

УДК 517.5

А. Г. Додонов¹, В. Г. Елизарьев², В. И. Путьгин¹, В. А. Валетчик¹

¹Институт проблем регистрации информации НАН Украины,
ул. Н. Шпака, 2, 03113 Киев, Украина

²ДП «Главный сервисный центр компьютерных технологий» ГНАУ
Львовская площадь, 8, 04655 Киев, Украина

Идентификация параметров движения объектов по направляющим специальных систем метания

Рассмотрен один из возможных подходов к идентификации параметрической модели движения объектов по направляющим специальных систем метания по отсчетам положения при стендовых и натурных испытаниях таких систем.

Ключевые слова: оценка, система, модель, носитель, модуль, информация, взаимодействие.

Методы оценки параметров движения объектов по направляющим специальных систем метания (ССМ) по результатам измерений естественным образом связана с состоянием техники измерений [1–5].

В настоящее время, в основном, используются контактные или индукционные датчики фиксации положения объекта, расположенные вдоль направляющих ССМ. Применяются также радиочастотные датчики, действие которых основано на доплеровском сдвиге частот, обусловленном движением объекта. Известно, например микроволновое устройство для связи с объектом, движущимся по направляющим системы, основанное на применении микроволнового генератора, сигнал от которого подается внутрь системы через встроенный зонд [3].

При анализе измерительной информации, полученной при оценке параметров движения объекта по направляющим ССМ, традиционно использовались различные методы математической статистики: корреляционный, регрессионный, дисперсионный анализы, факторный анализ и другие. В последнее время получили развитие ССМ на новых физических принципах метания объектов (например, электродинамического, газодинамического). Внутри таких ССМ, как правило, действует сверхмощное электромагнитное поле, помехи от которого не позволяют производить достоверные измерения при использовании указанных инструментальных средств. Стали применяться современные средства измерений, что потребовало более широкого внедрения новых методов анализа, требующих значительных вычислительных мощностей. Одновременно наблюдается качественное

© А. Г. Додонов, В. Г. Елизарьев, В. И. Путьгин, В. А. Валетчик

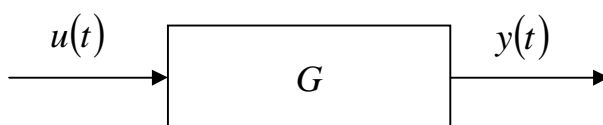
изменение процессов движения объектов по направляющим ССМ, что делает особенно актуальным построение математических моделей, позволяющих анализировать влияние различных факторов на течение процесса движения. В этих условиях особенно актуальным становится вопрос идентификации параметров движения объектов.

Для обеспечения необходимой помехозащищенности в практике испытаний ССМ стали использоваться измерительные средства оптического диапазона, работающие в интервале длин волн $\lambda = 0,4 \dots 1,1$ мкм. Как показано в [1, 2], геометрия светового потока в этом диапазоне и его интенсивность за счет разогрева отражающей поверхности при движении объекта по направляющим системы со скоростью до 3 км/с изменяется незначительно. Наиболее перспективным направлением исследований в данной области является разработка лазерных измерителей на основе датчиков, фиксирующих положение объекта при движении по направляющим с точной привязкой по времени [4–5].

Целью исследований является разработка методологии идентификации параметрической модели движения объектов по направляющим ССМ по отсчетам положения, позволяющей реализовать методы сплайн-функций для осуществления оценки достоверности параметров выборок малого объема и математического моделирования процессов движения объектов и проведения их коррекции. Задачами исследования были разработка модели объекта движения, алгоритма регрессионной идентификации параметров модели объекта, оценивания переменных состояния по интерполированным значениям положения объекта, алгоритма сглаживания измерений.

Модель объекта

В практике модель движения объекта обычно задается разработчиком ССМ в виде дифференциального уравнения n -го порядка. Если при этом в качестве основной для практического применения рассматривать задачу управления объектом в ССМ как задачу коррекции его динамических характеристик на управляемом участке движения (т.е. во время движения по направляющим системы), то целесообразно для анализа принять простую динамическую модель объекта [6]:



$$\sum_{i=0}^n a_i y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^m b_j u^{(j)}(t), \quad (1)$$

где $u(t)$ — изменяющееся во времени напряжение управления, приложенное к электромагнитному ускорителю ССМ; G — линейный оператор; $y(t) \equiv S(t) - S_0$ — измеряемый выход системы (положение отсчетной точки на объекте относительно начального ее положения в момент времени t' , $t' = t - t_0$); $t \in T, T$ — интервал измерений.

На практике $n \leq 3$, $m \leq 2$. Следовательно:

$$a_0 y(t) + a_1 y^{(1)}(t) + a_2 y^{(2)}(t) + a_3 y^{(3)}(t) = b_0 u(t) + b_1 u^{(1)}(t) + b_2 u^{(2)}(t),$$

или:

$$a_0 y(t) + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_3 \frac{d^3 y(t)}{dt^3} = b_0 u(t) + b_1 \frac{du^{(1)}(t)}{dt} + b_2 \frac{du^{(2)}(t)}{dt}. \quad (2)$$

Запишем уравнение (1) в виде:

$$\sum_{i=0}^{n=3} a_i D^{(i)} y(t) = \sum_{j=0}^{m=2} b_j D^{(j)} u(t), \quad (3)$$

где $D = d/dt$ — введенный оператор дифференцирования [6].

Обозначим:

$$\tilde{A} = \sum_{i=0}^n a_i D^{(i)}, \tilde{B} = \sum_{j=0}^m b_j D^{(j)}. \quad (4)$$

Получим:

$$\tilde{A}y(t) = \tilde{B}u(t). \quad (5)$$

Следовательно, возможна запись:

$$y(t) = \tilde{A}^{-1} \tilde{B}u(t). \quad (6)$$

Введем формально вектор состояния объекта $X(t)$:

$$\tilde{A}^{-1} \tilde{B}U(t) = \tilde{B}X(t). \quad (7)$$

Тогда

$$\tilde{A}^{-1} u(t) = x(t). \quad (8)$$

Имеем два уравнения:

$$\tilde{A}x(t) = u(t), \quad (9)$$

$$\tilde{B}x(t) = y(t). \quad (10)$$

Исходя из начальной постановки задачи, выберем переменные состояния, входящие в вектор состояния:

$$X(t) = [x_1(t), x_2(t), x_3(t)]^T,$$

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= x_1(t) \\ \frac{dx(t)}{dt} &= x_2 = \frac{d x_1(t)}{dt} \\ \frac{d^2 x(t)}{dt^2} &= x_3 = \frac{d x_2(t)}{dt} \\ \frac{d^3 x(t)}{dt^3} &= \frac{d x_3(t)}{dt} \end{aligned} \right\}. \quad (11)$$

Из уравнения (9) получим:

$$\frac{d x_3(t)}{dt} = \frac{1}{a_3} u(t) - \frac{a_2}{a_3} x_3(t) - \frac{a_1}{a_3} x_2(t) - \frac{a_0}{a_3} x_1(t). \quad (12)$$

Уравнение динамики объекта имеет следующий вид:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_3} & -\frac{a_1}{a_3} & -\frac{a_2}{a_3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{a_3} \end{bmatrix} u(t), \quad (13)$$

$$\dot{X}(t) = FX(t) + Gu(t). \quad (14)$$

Из рассмотрения уравнений (10) и (11) следует:

$$b_0 x_1(t) + b_1 x_2(t) + b_2 x_3(t) + b_3 \dot{x}_3(t) = y(t). \quad (15)$$

Подставив уравнение (12) в уравнение (15), получим:

$$\begin{aligned} & b_0 x_1(t) + b_1 x_2(t) + b_2 x_3(t) + b_3 \left[\frac{1}{a_3} u(t) - \frac{a_2}{a_3} x_3(t) - \frac{a_1}{a_3} x_2(t) - \frac{a_0}{a_3} x_1(t) \right] = \\ & b_0 x_1(t) + b_1 x_2(t) + b_2 x_3(t) + \frac{b_3}{a_3} u(t) - \frac{b_3 a_2}{a_3} x_3(t) - \frac{b_3 a_1}{a_3} x_2(t) - \frac{b_3 a_0}{a_3} x_1(t) = y(t), \\ & y(t) = \left[b_0 - \frac{b_3 a_0}{a_3} \right] x_1(t) + \left[b_1 - \frac{b_3 a_1}{a_3} \right] x_2(t) + \left[b_2 - \frac{b_3 a_2}{a_3} \right] x_3(t) + \frac{b_3}{a_3} u(t). \end{aligned} \quad (16)$$

На практике $b_0 = 1$, $b_1 = b_2 = b_3 = 0$ (нет динамических звеньев по управлению; считаем, что динамические свойства оцениваются по выходу).

Таким образом,

$$X(t) = [x_1(t), x_2(t), x_3(t)]^T \equiv [S(t), \dot{S}(t), \ddot{S}(t)]^T. \quad (17)$$

Получаем уравнение наблюдений в виде:

$$e(t) = x_1(t). \quad (18)$$

Компактная запись модели в пространстве состояний имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = FX(t) + Gu(t), \\ y(t) = x_1(t) \equiv S(t), \end{cases} \quad (19)$$

где F — матрица $[3 \times 3]$; G — вектор $[0, 0, 1/a_3]^T$.

Учитывая, что оценка параметров движения объекта по направляющим ССМ, а также регистрация полученных значений производится дискретным образом, заменим обыкновенное дифференциальное уравнение, описывающее динамику объекта (1), на соответствующее разностное уравнение:

$$\sum_{i=0}^n a_i y(k-i) = \sum_{j=0}^m b_j u(k-j). \quad (20)$$

Причем для упрощения взят единичный период квантования $\Delta T = 1, \Delta T \in T$.

Введя аналогичным образом переменные состояния, получаем уравнение динамики объекта в дискретной форме:

$$X(k+1) = AX(k) + Bu(k), \quad (21)$$

$$\text{где } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{a_3}{a_0} & -\frac{a_2}{a_0} & -\frac{a_1}{a_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{bmatrix} \text{ — матрица перехода;}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{a_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} \text{ — вектор усиления по входу объекта.} \quad (22)$$

Соответственно уравнение наблюдений (18) можно представить в виде:

$$y(k) = x_1(k). \quad (23)$$

Алгоритм регрессионной идентификации параметров модели объекта

Для реализации алгоритма идентификации введем расширенный вектор состояния:

$$W(k) = [x_1(k), x_2(k), x_3(k), u(k)]^T = [w_1(k), w_2(k), w_3(k), w_4(k)]^T. \quad (24)$$

Выполним переобозначения:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1^T \\ \Phi_2^T \\ \Phi_3^T \end{bmatrix}. \quad (25)$$

Таким образом, уравнение (21) можно записать в виде:

$$X(k+1) = \Phi W(k). \quad (26)$$

Фактически, идентификация системы (26) состоит в определении элементов матрицы-строки Φ_3 . Оценка $\hat{\Phi}_3$ может быть выполнена по методу наименьших квадратов [7, 8] известным способом:

$$\hat{\Pi}_3 = [\tilde{W}^T(k) \tilde{W}(k)]^{-1} \tilde{W}^T(k) \tilde{Y}_3(k+1), \quad (27)$$

где
$$\tilde{W}(k) = \begin{bmatrix} w_{11}(k), & w_{12}(k), & w_{13}(k), & w_{14}(k) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ w_{\mu 1}(k), & w_{\mu 2}(k), & w_{\mu 3}(k), & w_{\mu 4}(k) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ w_{r1}(k), & w_{r2}(k), & w_{r3}(k), & w_{r4}(k) \end{bmatrix}; \quad (28)$$

$$\tilde{Y}_3(k+1) = [\tilde{x}_{31}(k+1), \dots, \tilde{x}_{3\mu}(k+1), \dots, \tilde{x}_{3r}(k+1)]^T, \quad (29)$$

где $\mu = 1, 2, \dots, r$; $r > 4$ — число измерений (оценок) переменных состояния x_1, x_2, x_3 и управления u в t_k момент времени и переменной состояния x_3 в момент времени t_{k+1} , т.е. общее число измерений $R \geq 5r$. При этом значение r фактически определяет минимально необходимое число сеансов измерений в ходе процесса идентификации динамических параметров объекта.

Оценивание переменных состояния по интерполированным значениям положения объекта

Предложенный подход к идентификации модели движения объекта исследования состоит, как было показано выше, в использовании отсчетов положения $S(t_k) \equiv x_1(t_k)$. Однако, на практике измеряется некоторый сигнал $Z(t)$ (вид сигнала связан с конструкцией реальной системы контроля параметров движения объекта). Поскольку модель движения задана с точностью до параметра, возникает задача интерполяции отсчетов положения, полученных по измерениям непрерывной и дифференцируемой функции времени. Необходимая непрерывность производных на интервале измерений, а также минимизация погрешностей между узлами обеспечивается интерполяцией с помощью сплайн-функций [9, 10].

Физически сплайн представляет собой упругую линейку, закрепленную в опорных точках. Математически сплайн принимает в узлах значения функции, т.е. сплайн-функция это такая функция

$$\sigma_i(x_i) = y_i, \quad (i = 1, \dots, N), \quad (30)$$

у которой

$$\|\sigma''\|_y^2 = \int_a^b (\sigma''(x))^2 dx. \quad (31)$$

Величина (31) трактуется как потенциальная энергия изгиба упругой линейки, закрепленной в точках плоскости (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, N$.

Кубическая сплайн-функция представляется как функция, собранная из кусков кубических многочленов, и при этом обеспечивается минимум функционала потенциальной энергии изгиба упругой линейки.

Для решения задачи интерполяции используется интерполяционный кубический сплайн. Определяются значения сплайна в точке x_j , причем

$$x_j \in [a; b], x_j \in [x_i; x_{i+1}], [x_i; x_{i+1}] \in [a; b], \quad (32)$$

где $[a, b]$ — интервал задания функции.

Шаг задания функции может быть произвольным, т.е.

$$h_i \neq x_{i+1}, \text{ но } x_{i+1} \rangle x_i, \quad (33)$$

где $h_i = x_i - x_{i-1}$, $h_{i+1} = x_{i+1} - x_i$.

Кубический интерполяционный сплайн записывается как система уравнений по i ($i = 1, \dots, N$)

$$\begin{aligned} \sigma_j(x) = & \frac{1}{6h_i} \left[m_i (x_{i+1} - x_j)^3 + m_{i+1} (x_j - x_i)^3 \right] + \\ & + \frac{1}{h_i} \left[\left(y_i - \frac{m_i}{6} h_i \right)^2 (x_{i+1} - x_j) + \left(y_{i+1} - \frac{m_{i+1}}{6} h_i \right)^2 (x_j - x_i) \right]. \end{aligned} \quad (34)$$

Такая система в матричном виде записывается как

$$A\bar{m} = 6H\bar{Y}, \quad (35)$$

где \bar{m} — вектор-столбец корней системы уравнений; \bar{Y} — вектор-столбец значений функции; A, H — квадратные ленточные матрицы ранга N , состоящие соответственно из строк $h_i + 2(h_{i-1} - h_i) + h_{i+1}$, $i = 3, \dots, (N - 2)$; $h_i^{-1} + (h_{i-1}^{-1} - h_i^{-1}) + h_i^{-1}$, $i = 2, \dots, (N - 1)$.

Вторая и предпоследняя строки матрицы A имеют вид:

$$\begin{aligned} & 2(h_1 - h_2) + h_2, \\ & h_{N-2} + 2(h_{N-2} + h_{N-1}). \end{aligned}$$

Первая и последняя строки матрицы A равны 1, а матрицы H — равны 0.

При решении задачи экстраполяции кубический сплайн записывается в виде:

– при $x_i \langle a$:

$$\sigma_j(x_j) = y_1 - \left((x_2 - a) \frac{m_2}{6} + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - a} \right) (x_i - a); \quad (36)$$

– при $x_j \rangle b$:

$$\sigma_j(x_j) = y_N + \left((b + x_{N-1}) \frac{m_{N-1}}{6} + \frac{y_N - y_{N-1}}{b - x_{N-1}} \right) (x_j - b).$$

Решая систему уравнений (35) и найдя ее корни, можно по формулам (34), (36), (37) определить интерполяционные и экстраполяционные значения сплайна. Алгоритм решения системы (35) основан на методе обратной прогонки и изложен в работах [7, 9, 10].

Для каждого отрезка $[t_k, t_{k+1}]$ изменения $t \in T$ кубическая сплайн-функция записывается в виде:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_k(t) = \tilde{x}_{1k}(t) = & a'_k + b'_k(t - t_k) + \frac{c'_k}{2}(t - t_k)^2 + \frac{d'_k}{6}(t - t_k)^3, \\ & t_{k-1} \langle t \langle t_k, k = 1, 2, \dots, N_1, \end{aligned} \quad (37)$$

где N_1 — количество отсчетов положения, обеспечиваемое конкретной системой контроля параметров движения объекта; a'_k, b'_k, c'_k, d'_k — коэффициенты, подлежащие определению.

Очевидно, выражения для скорости и ускорения объекта на k -м интервале времени при этом имеют вид:

$$\tilde{S}'_k(t) = \tilde{x}_{2k}(t) = b'_k + c'_k(t - t_k) + \frac{d'_k}{2}(t - t_k)^2, \quad (38)$$

$$\tilde{S}''_k(t) = \tilde{x}_{3k}(t) = c'_k + d'_k(t - t_k). \quad (39)$$

Причем, в соответствии с [7]:

$$a'_i = S'_i(t_i), \quad (40)$$

где $S'_i(t_i)$ — значения положения в момент времени t_i , полученные по измерениям $z(t_i), t_i \in T, i = 1, \dots, N_2$.

Но, в общем случае t_i не совпадает с t_k , а N_1 не равно N_2 , т.е. количество измерений N_2 не равно количеству отсчетов положения, используемых для определения параметров модели движения объектов.

Коэффициенты c'_i определяются путем решения системы линейных уравнений:

$$h_i c'_{i-1} + 2(h_i + h_{i+1})c'_i + h_{i+1}c'_{i+1} = 6\left(\frac{S'_{i+1} - S'_i}{h_{i+1}} - \frac{S'_i - S'_{i-1}}{h_i}\right), \quad i = 1, 2, \dots, N_2 \quad (41)$$

для краевых условий $c'_0 = c'_{N_2} = 0$.

Коэффициенты b'_i, d'_i определяются по формулам:

$$d'_i = \frac{c'_i - c'_{i-1}}{h_i}; b'_i = \frac{h_i}{2}c'_i - \frac{h_i^2}{6}d'_i + \frac{S'_i - S'_{i-1}}{h_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N_2. \quad (42)$$

Алгоритм сглаживания измерений

Шум измерений, включая аномальные выбросы, серьезно затрудняет дальнейшую обработку. Поскольку характер распределения шума априори неизвестен удобно в качестве сглаживающей функции взять кубическую сплайн-функцию [7, 9, 10], построенную по дискретным отсчетам $z(t_i)$.

Используется следующий алгоритм построения сглаживающего сплайна. При сглаживании значений $z(t_i)$ сплайн-аппроксимация измеренных данных осуществляется методом покоординатного спуска. Идея метода состоит в аппроксимации в выражении для функционала

$$\int_0^T |Z''(t)|^2 dt \quad (43)$$

второй производной сплайна, разделенной разностью, составленной из значений сплайна $z_i = Z(t_i)$ в узлах сетки Δ , с заменой интегрирования суммированием. В случае краевых условий типа

$$Z''(0) = Z''(T) = 0 \quad (44)$$

приходим к функционалу типа:

$$\Phi(Z) = \sum_{i=0}^{N_2} \left[(z_{i+1} - z_i) / h_i - (z_i - z_{i-1}) / h_{i-1} \right]^2 / \tilde{h}_i,$$

где $h_i = t_{i+1} - t_i$; $\tilde{h}_i = (h_{i-1} + h_i) / 2$. (45)

Для устранения неоднородности в узлах сетки с номерами $0, 1, N_i - 1, N_2$ дополним сетку узлами t_{-2}, t_{-1} и t_{N_2+1}, t_{N_2+2} , причем такими, что $t_0 \rangle t_{-1} \rangle t_{-2}$, $t_{N_2} \langle t_{N_2+1} \langle t_{N_2+2}$ и будем на каждой итерации вычислять дополнительные значения $z_{-2}, z_{-1}, z_{N_2+1}, z_{N_2+2}$ путем линейной экстраполяции:

$$\begin{aligned} z_{-2} &= z_0 - (h_{-2} + h_{-1})(z_1 - z_0) / h_0, \\ z_{-1} &= z_0 - h_{-1}(z_1 - z_0) / h_0, \\ z_{N_2+1} &= z_{N_2} + h_{N_2}(z_{N_2} - z_{N_2-1}) / h_{N_2-1}, \\ z_{N_2+2} &= z_{N_2} + (h_{N_2} + h_{N_2+1})(z_{N_2} - z_{N_2-1}) / h_{N_2-1}. \end{aligned} \quad (46)$$

Тогда суммирование в (45) можно формально производить от -1 до $N_2 + 1$, а формулы для вычисления приближенного значения $\tilde{z}_i^{(k)}$ для i -го узла на k -й итерации будут однородными и приобретут вид:

$$\begin{aligned} \tilde{z}_i^{(k)} &= \left[\frac{1}{h_i^2 \tilde{h}_{i+1}} + \frac{4\tilde{h}_i}{h_{i-1}^2 h_i^2} + \frac{1}{h_{i-1}^2 \tilde{h}_{i-1}} \right]^{-1} \times \left\{ -\frac{1}{h_{i-2} \tilde{h}_{i-1} h_{i-1}} z_{i-2}^{(k)} + \frac{2}{h_{i-1}^2} \left[\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i-2}} \right] z_{i-1}^{(k)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{h_i^2} \left[\frac{1}{h_{i-1}} + \frac{1}{h_{i+1}} \right] z_{i+1}^{(k-1)} - \frac{1}{h_i \tilde{h}_{i+1} h_{i+1}} z_{i+2}^{(k-1)} \right\}, \end{aligned} \quad (47)$$

где $z_i^{(k)} = \begin{cases} z_i^0 - \varepsilon_i, & \text{если } \tilde{z}_i^{(k)} \langle z_i^0 - \varepsilon_i; \\ \tilde{z}_i^{(k)}, & \text{если } z_i^0 - \varepsilon_i \leq \tilde{z}_i^{(k)} \leq z_i^0 + \varepsilon_i; \\ z_i^0 + \varepsilon_i, & \text{если } \tilde{z}_i^{(k)} \rangle z_i^0 + \varepsilon_i; \end{cases} \quad (48)$

ε_i — погрешность измерения z_i .

Процесс продолжается до тех пор, пока не станет:

$$\max_i |z_i^{(k+1)} - z_i^{(k)}| \leq \delta, \quad (49)$$

где δ — некоторое малое число. Для кубического сплайна полагают $\delta = 10^{-2} \varepsilon$.

Учет искажающего воздействия технологических дефектов изготовления специальной системы метания

Учет особенностей конкретных систем, анализ которых проводится по экспериментальным данным, в настоящее время стал одним из направлений практической методологии идентификации. В этом контексте представляет интерес рассмотрение следующих особенностей системы «объект – направляющие» ССМ:

– в результаты измерений весьма существенные искажения вносят локальные неоднородности по пространственной координате (технологические дефекты изготовления направляющих ССМ);

– указанные искажения данных измерений соответственно расположены в узких зонах, величина которых пренебрежительно мала по сравнению с длиной направляющих (деформации направляющих фактически оказываются в пределах единиц сантиметров при длине направляющих до нескольких метров);

– пространственное расположение зон действия неоднородностей во времени не меняется и разработчику, как правило, не известно;

– динамика движения объекта может быть с высокой точностью описана простыми моделями (не выше 5-го порядка), однако, если в ходе натурального эксперимента измерительные точки случайно попадают в зону действия локальных неоднородностей, применение простых моделей приведет к существенному смещению оценок.

В работе предложен один из возможных подходов к учету искажающего действия локальных неоднородностей. Учитывая важность проблемы, рассмотрим ее в общем виде. Для этого выберем полиномиальную модель системы, выход которой является функцией одной пространственной координаты x , определенной на множестве X и отягощен V в общем случае нелинейными неоднородностями, проявляющимися на каждом локальном участке p в некотором интервале $[x'_p, x''_p]$, причем ее динамические свойства описываются полиномом времени степени R :

$$Y = Y^A + Y^B + Y^C = \sum_{j=1}^M a_j t^j + \sum_{l=1}^R b_l \tilde{t}^l + \sum_{p=1}^V f_p(\theta_p; x_p) + \xi, \quad (50)$$

где ξ — шум измерений с характеристиками $\xi \approx (0, \sigma^2)$; $x_p \in [x'_p, x''_p] \in G \forall p = 1, \dots, V$; $\tilde{t} = t - t_0$.

Для гладких функций $f(i; x)$ практически всегда можно подобрать линейную модель в виде сплайна, адекватную модели (50), и действующую во всем диапазоне изменения x . Однако такой метод чрезвычайно неэффективен, поскольку

минимальное количество измерений при этом следует брать большим $M + R + \sum_{p=1}^V M_s$ для M_s коэффициентов сплайна в каждой p -й неоднородности.

На практике широко пользуются моделями вида (50), игнорируя воздействие неоднородностей, т.е. исключая Y^C . При этом воздействие неоднородностей с учетом их локального характера относят к шумовым воздействиям наряду с ошибками измерений. При оценивании Y аномальные выбросы в данных, обусловленные неоднородностями при попадании x в p -й интервал отбраковывают, применяя для этого специальные процедуры.

Покажем, что применение таких подходов часто приводит к смещению оценок.

Пусть в ходе эксперимента по идентификации рассматриваемой системы получают N измерений в точках, образующих сетку $N = N_x \times N_{\tilde{t}}$.

Запишем модель (50) без составляющей Y^C в виде матричного уравнения регрессии:

$$M[Y] = A_1 \Psi_1, \quad (51)$$

где

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^j & \dots & x_1^M \tilde{t}_1 & \dots & \tilde{t}_1^l & \dots & \tilde{t}_1^R \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_N & \dots & x_N^j & \dots & x_N^M \tilde{t}_N & \dots & \tilde{t}_N^l & \dots & \tilde{t}_N^R \end{bmatrix};$$

$$\Psi_1 = [a_0, \quad \dots, \quad a_M b_1, \quad \dots, \quad b_R]^T; \quad (52)$$

$$Y = [y_1, \quad \dots, \quad y_i, \quad \dots, \quad y_N]^T, \quad (i = 1, \dots, N).$$

При минимизации функционала

$$\text{trace} (Y - A_1 \Psi_1)(Y - A_1 \Psi_1)^T$$

по методу наименьших квадратов [11] получают оценки вектора неизвестных параметров Ψ_1 :

$$\Psi_1 = (A_1^T A_1)^{-1} A_1^T Y. \quad (53)$$

Очевидно, что если в ходе проведения эксперимента измерительные точки не лежат в области неоднородностей, то модель (51) адекватна выборке и справедливо соотношение

$$M[\Psi_1] = (A_1^T A_1)^{-1} A_1^T [Y] = (A_1^T A_1)^{-1} A_1^T A_1 \Psi_1 = \Psi_1. \quad (54)$$

В действительности, однако, измерения при идентификации могут проводиться и в зонах действия неоднородностей, расположение которых в области X ,

как правило, неизвестно. Тогда при линейном представлении неоднородностей составляющей $A_2 \Psi_2$ адекватная модель системы будет иметь вид

$$M[Y] = A_1 \Psi_1 + A_2 \Psi_2. \quad (55)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} M[\Psi_1] &= (A_1^T A_1)^{-1} A_1^T [Y] = (A_1^T A_1)^{-1} A_1^T (A_1 \Psi_1 + A_2 \Psi_2) = \\ &= (A_1^T A_1)^{-1} A_1^T A_1 \Psi_1 + (A_1^T A_1)^{-1} A_1^T A_2 \Psi_2 = \Psi_1 + A_c \Psi_2, \end{aligned} \quad (56)$$

где $A_c = (A_1^T A_1)^{-1} A_1^T A_2$ — матрица смещения [11].

Таким образом, в отличие от задачи оценивания при идентификации параметров динамических систем с локальными неоднородностями их влияние приводит к смещению оценок параметров и, следовательно, к смещению регрессии.

Как было показано выше, для достаточно частого заполнения измерительными точками области изменения x усложнение модели позволяет добиться ее адекватности. Однако, учитывая, что расположение и амплитуда неоднородностей стационарны, зона их действия на практике значительно меньше рабочего диапазона x , а скорость изменения по x намного выше, чем для составляющей Y^A в формуле (49).

Применим подход [12], состоящий в исключении из обработки части измерений, попадающих в зону неоднородностей. Для его реализации целесообразно процесс идентификации разделить на два этапа.

На первом этапе во временном интервале $T \leq \tau_k$ (τ_k — время корреляции системы) определяются отрезки $[x'_p, x''_p]$, $p = 1, \dots, V$, т.е. зоны действия неоднородностей по пространственной переменной x для первого временного сечения $\tilde{t} = \tilde{t}_1$.

С этой целью с использованием процедуры взвешенного метода наименьших квадратов идентифицируется статистическая модель пространственной низкочастотной составляющей Y^A в виде:

$$Y^* = A_3 \Psi + K_\xi \xi, \quad (57)$$

$$\text{где } A_3 = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^j & \dots & x_1^M \\ & & & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_k & \dots & x_k^j & \dots & x_k^M \\ & & & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^j & \dots & x_n^M \end{bmatrix};$$

$$\Psi = [a_0, \dots, a_j, \dots, a_M]^T; \quad (58)$$

$$Y^* = [y_1, \dots, y_k, \dots, y_n]^T \Big|_{\tilde{\tau}_1}, \quad (59)$$

$$\hat{\Psi} = (A_3^T K_\xi^{-1} A_3)^{-1} A_3^T K_\xi^{-1} Y^*.$$

При этом предполагается, что во всем диапазоне X корреляционная матрица K_ξ диагональная и выполняется условие:

$$\xi \approx N(0, K_\xi) \forall x \in X. \quad (60)$$

Составляется вектор невязок ΔY :

$$\Delta Y = [\Delta_1, \dots, \Delta_k, \dots, \Delta_n]^T = Y_k^* - Y_k = A_3 \Psi_k. \quad (61)$$

В [12] показано, что при выполнении условия (60) значения Δ_k , $\forall k = 1, \dots, n$ являются независимыми величинами и $M[\Delta Y] = 0$. Влияние неоднородностей приводит к нарушению гауссовости и сериальной корреляции остатков между измерениями и моделью (Δ_k) на участках $[x'_p, x''_p]$ $p = 1, \dots, V$. Этот факт может быть использован для определения зон действия неоднородностей по следующему алгоритму [12].

1. Формируется «окно» $[x_w, x_{w+s}]$ размером s , которое перемещается по пространственной переменной из начального положения $w = 1$ с шагом $\Delta x_k = x_{w+1} - x_w$, ($k = 1, \dots, n$) в конечное положение x_{n-s} .

2. С помощью широко распространенного критерия для выявления сериальной корреляции определенного вида, называемого критерием Дарбина–Уотсона [11], проверяется нуль-гипотеза H_0 о том, что все сериальные корреляции $\rho_p = 0$ против альтернативы $H_1: \rho_p = \rho^p$ ($\rho \neq 0, |\rho| < 1$). Такая альтернатива H_1 появляется из предположения о том, что ошибки Δ_k подчиняются условию:

$$\Delta_k = \rho \Delta_{k-1} + z_k, z_k \approx N(0, \sigma^2), \quad (62)$$

а независимы $\Delta_{k-1}, \Delta_{k-2}$ и $\Delta_{\tau-1}, \Delta_{\tau-2}$.

При этом еще предполагается, что и среднее, и дисперсия ошибок Δ_k постоянны и не зависят от k , откуда с необходимостью следует, что $\Delta_k \approx N(0, \sigma^2)/(1 - \rho^2)$.

Далее строится статистика вида:

$$d = \sum_{k=2}^{n^*} (\Delta_k - \Delta_{k-1})^2 / \sum_{k=1}^{n^*} \Delta_k^2, \quad (63)$$

где $n^* = n$, и на ее основе определяется, можно ли отвергнуть нуль-гипотезу.

Гипотеза H_1 справедлива, если

$$d \langle d_L. \tag{64}$$

Гипотеза H_0 не отбрасывается, если

$$d \rangle d_U \text{ и } 4 - d \rangle d_U. \tag{65}$$

Неравенства (64), (65) выполняются для заданных уровней значимости 2ε .

Значения $d_{U,L}(\varepsilon; n, M)$ табулированы и представлены в виде, удобном для хранения в памяти ЭВМ. Принимается $d = d_0$.

3. Составляется вектор $\Delta \tilde{Y} = [\tilde{\Delta}_1, \dots, \tilde{\Delta}_{n-s}]^T$ из точек, не попадающих в «окно», и строится статистика d , (переход к п. 2) для $n^* = n - s$.

4. На каждом шаге перемещения «окна» производится контроль текущего значения d , при этом неоднородность с наибольшей корреляцией покрывается «окном» в его текущем положении:

$$x_w = \arg \max_{x_w \in X} |d_k - d_0|, k = 1, \dots, n. \tag{66}$$

5. Учитывая, что перемещение «окна» происходит в направлении возрастания x , уточняется его левая граница при сдвиге в сторону неоднородности на величину s_0 .

$$x_{w+s_0} = \arg \max_{x_{w+s_0} \in X} |d_f - d_0|, f = w, \dots, w + s. \tag{67}$$

Таким образом, определяются границы первой наихудшей по критерию Дарбина–Уотсона локальной неоднородности $[x'_1, x''_1]$:

$$x'_{p=1} = x_{w+s_0}; x''_{p=1} = x_{w+s}. \tag{68}$$

Затем осуществляется переход к пп. 3, 4, 5 и аналогично производится определение границ остальных неоднородностей при стробировании расположения уже найденных.

Критерий останова процесса поиска — выполнение неравенства (64).

На втором этапе находят оценки параметров Ψ_1 модели (51) с использованием точек, не попадающих в интервалы для всех имеющихся в выборке временных сечений.

Следует также отметить, что при обращении положительно определенной матрицы в стандартной регрессионной задаче хорошие результаты дает применение метода квадратных корней, обладающих лучшей, по сравнению с методом Гаусса–Жордана, устойчивостью к погрешностям округления [7].

ВЫВОДЫ

1. Рассмотренные подходы к идентификации параметрической модели движения объектов по направляющим ССМ по отсчетам положения позволяют реализовать различные методы сплайн-функций для осуществления оценки достоверности параметров выборок малого объема, математического моделирования процессов движения объектов и проведения их коррекции.

2. Наиболее адекватным методом математического моделирования процессов движения объекта по направляющим ССМ является метод, использующий аппроксимацию функции интерполяционным кубическим сплайном, построенным по дискретным отсчетам.

3. При обработке результатов измерений небольших объемов выборки использование указанной методологии позволяет значительно повысить информативность получаемых данных и оценить их достоверность.

1. *Плотников В.С.* Геодезические приборы. — М.: Недра, 1987. — 396 с.
2. *Barker L., Hallenbach R.* Laser Interferometer for Measuring High Velocity of Any reflecting Surface // J. Appl. Phys. — 1972. — Vol. 43. — P. 46–69.
3. *Assay J., Konrad C., Hall C.* Continuous Measurements of In-Bore Projective Velocity // IEEE TRANSACTIONS ON MAGNETICS. — 1989. — Vol. 25, N 1.
4. *Красюк Б.А., Корнеев Г.И.* Оптические системы связи и световодные датчики. — М.: Радио и связь, 1985. — 191 с.
5. *Меркишин Г.В.* Многооконные оптико-электронные датчики линейных размеров. — М.: Радио и связь, 1986. — 166 с.
6. *Стрейц В.* Метод пространства состояний в теории дискретных линейных систем управления. — М.: Наука, 1985. — 294 с.
7. *Волков Е.А.* Численные методы. — М.: Наука, 1987. — 248 с.
8. *Линник Ю.В.* Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений. — М.: Физматгиз, 1962. — 349 с.
9. *Вершинин В.В., Завьялов Ю.С., Павлов Н.Н.* Экстремальные свойства сплайнов и задача сглаживания. — Новосибирск: Наука. СО, 1988. — 102 с.
10. *Корнейчук Н.П.* Сплайны в теории приближений. — М.: Наука, 1984. — 352 с.
11. *Дрейпер И., Смит Г.* Прикладной регрессионный анализ: [В 2 кн.]. — М.: Финансы и статистика. Кн.1. — 1986. — 365 с.
12. *Сердюк В.Г., Шевырев А.М.* Идентификация динамических систем с местными технологическими дефектами // Электрон. моделирование. — 1991. — Т. 13, № 3. — С. 60–62.

Поступила в редакцию 29.07.2003