.5, H_0/l = 0.15$ . Из представленного графика следует, что в области малых волновых чисел при  $H_0/\lambda \leq 0.1$ , где оба из полученных выше уравнений (22) и (26) вырождаются в уравнение трансформации длинных волн в жидкости переменной глубины, наблюдается хорошее соответствие результатов. Также неплохое соответствие наблюдается и в области коротких волн, где справедливо уравнение Беркгофа. В промежуточной области  $0.1 \leq H_0/\lambda \leq 0.25$ , когда характерные размеры вала сравнимы с длиной волны, а уклоны не являются малыми, уравнение Беркгофа неадекватно описывает резонансный характер поведения коэффициента отражения. Более того, с ростом волнового числа, т.е. с уменьшением длины волны, коэффициент отражения, рассчитанный по уравнению Беркгофа, медленно растет. Это противоречит физическим представлениям о трансформации волн на неоднородностях, поскольку резонансный характер коэффициента  $D$  обусловлен переотражением волн на градиентах глубины на границе подводного вала. С увеличением волнового числа придонная амплитуда набегающей волны на границах подводного вала уменьшается в соответствии с зависимостью (10), и, следовательно, должны уменьшаться резонансные максимумы коэффициента отражения.

Кроме того, по процедуре вывода уравнений (22) и (26), полученных ранее в работах [7, 10], необходимо отметить следующее. Уравнение Беркгофа выведено в точном соответствии с процедурой Галеркина исключения "неволновой" координаты для достаточно малых уклонов дна и которой в случае осреднения по глубине соответствует процедура домножения на функцию  $Z$  [7]. Возможно это и привело к тому, что при промежуточных волновых числах наблюдается физически необоснованный провал в коэффициенте отражения. Введение же весовой функции в скалярное произведение при выводе уравнения (26) непосредственно приводит вид скалярного произведения к процедуре осреднения по глубине, без домножения на какой-либо множитель, что по нашему мнению является более физичным.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведенные выше результаты показывают, что с помощью галеркинской процедуры исключения "неволновой" координаты можно существенно упростить исходную трехмерную задачу трансформации волн. Кроме того, введение весовой

функции в скалярное произведение позволяет существенно улучшить степень приближения упрощенной модели к физически обоснованным результатам.

1. Доценко С.Ф., Черкесов Л.В. О дифракции поверхностной гравитационной волны на малой неровности дна // ПММ.– 1979.– т.43, N4.– С. 639–646.
2. Усекеев Э.Ж. Распространение волн на поверхности жидкости переменной глубины // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. Фрунзе.– 1991, N23.– С. 237–240.
3. Коробкин А.А., Стурова И.В. Генерация поверхностных и внутренних волн в жидкости переменной глубины // Методы гидрофизических исследований. Турбулентность и микроструктура: Материалы 3 Всесоюзной школы, Светлогорск, октябрь, 1989.– Нижний Новгород, 1990.– С. 161–179.
4. Radder A.C. On the parabolic equation method for water-wave propagation // J. fluid mech.– 1979.– vol. 95, N1.– P. 159–176.
5. Бабич В.М., Буддырев В.С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн.– М: Наука, 1972.– 456 с.
6. Загрядская Н.Н. Применение метода параболического приближения в задачах дифракции поверхностных волн // Журнал техн. физ.– 1995.– N8.– С. 25–37.
7. Berkhof J.C.W. Mathematikal models for simple harmonic linear water waves. Wave diffraction and refraction. // Delft. University of technology, Publ.– 1976.– N163.– P. 108.
8. Белберова Д.З., Козлов С.И., Массель С.Р., Пелиновский Е.Н. Полиномиальные аппроксимации модели Беркгофа для волн в бассейне переменной глубины // Мор. гидрофиз. ж.– 1992.– N2.– С. 3–9.
9. Massel Stanislaw R. Calerkin' type solution for waves propagated over stoping botton // Rozpr. hydrotechn.– 1990.– N53.– P. 167–186.
10. В.В. Яковлев Дифракция поверхностных гравитационных волн на телах вращения // Доклады АН УССР.– 1985.– сер. А, N7.– С. 41–45.
11. Vitaly V. Yakovlev and Alexander V. Pyatetsky Diffraction of Surface Waves by Axisymmetric Obstacles in Water of Finite Depth // International Journal of Offshore and Polar Engineering.– 1994.– v.4, N3.– P. 11–15.
12. Е.Н. Пелиновский, В.Е. Фридман, Ю.К. Энгельбрехт Нелинейные эволюционные уравнения.– Таллин: Валгус, 1984.– 154 с.
13. С.Г. Михлин Вариационные методы в математической физике.– М.: Наука, 1970.– 512 с.
14. В.А.Ткаченко, В.В. Яковлев Трансформация волн над каналом или валом произвольного поперечного сечения // Вопросы проектирования и эксплуатации инженерных сооружений и обслуживания портов. Сб. научных трудов, В/О "Мортехинформреклама". – М, 1986.– С. 24–26.